

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br.1916

**ANIMACIJA NESTLAČIVIH FLUIDA  
TEMELJENA NA SUSTAVU ČESTICA**

Ana Nekić

Zagreb, lipanj 2011.

## Sadržaj

1. Uvod .....	3
2. Klasična dinamika fluida .....	5
3. Navier-Stokesova jednačba .....	6
4. Metode rješavanja .....	8
4.1. Metoda konačnih razlika .....	8
4.2. Metoda konačnih elemenata .....	8
4.3. Metoda konačnih volumena .....	9
5. Eulerov fluid .....	11
6. SPH metoda .....	12
7. Lagrangeov fluid .....	18
7.1. Parametri Lagrangeovog fluida .....	19
7.1.1. Gustoća .....	19
7.1.2. Unutarnje sile .....	19
7.1.3. Vanjske sile .....	21
7.1.4. Površinska napetost .....	22
8. Implementacija .....	22
8.1. Biblioteka GLUT .....	28
8.2. Utjecaj parametara .....	29
9. Zaključak .....	34
10. Literatura .....	35
11. Sažetak .....	36
12. Abstract .....	37

## 1. Uvod

Suvremena fizika poznaje tri agregatna stanja materije : čvrsta tijela koja zadržavaju oblik i volumen, te tekućine i plinove koji se ujedinjuju pod zajedničkim nazivom fluidi. Fluid predstavlja tvar čiji su dijelovi veoma pokretljivi.

Fluide je moguće podijeliti na stlačive i nestlačive.

Tekućine predstavljaju nestlačive fluide – različita je sila reakcije tekućine kada na nju djeluje vanjska tangencijalna sila okomita na površinu same tekućine. Prema 3. Newtonovom zakonu sila reakcije fluida na okomitu silu suprotnog je smjera od vanjske sile, no jednaka joj je prema iznosu. Kod idealnog fluida sila reakcije tekućine na tangencijalnu silu je zanemariva. Obilježje idealnog fluida je jednostavno mijenjanje vlastitog oblika. Pri tome ne dolazi do promjene njegova volumena, već isključivo oblika. Stoga se idealan fluid smatra nestlačivim.

Za razliku od tekućina, plinovi su stlačivi fluidi, jer pod djelovanjem sile mijenjaju svoj oblik.

U svakodnevnom životu fluidi su vrlo česta pojava. No, njihova simulacija predstavlja kompleksan problem. Razlog kompleksnosti leži u složenoj interakciji različitih obilježja fluida kao što su konvekcija, turbulencija, površinska napetost i difuzija.

Današnja istraživanja na području računalne dinamike fluida fokusiraju se na razvijanje novih metoda za simulaciju i vizualizaciju fluida. Povezuju ih matematičke jednadžbe kojima se opisuje gibanje fluida. Fluid se smatra najteže simuliranom realnom pojavom, a još teže je simulirati detaljno zahtjevnije fluide interaktivno. Najčešće su tzv. "off-line" simulacije. U "off-line" simulaciji fluidi su prvo simulirani, a potom vizualizirani, u svrhu veće točnosti. Manje točnije metode dozvoljavaju simulaciju fluida u realnom vremenu.

Posljednje desetljeće računalne grafike obilježeno je implementacijom fluida temeljenom na sustavu rešetke. No, ovaj princip nije povoljan kod simulacije detaljnih fluida u realnom vremenu. Stoga su uvedeni sustavi čestica, koji kod fluida razmjernje razine detalja omogućuju interakciju.

Interakcija je esencijalna kod računalnih igara, simulacije operativnih zahvata, kao i kod izrade nacrtanimacija koje vjerno predočuju konačan rezultat.

Animaciju fluida moguće je podijeliti u dva područja – simulaciju i vizualizaciju. U području računalne grafike vidljiva je veća orijentacija prema području simulacije, odnosno matematici i fizici potrebnoj za opis složenog gibanja fluida. Naglasak je na razvoju metode pogodne za interaktivnu simulaciju fluida.

## 2. Klasična dinamika fluida

Na računalnu dinamiku fluida ponajviše su utjecali Claude Navier i George Stokes, koji su 1822., odnosno 1845. godine definirali tzv. Navier-Stokes jednadžbu koja opisuje dinamiku fluida. Osim navedene jednadžbe, koja čuva količinu gibanja, za opis fluida potrebna je i jednadžba kontinuiteta za očuvanje mase, te jednadžba stanja za očuvanje energije.<sup>[1]</sup>

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{u}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0^{[3]}$$

Računalna grafika poznaje nekoliko tehnika simulacije fluida. 1983. godine T.Reeves uvodi sustav čestica kao tehniku za modeliranje neizrazitih objekata.

U području računalne grafike gibanje fluida važno je za simulaciju brojnih svakodnevnih pojava. Osnovu gibanja fluida predstavljaju Navier-Stokesove jednadžbe. Moguće ih je implementirati na dva načina: Eulerovom metodom rešetke i Lagrangeovom metodom čestica.<sup>[9]</sup> Trenutno se više koristi Eulerova metoda, ponajviše za simulaciju efekata kao što su viskoznost, površinska napetost vode, elastoplastičnost za animaciju sluzi, pjene, te efekt termalnog uzgona za animaciju plina. Većina Eulerovih implementacija radi na "off-line" principu, stoga ne pridonose rješenju problema interakcije.<sup>[3]</sup>

Zasebno područje interesa predstavlja animacija same površine fluida. U računalnim igrama danas se koriste gravitacijski i sinusoidalni valovi koji se vrlo učinkovito implementiraju kao program za sjenčanje vrhova (eng. vertex) na jedinicama grafičke obrade (GPU). Hibrid između gravitacijskih valova i Navier-Stokesovih jednadžbi su tzv. jednadžbe plitkog fluida, kojima se simuliraju interakcije između dinamičkih valova i granica na interaktivnoj razini.<sup>[2]</sup>

### 3. Navier-Stokesova jednadžba

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g} + \nu \nabla \cdot \nabla \vec{u}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad [3]$$

Simbol  $\vec{u}$  u mehanici fluida predstavlja brzinu fluida. Grčko slovo  $\rho$  označava gustoću fluida. Sila po jedinici površine kojom djeluje fluid, odnosno tlak, označava se slovom  $p$ . Brzina, gustoća i tlak smatraju se kontinuiranim obilježjima fluida.<sup>[6]</sup>

Gibanje nestlačivih fluida u vremenu  $t$  moguće je opisati jednadžbom :

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla u) + f, \quad \nabla u = 0$$

Simbol  $\mu$  predstavlja viskoznost fluida, a  $f$  zbroj svih vanjskih sila koje djeluju na fluid.

Navier-Stokesov opis gibanja fluida temelji se na strukturi rešetke. Stoga osim ovisnosti o vremenu, treba uračunati i poziciju rešetke (koja također ovisi o vremenu).

U trodimenzionalnom prostoru, vektor pozicije određen je s :

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$$

Navier-Stokesova jednadžba gibanja fluida predstavlja drugi Newtonov zakon za fluid.<sup>[1]</sup>

$$F = m \cdot a$$

Desna strana jednadžbe, odnosno  $\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u$  predstavlja ukupnu silu gustoće, a lijeva strana, odnosno  $-\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla u) + f$ , predstavlja produkt mase i akceleracije. Za fluid akceleracija je derivabilna na cijelom području.<sup>[6]</sup>

Primjenom pravila lanca<sup>[6]</sup> dobiva se :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(t, r(t)) &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right]^T \cdot \left[ \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right]^T \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right]^T) u \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u \end{aligned}$$

Kada je gustoća konstantna kroz fluid, onda vrijedi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \quad \rho \nabla \cdot$$

$$u = \nabla \cdot u \text{ [6]}$$

Fluid je tada nestlačiv.



Slika 1. Clude-Louis Navier

## 4. Metode rješavanja

Počeci razvoja računalne dinamike fluida obilježeni su pojavom digitalnog računala 1950ih godina prošlog stoljeća. Osnovni alati za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, koje se između ostalog upotrebljavaju i u području računalne grafike, - metoda konačnih razlika (FDM – Finite difference method) i metoda konačnih elemenata (FEM – Finite element method) spominju se od početka 20. stoljeća.

### 4.1. Metoda konačnih razlika

Metoda konačnih razlika je numerička metoda koja pretvara rješavanje diferencijalne jednadžbe u formiranje i rješavanje sustava običnih linearnih jednadžbi. Pri tome se derivacije aproksimiraju i uvodi se greška, čija je veličina obrnuto proporcionalna broju jednadžbi koje se formiraju. 1910. godine Lewis Fry Richardson je britanskom društvu Royal Society predstavio rad o analizi pritiska na zidanje brana u kojem je upotrijebio metodu konačnih razlika.

### 4.2. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata je numerička metoda za pronalaženje aproksimacija rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i integralnih jednadžbi. Rješenje se temelji na uklanjanju diferencijalne jednadžbe kod stacionarnog stanja i pretvorbu parcijalne diferencijalne jednadžbe u aproksimacijski sustav običnih diferencijalnih jednadžbi, koje se potom numerički integriraju standardnim tehnikama, primjerice Eulerovom metodom. Metodu konačnih elemenata 1956. godine prvi puta spominju autori Turner, Clough, Martin i Top u radu *Aeronautical Science Journal* prilikom analize pritiska na letjelice.<sup>[10]</sup>



### 4.3. Metoda konačnih volumena

Metoda konačnih volumena je metoda za predstavljanje parcijalne diferencijalne jednačbe u obliku algebarskih jednačbi. Slično kao kod metoda konačnih elemenata i metode konačnih razlika, vrijednosti se računaju na diskretnim mjestima umrežene geometrije. Termin konačan volumen odnosi se na manji volumen koji okružuje svaku čvor-točku na mreži. Volumni se integrali u parcijalnim diferencijalnim jednačbama pretvaraju u površinske integrale koristeći teorem divergencije. Metodu konačnih volumena prvi je spomenuo Eleuterio F. Toro 1999. godine. Na veću zastupljenost ove metode u proteklih nekoliko godina utječe ponajviše jednostavnost struktura podataka.

Jednodimenzionalni primjer advekcije pokazuje uporabu metode konačnih volumena:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad t \geq 0$$

Varijablu stanja predstavlja  $\rho = \rho(x, t)$ , a tok od  $\rho$  predstavlja  $f = f(\rho(x, t))$ .

Prema konvenciji, negativan dio funkcije  $f$  predstavlja desni dio toka, a pozitivan dio funkcije  $f$  lijevi dio toka. Prostornu domenu  $x$  moguće je podijeliti na konačne volumene s indeksom  $i$   $\rho_i(t) = \rho(x, t)$ ,  $x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ .

Pri tome, srednji volumen u vremenu  $t = t_1$  iznosi :

$$\bar{\rho}_i(t_1) = \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \rho(x, t_1) dx$$

i u vremenu u vremenu  $t = t_2$  :

$$\bar{\rho}_i(t_2) = \frac{1}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \rho(x, t_2) dx$$

$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$  predstavljaju lokacije uzvodnih i nizvodnih rubova volumena  $i$ -th

Integriranjem početne jednadžbe u vremenu, uz zamjenu  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$  dobiva se:

$$\rho(x, t_2) = \rho(x, t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f_x(\rho(x, t)) dt$$

Za prosječan volumen u vremenu  $t = t_2$ , integrira se  $\rho(x, t_2)$  po dijelu volumena  $[x_{i+\frac{1}{2}}, x_{i-\frac{1}{2}}]$  i dijeli s  $\Delta x_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ :

$$\bar{\rho}_i(t_2) = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \{ \rho(x, t_1) - \int_{t_1}^{t_2} f_x(x, t) dt \} dx$$

Primjenom teorema divergencije  $\oint_v \nabla \cdot f dv = \oint_s f dS$  i zamjenom volumnog integrala vrijednostima  $f(x)$  dobivenim na rubovima  $x_{i+\frac{1}{2}}$  i  $x_{i-\frac{1}{2}}$  dobiva se:

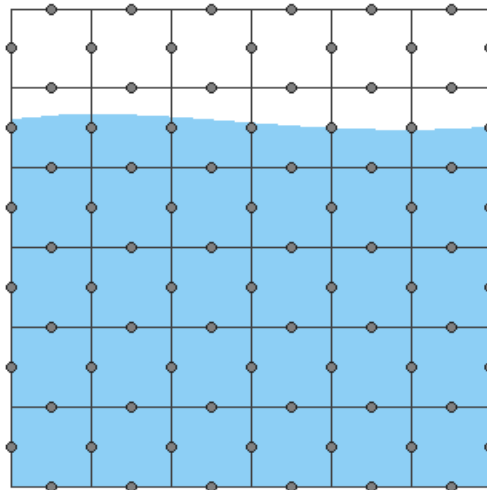
$$\bar{\rho}_i(t_2) = \bar{\rho}_i(t_1) - \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_1}^{t_2} f_{i+\frac{1}{2}} dt - \int_{t_1}^{t_2} f_{i-\frac{1}{2}} dt$$

$$f_{i\pm\frac{1}{2}} = f(x_{i\pm\frac{1}{2}}, t)$$

$$\frac{d\bar{\rho}_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x_i} [f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}] = 0$$

## 5. Eulerov fluid

Navier-Stokesove jednačbe opisuju gibanje Eulerovog fluida. Fluid je sastavljen od ćelija, poredanih u regularnu rešetku. Svaka ćelija sadrži određen broj molekula fluida, odnosno čestica.<sup>[9]</sup> Navier-Stokesove jednačbe moguće je numerički riješiti pomoću nekoliko koraka za svaku komponentu jednačbe. Najvažniji korak je Helmholtz-Hodge dekompozicija, odnosno matematička tehnika koja dozvoljava kombiniranje gradijenta tlaka i  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  u jedinstvenu jednačbu. Rešetka pruža rješenje za procjenu derivacija pomoću metode konačnih razlika (FDM).<sup>[3]</sup>



Slika 2. Struktura Eulerovog fluida u 2D

Prednost Eulerove metode jest mogućnost detaljnijeg opisa fluida. Glavni nedostatak metode predstavlja sama rešetka, tj. nemogućnost postojanja fluida izvan domene domene rešetke. Stoga nije moguće simulirati prirodan tok fluida. Problemu se pokušalo suprostaviti pomoću adaptivnih rešetki. Primjerice, metoda temeljena na oktalnom stablu (eng. Octree) koristi se kod vrlo detaljne simulacije fluida vode i dima. Problem kod veličine tzv. grube rešetke predstavlja veliko zauzeće memorije, posebice kod simulacije fluida visoke rezolucije.

Iako su posebne strukture podataka korisne za detaljnije prikaze i manju potrošnju memorije, Eulerovim principom simulacije baziranom na rešetci nije moguće dobiti interaktivne rezultate.

## 6. SPH metoda

SPH metoda, odnosno „Smoothed Particle Hydrodynamics”, predstavlja interpolacijsku metodu modeliranja fluida kao skupine pokretnih čestica, koja se koristi za rješavanje jednadžbi kretanja između dvije ili više čestica. Prvotno je nastala u području računalne astrofizike za simulaciju stlačivih tokova. Koristila se u simulaciju različitih astrofizičkih fenomena prilikom intuitivnih prikaza složenih problema. Danas se koristi u filmskoj industriji za poboljšanje realnog prikaza specijalnih efekata, kao što su kretanje požara kroz zgrade, protok zraka i slično.<sup>[4]</sup>

Interpolacijska SPH metoda služi za izračun približne vrijednosti i derivacija kontinuiranih polja pomoću diskretnih uzoraka, odnosno točaka. Uzorci predstavljaju zasebne entitete – čestice. Svaka čestica sadrži podatke o vlastitim fizičkim odrednicama – masi i poziciji. Osim ovih podataka, može sadržavati podatke o procijenjenim fizičkim količinskim vrijednostima, kao što su tlak, temperature, tzv. masa gustoće (masa gustoće, tj. gustoća predstavlja masu po jedinici volumena). Karakteristične SPH količine su dobivene kao težinski prosjeci susjednih čestica.<sup>[11]</sup>

Osnovna prednost SPH metode je proizvoljna lokacija čestice. Poznate metode numeričke procjene derivacija, kao što je metoda konačnih razlika, zahtijevaju da čestice budu poravnate na regularnoj rešetci. Kod SPH metode derivacije kontinuiranih polja se procjenjuju pomoću analitičke diferencijacije. Svaka čestica zauzima vlastiti dio prostora. U svrhu dobivanja što točnijih procijenjenih težinskih količinskih vrijednosti nužna je gusta poredanost čestica uzorka.<sup>[3]</sup>

SPH metoda je prvenstveno interpolacijska metoda. Interpolacija se oslanja na teoriju interpolacije integrala pomoću krivulja koje aproksimiraju tzv. delta funkcije.<sup>[2]</sup>

Interpolacija integrala proizvoljne količinske funkcije  $A(r)$  definirane na prostoru  $\Omega$  se definira kao :

$$A_I(r) = \int_{\Omega} A(r') W(r - r', h) dx'$$

Simbol  $r$  predstavlja proizvoljnu točku u prostoru  $\Omega$ . Krivulja  $W$  posjeduje parametar  $h$ , koji definira njezinu širinu.

Navedeni integral moguće je aproksimirati s :

$$A_S(r) = \sum_j A_j V_j W(r - r_j, h)$$

Indeks  $j$  iterira po svim raspoloživim česticama.  $V_j$  predstavlja dio volumena implicitno pridružen čestici s indeksom  $j$ . Pozicija čestice određena je s  $r_j$ . Proizvoljna količinska vrijednost čestice na poziciji  $r_j$  određena je s  $A_j$ .

Za volumen čestice vrijedi sljedeća jednakost:

$$V = \frac{m}{\rho}$$

Simbol  $m$  označava masu, a simbol  $\rho$  gustoću (gustoću mase) čestice. Uvrštavanjem ove jednakosti u jednadžbu aproksimacije dobiva se :

$$A_S(r) = \sum_j A_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r - r_j, h)$$

Kod SPH metode diferencijabilnu interpolaciju funkcije moguće je dobiti iz vrijednosti pojedinih čestica. Derivacija interpolacije dobiva se standardnom analitičkom diferencijacijom. Pri tome se uzima pretpostavka da je krivulja dvostruko diferencijabilna.

Promatra li se sustav od dvije čestice  $i$  i  $j$ , parcijalna derivacija  $x$ -komponente postaje :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} A_S(r_i) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r_i - r_j, h) \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A_j \frac{m_j}{\rho_j} \right) W(r_i - r_j, h) + A_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial x} W(r_i - r_j, h) \\
 &= 0 \cdot W(r_i - r_j, h) + A_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial x} W(r_i - r_j, h) \\
 &= A_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial}{\partial x} W(r_i - r_j, h)
 \end{aligned}$$

Prilikom navedenog izračuna korišteno je produktno pravilo.

Jednakost  $\frac{\partial}{\partial x} \left( A_j \frac{m_j}{\rho_j} \right) = 0$  vrijedi zato što  $A_j \frac{m_j}{\rho_j}$  ne ovisi direktno o komponenti prostora, te se u danom kontekstu smatra konstantom.

Derivacije sume interpolanata utječu isključivo na krivulju. Stoga, gradijent količine polja prelazi u :

$$\nabla A_S(r) = \sum_j A_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h)$$

U svrhu postizanja višeg stupnja točnosti navedenog gradijenta koristi se :

$$\rho \nabla A = \nabla(\rho A) - A \nabla \rho$$

$$\nabla A = \frac{1}{\rho} (\nabla(\rho A) - A \nabla \rho)$$

Općenito, kod SPH metode poželjno je da se u izrazu gustoća nalazi unutar operatora.<sup>[6]</sup>

Stoga izraz za gradijent prelazi u :

$$\nabla A_S(r) = \frac{1}{\rho} \left( \sum_j \rho_j A_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h) - A \sum_j \rho_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\rho} \left( \sum_j A_j m_j \nabla W(r_i - r_j, h) - \sum_j A m_j \nabla W(r_i - r_j, h) \right) \\
&= \frac{1}{\rho} \sum_j (A_j - A) m_j \nabla W(r_i - r_j, h)
\end{aligned}$$

Izraz  $\frac{\nabla A}{\rho}$  moguće je zapisati kao :

$$\begin{aligned}
\frac{\nabla A}{\rho} &= \nabla \left( \frac{A}{\rho} \right) + \frac{A}{\rho^2} \nabla \rho \\
\nabla A &= \rho \left( \nabla \left( \frac{A}{\rho} \right) + \frac{A}{\rho^2} \nabla \rho \right)
\end{aligned}$$

Uvršavanjem navedene zamjene u jednačbu za gradijent<sup>[2]</sup> dobiva se :

$$\begin{aligned}
\nabla A_S(r) &= \rho \left( \sum_j \frac{A_j m_j}{\rho_j \rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h) + \frac{A_j}{\rho^2} \sum_j \rho_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h) \right) \\
&= \rho \left( \sum_j \frac{A_j}{\rho_j^2} m_j \nabla W(r_i - r_j, h) + \sum_j \frac{A}{\rho^2} m_j \nabla W(r_i - r_j, h) \right) \\
&= \rho \sum_j \left( \frac{A_j}{\rho_j^2} + \frac{A}{\rho^2} \right) m_j \nabla W(r_i - r_j, h)
\end{aligned}$$

Na isti se način izračunava i Laplacian polja količinskih vrijednosti:

$$\nabla^2 A_S(r) = \sum_j A_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla^2 W(r_i - r_j, h)$$

Upotreba različitih krivulja u SPH metodi analogno je korištenju različitih shema u metodi konačnih razlika. Izbor određene krivulje važan je za rješavanje karakterističnog problema u SPH metodi.

Krivulja korištena u SPH metodi nužno sadržava sljedeća svojstva<sup>[2]</sup>:

$$1. \int_{\Omega} W(r, h) dx = 1$$

$$2. \lim_{h \rightarrow 0} W(r, h) = \delta(r)$$

$\delta(r)$  predstavlja Diracovu delta funkciju :

$$\delta(r) = \begin{cases} \infty, & \|r\| = 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Krivulja mora biti normalizirana i pozitivnih vrijednosti:

$$W(r, h) \geq 0$$

Uvjet da krivulja mora biti isključivo pozitivnih vrijednosti uvodi se zbog točnog izračuna funkcije prosjeka.

Također, minimum i maksimum funkcije ne smiju biti dosegnuti.

U slučaju parne krivulje, odnosno:

$$W(r, h) = W(-r, h)^{[2]}$$

provodi se rotacijska simetrija, koja osigurava invarijantnost rotacije koordinatnog sustava.

Ako su ispunjeni uvjeti normalizacije i parnosti krivulje, tada je interpolacija točnosti drugog reda. Pogreška procjene vrijednosti tada iznosi  $O(h^2)$ .

Krivulja bi trebala imati tzv. granični radijus, kojim se osigurava nepostojanje interakcija krivulje izvan granica navedenog radijusa.



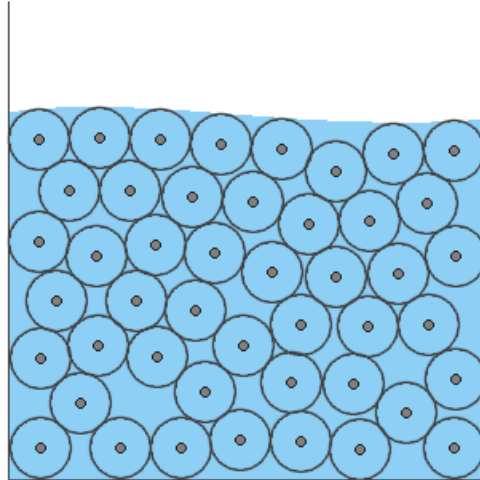
Granični radijus predstavlja parameter  $h$  :

$$W(r, h) = 0, \|r\| > h$$

U SPH metodi prilikom rješavanja novog problema, poželjno je pretpostaviti Gaussovu krivulju.<sup>[7]</sup> Izotropična Gaussova krivulja u  $n$  dimenzionalnom prostoru definirana je s:

$$W_{Gauss}(r, h) = \frac{1}{(2\pi h^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\left(\frac{\|r\|^2}{2h^2}\right)}, h > 0$$

## 7. Lagrangeov fluid



Slika 3. Struktura Lagrangeovog fluida

Lagrangeov fluid koristi princip sustava čestica.<sup>[1]</sup> Uporaba čestica umjesto rešetke uvelike pojednostavljuje korištene jednadžbe. Pretpostavlja se fiksni broj čestica koje predstavljaju određeni fluid tijekom njegove simulacije. Time je očuvan kontinuitet mase. Stoga je masu čestice moguće izostaviti iz izračuna. U Lagrangeovom prikazu fluida čestice u potpunosti definiraju fluid, odnosno dinamika fluida svodi se na dinamiku njegovih čestica. Svaka količinska vrijednost stoga ovisi isključivo o vremenu.<sup>[11]</sup>

Svaka čestica ima vlastitu masu, brzinu i poziciju, kao i karakteristične SPH procijenjene količinske vrijednosti. Primjerice, akceleracija čestice jest derivacija funkcije brzine u vremenu  $t$ :

$$a(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

Navier-Stokesova jednadžba u Lagrangeovom obliku glasi:

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 u + f^{[11]}$$

$-\nabla p + \mu \nabla^2 u + f$  predstavlja djelovanje vanjskih  $f^{vanjske}$  i unutarnjih  $f^{unutarnje}$  sile. Sile se zbrajaju i dobiva se :

$$F = f^{vanjske} + f^{unutarnje}$$

Akceleracija čestice  $i$  tada iznosi:

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{F_i}{\rho_i}$$

Pri tome  $F_i$  predstavlja sumu svih sila čestice, a  $\rho_i$  gustoću na poziciji čestice  $i$ .

## 7.1. Parametri Lagrangeovog fluida

### 7.1.1. Gustoća

Jednadžbe korištene u Lagrangeovom principu simuliranja dinamike fluida pretpostavljaju da su masa pojedine čestice i gustoća svih čestica veličine koje su poznate. Korisnik definira masu, parametar gustoće dobiva se iz izračuna.

U čestici  $i$  gustoća iznosi:

$$\begin{aligned} \rho_i &= \rho(r_i) \\ &= \sum_j \rho_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r_i - r_j, h) \\ &= \sum_j m_j W(r_i - r_j, h)^{[2]} \end{aligned}$$

### 7.1.2. Unutarnje sile

Unutarnje sile predstavljaju doprinos ukupnoj sili koji proizlazi iz samog fluida. Kod fluida te su sile tlak i viskoznost.

### 7.1.2.1. Tlak

Tlak  $p$  pojedine čestice definira se pomoću univerzalne plinske jednadžbe:

$$pV = nRT$$

Volumen  $V$  izražen je kao volumen po jedinici mase, odnosno  $= \frac{1}{\rho}$ .

Parametar  $n$  predstavlja množinu tvari. U konkretnom slučaju označava broj čestica plina u molu. U jednadžbi se pojavljuje i univerzalna plinska konstanta  $R$ , te  $T$ , odnosno temperatura izražena u Kelvinima.

Kod izotermalnog fluida s konstantnom masom, moguće je uvesti zamjenu:

$$nRT = k$$

pri čemu konstanta  $k$  ovisi isključivo o brojnosti čestica u promatranom fluidu.

$$pv = k$$

$$p \frac{1}{p} = k$$

$$p = kp$$

Tlak koji djeluje na pojedinu česticu  $i$  tada iznosi :

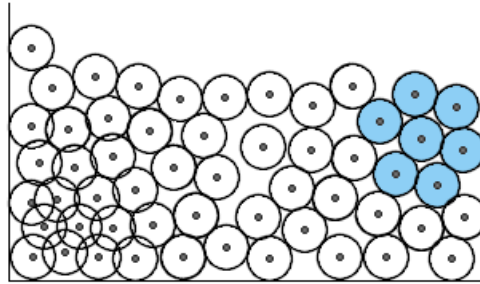
$$\begin{aligned} f_i^{tlak} &= -\nabla p(r_i) \\ &= -\sum_{j \neq i} p_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h)^{[2]} \end{aligned}$$

Tlak nije simetrična sila. Prilikom interakcije dvaju čestica prva čestica za izračunavanje vlastite sile tlaka koristi tlak druge čestice i obrnuto. Komponente tlaka na česticama u općenitom slučaju nisu jednakog iznosa. Stoga se ne poštuje zakon akcije i reakcije, odnosno Newtonov 3. zakon gibanja.

SPH metoda uz pomoć  $-\nabla p(r_i)$  pretvara tlak u simetričnu funkciju:

$$f_i^{tlak} = -\rho_i \sum_{j \neq i} \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) m_j \nabla W(r_i - r_j, h)$$

$$= - \sum_{i \neq j} \frac{p_i + p_j}{2} \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(r_i - r_j, h)^{[2]}$$



Slika 4. Dinamika čestica fluida pod utjecajem tlaka

Proračun tlaka rezultira odbojnim silama kod idealnog plina, koji ima tendenciju širenja u prostoru. No, za razliku od plinova nestlačivi fluidi, primjerice tekućine, trebaju prilikom simulacije zadržati prikaz unutarnje kohezije i posjedovati konstantnu gustoću u mirnom stanju.

Kod proračuna dinamike tekućina tlaku je potrebno dodati tzv. tlak u stanju mirovanja :

$$(p + p_0)V = k$$

$$p + k\rho_0 = k\rho$$

$$p = k(\rho - \rho_0)$$

Parametar  $\rho_0$  predstavlja masenu gustoću prilikom mirovanja. Termin gustoća mirovanja odnosi se gustoću dijela fluida koji je u stanju mirovanja. Tlak u fluidu rezultira privlačnim i odbojnim silama između čestica, koje se umanjuju proporcionalno približavanju gustoće gustoći mirovanja.

### 7.1.3. Vanjske sile

Vanjske sile koje djeluju na fluid nastoje se uravnotežiti s unutarnjim silama.

$$f^{vanjske} = \sum_n f^n$$

$f^n$  predstavlja pojedinu vanjsku silu. Doprinos pojedinih vanjskih sila može se primijeniti izravno na česticu, neovisno o SPH metodi. Ostale vanjske sile ovise o parametrima susjednih čestica.

### 7.1.3.1. Gravitacija

Gravitacija je vanjska sila koja jednoliko djeluje na sve čestice fluida i iznosi:

$$f^{gravitacije} = \rho_i g$$

Pri tome  $g$  predstavlja gravitacijsku konstantu koja iznosi  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

### 7.1.4. Površinska napetost

Površinska napetost nije dio Navier-Stokesovih jednadžbi i smatra se graničnim uvjetom. Kod Lagrangeovog fluida granice samog fluida određuje najviši sloj čestica dane simulacije. Na čestice fluida utječu privlačne sile susjednih čestica i uzrokuju ravnotežu unutar fluida. No, zbog površinske napetosti narušava se ravnoteža među česticama površina fluida. <sup>[3]</sup>

Površinska napetost uzrokuje asimetričan izgled fluida.

## 8. Implementacija

Animacija fluida provedena je korištenjem „Smoothed Particle Hydrodynamics“ metode. Fluid je prikazan prema Lagrangeovom principu, odnosno reprezentira ga fiksni broj čestica.

U implementaciji, pozicija čestice je reprezentirana kao vektor. Za potrebe pohrane komponenti vektora stvorena je struktura:

```
struct vektor2d_cestice
{
    float x, y;
}
```

Čestica je u programskoj implementaciji prikazana pomoću strukture. Svaka čestica fluida predstavlja zaseban entitet i sadrži podatke o vlastitoj brzini, sili, tlaku, privlačnom tlaku, gustoći, privlačnoj gustoći i susjednim česticama.

```

struct cestica
{
    vektor2d_cestice pozicija, pozicija_stara, brzina, sila;
    float gustoca, gustoca_privlacna, tlak, tlak_privlacan;
    vector<susjedna_cestica> susjedne_cestice;
};

```

Parovi susjednih čestica  $i$  i  $j$  pohranuju se u strukturu koja osim njihovih težinskih udaljenosti  $u1$  i  $u2$  sadrži i varijablu za pohranu stvarne međusobne udaljenosti *udaljenost*.

```

struct susjedna_cestica
{
    int i, j;
    float u1, u2, udaljenost;
}

```

Dinamika čestica fluida određena je silom, brzinom, tlakom i gustoćom. Dotično je potrebno izračunati zasebno za svaku česticu.

Na promjenu pozicije čestice utječe njezina brzina i akumulacija sila koje na nju djeluju :

```

cestice[i].pozicija += cestice[i].sila;

cestice[i].pozicija += cestice[i].brzina;

```

Brzina je općenito definirana kao omjer prijeđenog puta po jedinici vremena:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$ds$  predstavlja promjenu puta, a  $dt$  promjenu vremena.

Prilikom izračuna brzine korištena je Verlet integracija. Verlet integracija je numerička metoda koja se koristi prilikom integriranja Newtonovih jednadžbi gibanja. Važna karakteristika ove metoda jest stabilnost, te očuvanje fizikalnih svojstava kao što su reverzibilnost i homogenost prostora. Verlet integraciju naziva se još i Störmerova metoda, prema Carlu Störmeru, koji ju je koristio kod računanja trajektorija gibanja čestica u magnetskom polju. Primjenu u području molekularne dinamike popularizirao je francuski fizičar Loup Verlet.

Za potrebu proračuna brzine čestice u animaciji fluida uzima se uvjet  $dt = 1$ . Stoga je brzinu moguće izračunati kao iznos promjene puta, odnosno razlika prethodne i trenutne pozicije čestice.

```
cestice[i].brzina = cestice[i].pozicija - cestice[i].pozicija_stara;
```

Sila koja jednoliko djeluje na sve čestice simulacije jest gravitacija. Za potrebe simulacije korištena je modificirana gravitacijska konstanta  $G = 0.0981f$ , u svrhu vjernije simulacije. Gravitacija djeluje u smjeru osi  $y$  (vertikalno).

Tijekom simulacije potrebno je paziti na potrebnu gustoću čestica dijelova fluida. Potrebno je u svakom trenutku animacije postići odgovarajuću brojnost čestica u svim dijelovima fluida. U svrhu definicije tih dijelova korištena je konstanta  $r = 6.f$ , koja predstavlja polumjer zamišljene kružnice (dijela fluida). Navedena konstanta se koristi za optimizaciju algoritma. Naime, prilikom provjera odnosa čestica, u obzir se uzimaju isključivo čestice unutar zamišljene kružnice polumjera  $r$ . Ovo doprinosi smanjenju broja proračuna i time povećava brzinu simulacije. Susjedne čestice, odnosno čestice unutar jednog dijela fluida smještaju se u vektor *susjedi*, koji je dio definirane strukture *cestica*. U svrhu točnijeg računa korištena je kvadrirana vrijednost navedenog polumjera.

Pozicija svake čestice predstavljena je odgovarajućim vektorom. Na isti se način računa i njihova udaljenost:

```
vektor2d_cestice udaljenost_ij ;
```

```
udaljenost_ij= cestice[j].pozicija - cestice[i].pozicija;
```

Oduzimanje vektora definirano je kao funkcija čija je povratna vrijednost struktura vektor2d\_cestica:

```
Komponenta x vektora = cestica[i].x + cestica[j].x
```

```
Komponenta y vektora = cestica[i].y + cestica[j].y
```

Funkcija kojom se određuje težinska vrijednost udaljenosti čestice jest :

$$t = 1 - \frac{udaljenost_{ij}}{r}$$

*udaljenost\_ij* predstavlja stvarnu razliku pozicija dvaju čestica  $i$  i  $j$ .



Za svaku se česticu akumuliraju tzv. privlačne i odbojne gustoće, pomoću težinske vrijednosti udaljenosti.

Gustoće kojima određena čestica  $i$  djeluje na svoju susjednu česticu  $j$  definiraju njezinu općenitu i privlačnu gustoću:

$$cestica[j].gustoća = t^2$$

$$cestica[j].gustoća_{privlacna} = t^3$$

Sume navedenih gustoća definiraju i gustoće navedene čestice :

$$\text{“privlačna gustoća”} : \sum_{i \neq j} t^3$$

$$\text{“odbojna gustoća”} : \sum_{i \neq j} t^2$$

Tlak predstavlja omjer sile i površine na koju okomito ta sila djeluje:

$$p = \frac{F}{A}$$

Pri tome  $F$  označava silu, a  $A$  površinu na koju ta sila djeluje.

U simulaciji tlak je fizički entitet koji se zasebno računa za svaku česticu. U algoritam je uvedena optimizacija u vidu isključivanja iz proračuna čestica koje nisu susjedne.

Prilikom proračuna tlaka korištena je jednadžba stanja SPH metode:

$$p = k(\rho - \rho_0)$$

Veličina konstante  $k$  (težinska konstanta tlaka) izravno je definirana :  $k = 0.005f$ .

Konstanta gustoće fluida u mirnom stanju  $\rho_0$  u implementaciji iznosi  $\rho_0 = 10$ .

Sila tlaka računa se pomoću prethodno izračunatih težinskih koeficijenata  $t1$

i  $t2$  svake čestice :

$$\begin{aligned} sila = t1 \cdot (cestica[i].tlak + cestica[j].tlak) + t2 \cdot (cestica[i].tlak_{privlacni} \\ + cestica[j].tlak_{privlacni}) \end{aligned}$$

Ova sila predstavlja silu čestice  $i$ , koja utječe na njezino gibanje i gibanje njoj susjednih čestica. Na susjednu česticu  $j$  djeluje na način da se zbraja s njezinim silama:

$$cestica[j].sila = cestica[j].sila + sila$$

Suma navedenih sila negativno djeluje na silu čestice :

$$cestica[i].sila = cestica[i].sila - \sum_{i \neq j} sila \cdot okomit\_vektor\_udaljenosti$$

Općenito, okomiti su vektori definirani kao vektori čiji je skalarni produkt jednak nuli.

Skalarni produkt para dvodimenzionalnih vektora  $a = a_x i + a_y j$  i  $b = b_x i + b_y j$  definiran je kao :

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$

Implementirana funkcija za računanje okomitog vektora. Funkcija djeluje na komponente vektora tako da mijenja njihove vrijednosti :

$$x_{novi} = y_{stari}$$

$$y_{novi} = x_{stari}$$

$$x_{novi} \cdot y_{novi} = -1$$

Implementacija koristi Lagrangeov princip predstavljanja fluida. Za potrebe simulacije definirana je konstanta  $N$  koja predstavlja fiksni broj čestica. Pokretanje simulacije definirano je u samom programu. Ovo je ostvareno pomoću izravne početne promjene pozicije novostvorenih čestica. Nova je pozicija dobivena pomoću funkcije koja generira slučajne brojeve iz intervala  $[-1, 1]$ . U svrhu što manjeg početnog utjecaja na simulaciju pomak se dodatno raspolavlja prije izračuna:

```
p.pozicija_stara=p.pozicija+0.5f*vektor2d_cestice(pomak(),pomak());
```

Fluid je moguće dodatno uzburkati. Ovo se ostvaruje pritiskom miša na proizvoljno mjesto unutar fluida. Moguće su dvije vrste interakcije – skupljanje i raspršivanje čestica, ovisno pritisnutoj tipci miša.

Skupljanje i raspršivanje ostvareno je na sličan način. Početno je inicijaliziran vektor `vektor2d_cestice_privuci` (struktura je prethodno programski definirana), koji se osvježava u ovisnosti o relativnoj poziciji miša:

```
float relativan_x = (float)(x - sirina_ekrana/2) / sirina_ekrana;  
float relativan_y = -(float)(y - visina_ekrana) / visina_ekrana;
```

Za potrebe animacije fluida definirane su granice njegovog rasprostiranja. Ukoliko čestica prijeđe definiranu granicu, modificira se sila na način da se uzrokuje njezin povratak unutar granica. Na sličan je način implementirana i prepreka pravokutnog oblika, koja se nalazi unutar definiranih granica fluida. Česticama fluida se onemogućuje rasprostiranje unutar granica prepreke, pomoću modifikacije sile gibanja.

Pritiskom na odgovarajući gumb miša aktivira se privlačenje, odnosno odbijanje čestica. Privlačenje i odbijanje ne djeluju na sve čestice fluida, već isključivo na čestice koje se nalaze unutar zamišljene kružnice polumjera privlačenja, koji je definiran kao konstanta unutar programa. Prilikom ovog proračuna koristi se kvadrirana vrijednost, u svrhu veće točnosti.

Česticama na koje djeluje privlačenje, odnosno odbijanje, mijenja se parameter sile. Naime, prilikom privlačenja dolazi do umanjivanja sile konkretne čestice za  $\frac{1}{256}$ -ti dio apsolutne vrijednosti razlike vektora pozicije čestice i `privuci`. U slučaju odbijanja dolazi do suprotne pojave, odnosno sila čestice se povećava za isti iznos. Koeficijent  $\frac{1}{256}$  dobiven je temeljem ispitivanja utjecaja promjene sile na ponašanje fluida.

```
if( privlacenje )  
{  
    if( privlacenje_udaljenost_kvadrat < privlacenje_udaljenost *  
        privlacenje_udaljenost )  
        cestice[i].sila -= (cestice[i].pozicija - privuci) / 256;
```

```

if( odbijanje )
{
    if( privlacenje_udaljenost_kvadrat < privlacenje_udaljenost *
privlacenje_udaljenost )
        cestice[i].sila += (cestice[i].pozicija - privuci) / 256;
}

```

## 8.1. Biblioteka GLUT

Animacija fluida implementirana je pomoću Microsoft Visual Studio 2008 razvojne okoline.

U implementaciji je korištena biblioteka GLUT, odnosno OpenGL Utility Library. OpenGL je višepatformska specifikacija koja predstavlja podršku za razvijanje aplikacija koje rade s 2D i 3D grafikom.<sup>[8]</sup>

Funkcija `glutInit(&argc, argv)` inicijalizira GLUT biblioteku, a funkcijom `glutInitWindowSize(širina_ekrana, visina_ekrana)` definira se veličina GLUT prozora u aplikaciji.

Funkcija `glutIdleFunc(dinamika)` kao parametar prima pokazivač na funkciju *dinamika*. Omogućava obavljanje poslova pozadinske obrade, u ovom slučaju poslova funkcije *dinamika* i time omogućuje kontinuiranu animaciju.

Pomoću funkcije `glutInitDisplayMode` postavljen je način početnog prikaza. U implementaciji je korišten način `GLUT_RGB|GLUT_DOUBLE`. Koristi se dvostruki spremnik i RGB način za prikaz boje pomoću različitih intenziteta crvene, zelene i plave boje.

Za potrebe osvježavanja vrijednosti varijable *privuci* korištena je funkcija `glutMotionFunc(motion)`. Ova se funkcija poziva kada se pokazivač miša nalazi unutar prozora i/ili kada je pritisnuta tipka miša. Namjena funkcije bila je dohvatiti relativnu poziciju miša važnju za daljne proračune.

Funkcijom `gluOrtho2D` postavljeni su parametri 2D ortogonalnog prikaza. Okrugli izgled čestica dobiven je pomoću funkcije `glEnable(GL_POINT_SMOOTH)`.

## 8.2. Utjecaj parametara

Animacija fluida temeljena na Lagrangeovom principu i „Smoothed Particle Hydrodynamics“ metodi nastoji što realnije prikazati dinamiku fluida. Sama implementacija zasniva se na Navier-Stokesovoj jednadžbi gibanja nestlačivog fluida :

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) u = -\nabla p + \mu \nabla \cdot (\nabla u) + f, \nabla u = 0$$

Na izvođenje animacije ponajviše utječe broj čestica fluida. Naime, za svaku je česticu osim njezine pozicije potrebno izračunati pripadnu silu, tlak, brzinu, te utjecaj susjednih čestica. Animacija daje optimalne rezultate za fluid veličine 500 čestica. Ukoliko veličina fluida prelazi 2500 čestica dolazi do znatnog usporavanja njegovog gibanja, što narušava izvođenje animacije.

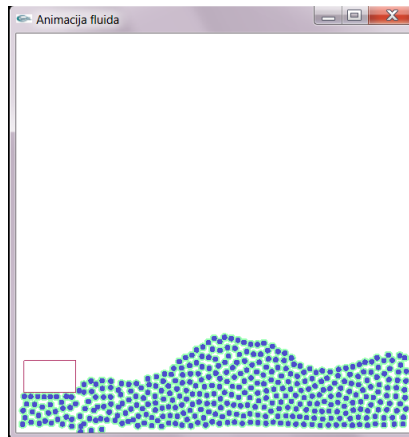
Ključan čimbenik definicije gibanja čestica predstavlja tlak koji različito djeluje na svaku česticu. U jednadžbi stanja :

$$p = k(\rho - \rho_0)$$

važan utjecaj na tlak imaju tzv. gustoća mirovanja fluida  $\rho_0$  i težinska konstanta tlaka  $k$ .

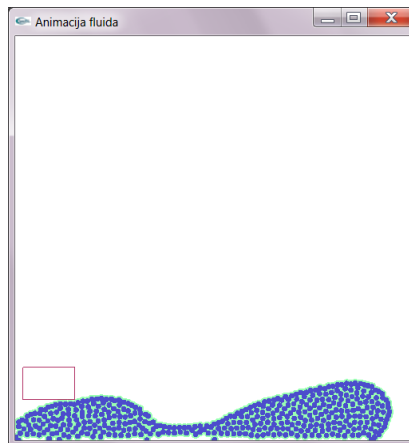
Gustoća mirovanja predstavlja referencijalnu gustoću fluida. Ona definira početnu silu privlačenja čestica, odnosno utječe na stupanj deformacije čestica fluida.

Vrijednost referencijalne gustoće mirovanja u implementaciji fluida postavljena je na 10.



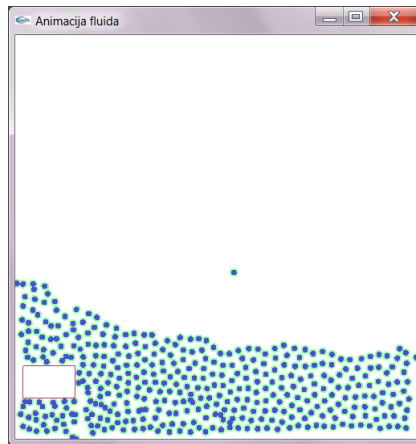
**Slika 5. Gustoća mirovanja = 10**

Povećanjem gustoće mirovanja povećavaju se privlačne sile između čestica, te one postaju zbijenije:



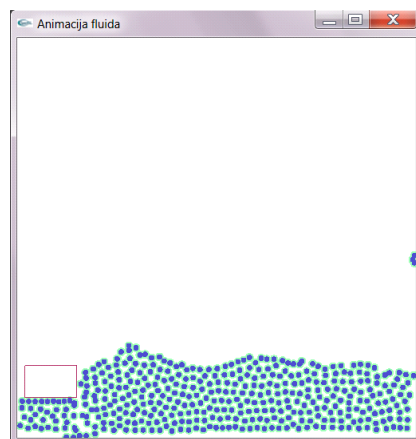
**Slika 6. Gustoća mirovanja = 25**

Suprotna se pojava događa prilikom smanjivanja gustoće mirovanja:



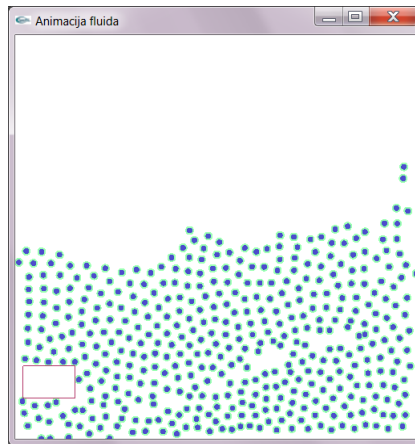
Slika 7. Gustoća mirovanja = 5

Težinska konstanta tlaka  $k$  obrnuto proporcionalno djeluje na privlačne sile između čestica fluida. Referencijalna konstanta tlaka  $k$  iznosi 0.05:



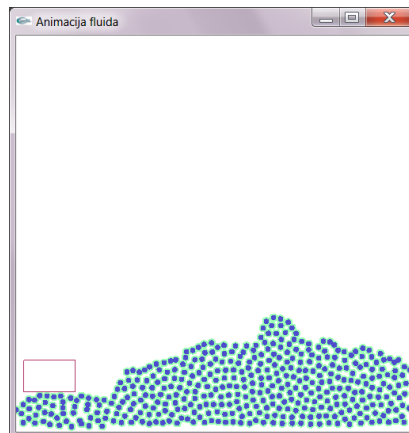
Slika 8. Konstanta tlaka = 0.05

Povećanjem konstante tlaka  $k$  dolazi do većih odbojnih sila između čestica fluida:



**Slika 9. Konstanta tlaka = 0.5**

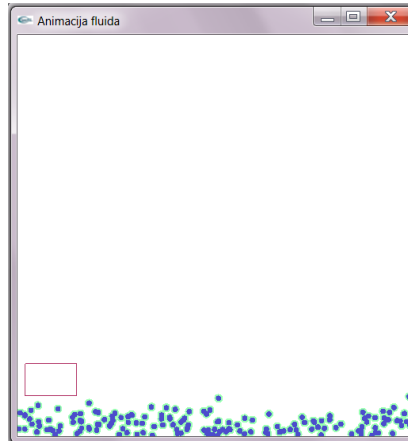
Zajedničko svim česticama jest djelovanje gravitacijske sile. Za potrebe animacije njezina vrijednost iznosi  $G = 0.00981$ . Gravitacijska sila utječe na gibanje čestice po  $y$  –komponenti (prema dolje). Također, parametar gravitacijske sile ubrzava gibanje fluida.



**Slika 10. Gravitacijska konstanta = 0.00981**

Primjerice, povećanjem parametra gravitacijske sile uz nepromijenjene ostale parametre, osim povećanja brzine gibanja fluida narušava se priroda gibanja nestlačivog fluida. Zbog veličinske prevlasti gibanja po  $y$  –komponenti dolazi do titranja, a gibanje je moguće usporediti s titranjem čestica plina (stlačivog fluida).





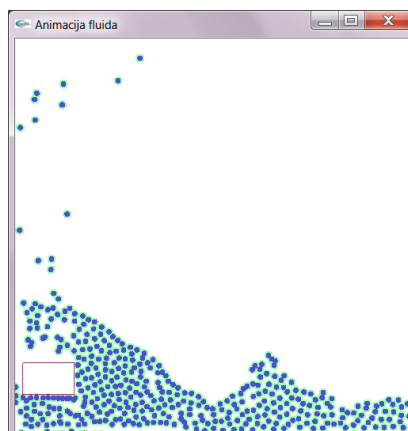
Slika 11. Gravitacijska konstanta = 0.981

Implementirana prepreka ograničava gibanje fluida. Prilikom implementacije prepreke uočene su oscilacije u silama koje utječu na promjenu gibanja u određenom smjeru.

Primjerice, za poticaj gibanja u pozitivnom smjeru  $y$  – osi potrebno je znatno manje utjecati na silu nego za poticaj gibanja u drugim smjerovima. Optimalni se rezultati postižu za :

```
cestice[i].sila.y -= (cestice[i].pozicija.y - prepreka_y2)/30
```

*prepreka\_y2* predstavlja najveću  $y$  – koordinatu prepreke. Većim utjecajem dolazi do neprirodne refleksije čestica prilikom sudara s gornjom stranicom prepreke.



Slika 12. Refleksija čestica na gornjoj stranici prepreke

## 9. Zaključak

Dinamika fluida predstavlja važno područje u računalnoj grafici. Fluidi su kao pojava vrlo česti u svakodnevnom životu. Područja primjene računalne simulacije fluida vrlo je raznoliko – od računalnih igara, preko medicinskih vizualizacija, do specijalnih efekata u filmskoj industriji. Zbog prirode njihove kompleksnosti teško ih je u potpunosti realno vizualizirati i simulirati.

Polazište dinamike fluida predstavljaju Navier-Stokesove jednačbe. Integralne je funkcije moguće pojednostaviti korištenjem „Smoothed Particle Hydrodynamics“ metode. Pri računanju potrebno je obratiti pozornost na očuvanje Newtonova 3. zakona gibanja. Naime, komponente tlaka na česticama u općenitom slučaju nisu jednakog iznosa. U očuvanju 3. Newtonova zakona pomaže upravo SPH metoda, kojom se tlak pretvara u simetričnu funkciju. Lagrangeov pristup u kojem je fluid predstavljen česticama pogodan je za simulaciju toka fluida. Poziciju čestica fluida moguće je proizvoljno odrediti, za razliku od Eulerovog fluida gdje je pozicija čestica ograničena rešetkom.

Proces dodjeljivanja veličina parametrima čestica pojednostavljuje Verlet integracija. Parametre simulacije, primjerice broj čestica, potrebno je prilagoditi sklopovskim komponentama razvojnog okruženja. Ukoliko sklopovlje nije u mogućnosti vremenski pratiti veći broj izračuna potreban za simulaciju, narušava se tzv. svojstvo rada u stvarnom vremenu (“real-time” svojstvo), što negativno utječe na izvedbu simulacije. Općenito, potrebno je minimizirati broj računskih operacija unutar programa. Primjerice, uvođenjem pomoćnih varijabli u kojima se pohranjuju potrebne međuvrijednosti, čime se izbjegava višestruko računanje.

Parametri simulacije veoma su osjetljivi na promjene. Neadekvatna veličina pojedinog parametra može bitno narušiti konačnu izvedbu. Stoga je priikom njihovog zadavanja potrebno paziti na postojeću međuovisnost.

## 10. Literatura

- [1] Bridson, R., Muller-Fisher, M., Guendelman, E. Fluid simulation, SIGGRAPH 2006, Boston, 2006.
- [2] Muller, M., Charypar, D., Gross, M. Particle-Based Fluid Simulation For Interactive Applications, Department of Computer Science, Federal Institute of Technology, Zurich, 2003
- [3] Bridson, R. Fluid Simulation for Computer Graphics, A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2008.
- [4] Roy, T.M. Physically-Based Fluid Modeling using Smoothed Particle Hydrodynamics, University of Illinois at Chicago, Chicago 1995.
- [5] Foster, N., Fedkiw, R. Practicle Animation of Liquids, SIGGRAPH 2001, Boston, 2001.
- [6] ,The Gaussian kernel , University of Wisconsin, Department of Statistics, <http://www.stat.wisc.edu/~mchung/teaching/MIA>, 25.04.2010.
- [7] Interaction with OpenGL, Memorial University of Newfoundland, Department of Computer Science, Canada, 2010., <http://www.cs.mun.ca/~av/teaching/cg>, 20.04.2011.
- [8] Braley, C., Sandu A., Fluid Simulation For Computer Graphics : A Tutorial in Grid Based and Particle Based Methods, Virginia Tech, Blacksburg,
- [9] Chung, T.J. Computational Fluid Dynamics, University of Alabama in Huntsville, Huntsville, 2002.
- [10] Kelager, M. Lagrangian Fluid Dynamics Using Smoothed Particle Hydrodynamics, University of Copenhagen, Department of Computer Science, Copenhagen, 2006.

# Animacija nestlačivih fluida temeljena na sustavu čestica

## 11. Sažetak

U radu je dan pregled načina prikaza fluida u svrhu animacije njegovog gibanja. Opisani su Eulerov fluid, koji se sastoji od ćelija poredanih u regularnu rešetku, i Lagrangeov fluid sastavljen od čestica. Detaljnije je opisana SPH metoda, odnosno „Smoothed Particle Hydrodynamics” interpolacijska metoda modeliranja fluida kao skupine pokretnih čestica, koja se koristi za rješavanje jednadžbi kretanja između dvije ili više čestica. Ovom je metodom ostvarena implementacija animacije nestlačivog fluida, prikazanog Lagrangeovom metodom. Za implementaciju je korišten Microsoft Visual Studio 2008 i jezik C++, te biblioteka GLUT. Navedeni su najvažniji dijelovi programskog koda i prikazan utjecaj pojedinih parametara na rezultat animacije.

**Ključne riječi** : Navier-Stokesova jednadžba, SPH metoda, Lagrangeov fluid, Eulerov fluid, Verlet integracija, čestica

# Particle - based incompressible fluid animation

## 12. Abstract

The paper gives an overview of the methods used in fluid animation. It describes the Euler fluid, which consists of cells arranged in a regular grid, and the Lagrange fluid composed of particles. It describes the "Smoothed Particle Hydrodynamics" method, an interpolation method that approximates values and derivatives of continuous field quantities by using discrete sample points. Particle - based incompressible fluid animation described in this paper uses the SPH method and the Lagrange method of fluid representation. This C++ application is implemented in Microsoft Visual Studio 2008. It uses the GLUT library. The paper describes important parts of the source code and the influence of some parameters on the animation.

**Keywords** : Navier-Stokes equation, Euler method, Lagrange method, Verlet integration, particle, Smoothed Particle Hydrodynamics