2. Pravac, linija

2.1. Homogene koordinate

Točka iz n-prostora može biti preslikana u homogenu točku u (n+1) h-prostoru. Obrnuto, homogena točka iz (n+1) h-prostora može biti projicirana u točku n-prostora. Promotrimo za primjer 2-prostor i njemu odgovarajući homogeni 3h-prostor.

Preslikavanje:

$$V(x\ y) \rightarrow V'(x'\ y'\ h),$$

pri tome je točka V u 2-prostoru a V' u 3h-prostoru i vrijedi:

$$x' = hx, \qquad (2.1)$$
$$y' = hy.$$

Projekcija:

$$V'(x'\ y'\ h) \rightarrow V(x\ y),$$

- pri tome vrijedi:

$$x = x'/h, \qquad (2.2)$$
$$y = y'/h.$$

Komponenta *h* zove se faktor proporcionalnosti ili homogena koordinata. Vrijednost homogene koordinate *h* je proizvoljna, najčešće se koristi slučaj *h* = 1. Ako je *h* = 0 tada se radi o točki koja je u beskonačnosti u *n*-prostoru. Ako su pravci paralelni u n-prostoru tada su paralelni i u homogenom (*n*+1) *h*-prostoru. Sačuvanost paralelnosti pravaca u homogenom prostoru važno je svojstvo.

Nešto o nazivu homogeni prostor. Jednadžba pravca u 2-prostoru glasi

$$ax+by+c = 0, \qquad (2.3)$$

ako se u 1.3 uvede izmjena 1.2 slijedi

$$\frac{a\,x'}{h}+\frac{b\,y'}{h}+c=0,$$

što daje

$$ax'+by'+ch = 0. \qquad (2.4)$$

Izraz 2.4 je jednadžba pravca u homogenom prostoru. Po svom obliku to je homogena jednadžba i zbog toga je i naziv homogeni prostor.

2.2. Jednadžba pravca

Pravac je određen s dvije točke, na primjer točke V_1 i V_2. Koristi se homogeni prostor, tj.

$V_1=(x_1\ z_1\ h_1)$, $V_2=(x_2\ y_2\ h_2)$.

Vektorski oblik jednadžbe pravca određen je vektorskim produktom

$$P = V_1 \times V_2 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & h_1 \\ x_2 & y_2 & h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 h_2 - y_2 h_1 \\ -x_1 h_2 + x_2 h_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Analitički oblik jednadžbe pravca, uz $h_1=h_2=1$ je

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

odnosno

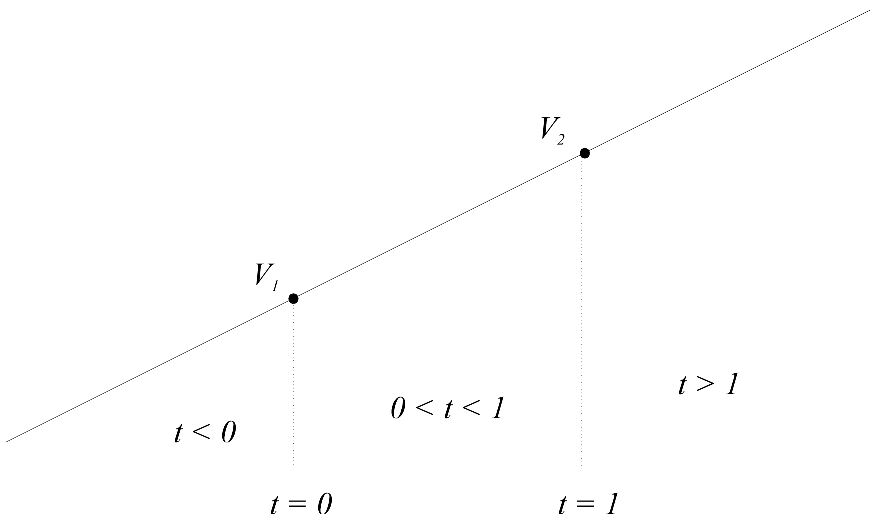
$$(y_1-y_2)x + (-x_1+x_2)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = ax+by+c=0 \tag{2.6}$$

Parametarski oblik jednadžbe pravca je

$$P=(V_2-V_1)t+V_1, \quad \text{ili po koordinatama} \quad \begin{aligned} x &= (x_2-x_1)t+x_1, \\ y &= (y_2-y_1)t+y_1, \\ h &= (h_2-h_1)t+h_1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pri tome je točki V_1 pridružena vrijednost parametra $t = 0$ a točki V_2, vrijednost parametra $t = 1$.

Na slici 1.1. pokazano je pridjeljivanje vrijednosti parametra t dijelovima pravca, koji su od interesa.



Slika 2.1. Vrijednost parametra *t* i dijelovi pravca.

1.3. Ispitivanje odnosa točke i pravca

Skalarni produkt točke $V(x\ y\ 1)$ i pravca $P(a\ b\ c)^\tau$ određuje odnos točke i pravca, pri tome vrijedi dogovor:

$$V\,P=(x\,y\,1)\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=a\,x+b\,y+c\ \begin{matrix}>0 & \text{točka } V \text{ je iznad pravca } P\\ =0 & \text{točka } V \text{ je na pravcu } P\\ <0 & \text{točka } V \text{ je ispod pravca } P\end{matrix}$$

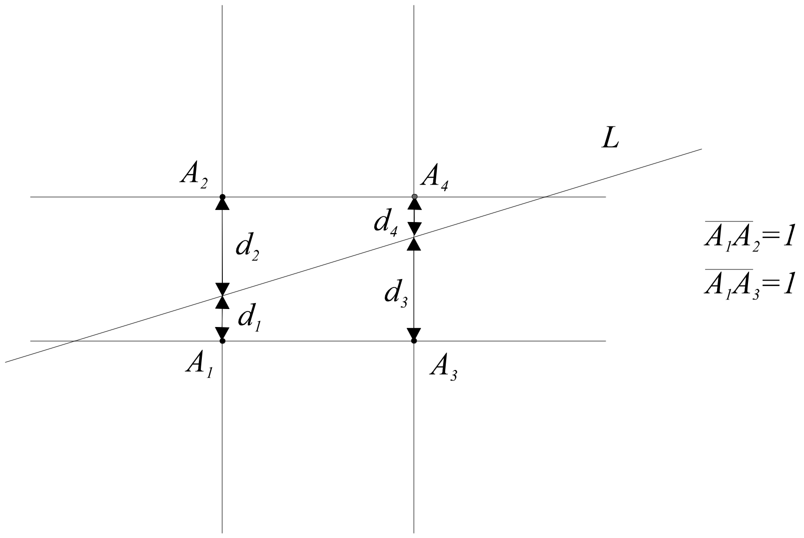
2.4. Iscrtavanje linije na zaslonu

Promatra se zaslon sličan TV ekranu (raster-scan). Između dvije točke zaslona potrebno je iscrtati ravnu liniju. U tu svrhu neophodan je postupak za izbor elemenata slike (pixel) koje treba osvijetliti. Ocjena valjanosti ovakvog postupka temelji se promatranjem:

- ravnosti linije,
- ispravnosti završetka linije,
- konstantnosti gustoće točaka u liniji i njena neovisnost o smjeru i duljini linije,
- brzine iscrtavanja.

2.4.1. Bresenham-ov postupak

Za iscrtavanje linije na zaslonu sličnom TV ekranu najčešće se koristi Bresenham-ov postupak. Kriterij izbora točaka rastera sastoji se u računanju udaljenosti okolnih točaka rastera, od linije (slika 1.2.).



Slika 1.2. Bresenham-ov postupak.

Za liniju L treba osvijetliti točke A_1 i A_4 jer je $d_1 < d_2$ i $d_4 < d_3$.

2.5. Radni zadatak

1. Učitati koordinate točaka $V_1(x_1\ \ y_1)$ i $V_2(x_2\ \ y_2)$.
2. Koristeći Bresenham-ov postupak iscrtati liniju određenu točkama V_1 i V_2.
3. Usporedba s *LINE* naredbom.
   Iscrtati liniju određenu koordinatama točaka $(x_1\ \ y_1+20)$ i $(x_2\ \ y_2+20)$ putem *LINE* naredbe.

2.6. Rješenje radnog zadatka

2.6.1. Postupak:

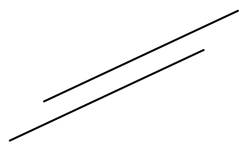
1. Učitati *x y* koordinate početne i završne točke linije $(x_1\ \ y_1)$, $(x_2\ \ y_2)$.
2. Izračunati x_0, y_0 intervale linije $x_0=x_2-x_1$, $y_0=y_2-y_1$.
3. Izračunati udaljenost $D = y_0/x_0 - 0{,}5$.
4. Postaviti koordinate tekuće točke $x=x_1$, $y=y_1$.
5. Za $i = 0$, $i < x_0$ ponavljati korake 6-8. Ići na korak 9.
   6. Osvijetliti tekuću točku *x, y*.
   7. Za $D > 0$ računati $y=y+1$, $D=D-1$.
   8. Pribrojiti $x=x+1$, $D=D+y_0/x_0$.
9. Usporedba s *LINE* naredbom.
   Iscrtati liniju određenu koordinatama $(x_1\ \ y_1+20)$ i $(x_2\ \ y_2+20)$.

10. Kraj.

1.6.2. Rezultati

Molim *x, y* koordinate početne točke ? Zadati mišem početnu točku.

Molim *x, y* koordinate završne točke ? Zadati mišem završnu točku.



Usporedba s *LINE* naredbom.

Opisani postupak radi ispravno za linije pod kutem 0-45^0. Načiniti potrebne modifikacije koje će osigurati ispravno iscrtavanje linije pod bilo kojim kutem.

2.7. Za vježbu

Koje izmjene je potrebno načiniti u algoritmu da sve varijable postanu cjelobrojne?