

11 Fraktalni objekti

- Fraktal
 - riječ fraktal - B. B. Mandelbrot 1975. (osnove su dali P. Fatou, G. Julia ranije)
 - skup sličan samom sebi – samosličan (engl. self-similar)
- fraktali u računalnoj grafici i animaciji
 - interesantni za projektiranje vizualno složenih objekata
<https://www.shadertoy.com/view/4tdSWr> <https://www.shadertoy.com/view/wtd3D4>
 - jednostavna pravila + rekurzivna primjena
 - modeliranje (složenih) prirodnih objekata i pojava
<https://experiments.withgoogle.com/>
- podjela fraktala
 - deterministički
 - stohastički



Primjena Fraktala u računalnoj grafici – primjeri

- opis biljaka:
 - drveće, cvijeće, grmlje, korijenje
 - <http://mattatz.github.io/THREE.Tree/>
 - <https://gltf-trees.donmccurdy.com/>
- linija morske obale, munja
 - https://yomboprime.github.io/lightning_strike_demo/webgl_lightningstrike.h
- oblaci, snježne pahuljice,
- teren, planine
 - <http://paulbourke.net/fractals/googleearth/>
 - <https://www.shadertoy.com/view/4slGD4>
- kompresija slika i video zapisa
- animacija



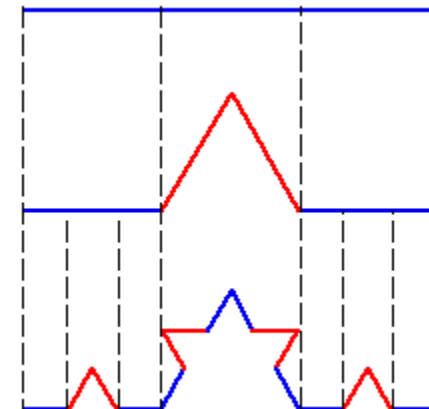
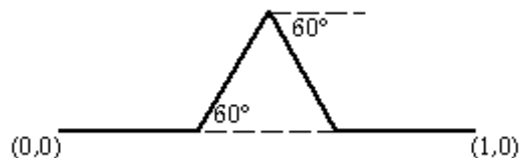
- način generiranja fraktalnih objekata
 - 1 ugnježdavanje geometrijskih elemenata (rekurzivni pozivi)
 - L-sustavi – zadani gramatikom
 - 2 IFS iterativni funkcijski sustavi
 - 3 ispitivanje područja konvergencije niza dobivenog iterativnom primjenom kompleksne funkcije

11.1. Ugnježdivanje geometrijskih elemenata (rekurzivni pozivi)

- osnovna transformacija
- rekurzivna primjena

Npr. 1D H.von Koch konstruira krivulju koja nema derivaciju niti u jednoj točki
rezultat je samo-sličan objekt

pravilo

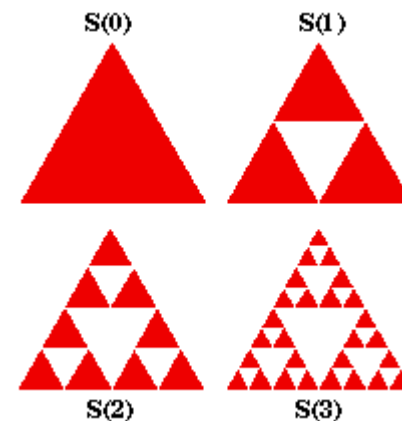
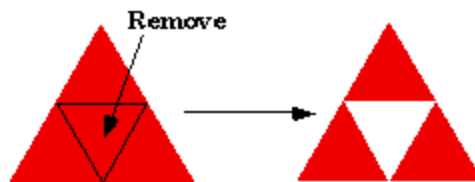


Npr. 2D Trokut Sierpinskog

<http://ecademy.agnesscott.edu/~lriddle/ifs/carpet/carpet.htm>

<http://demonstrations.wolfram.com/TriangularKochFractalSurface/>

pravilo

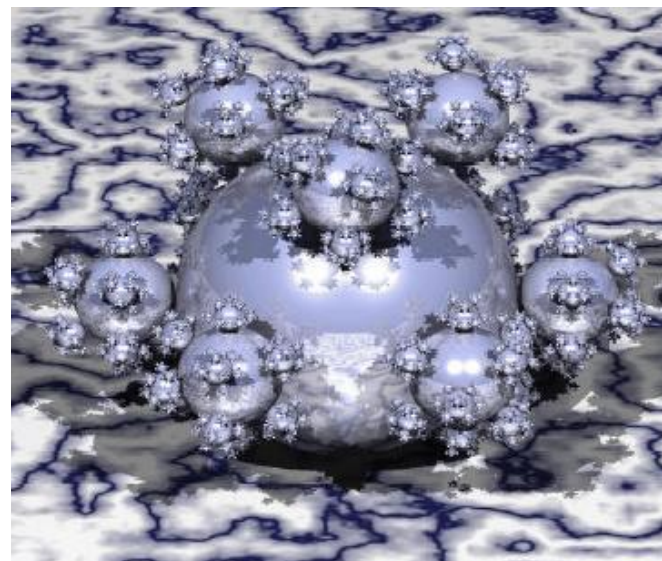
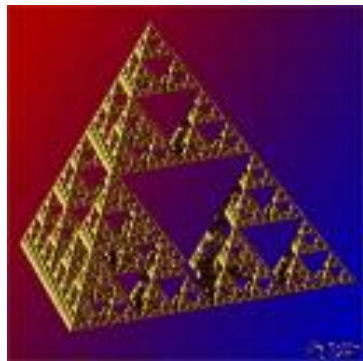


- rekurzivna priroda – vodi na samo-sličnost (fraktalni oblici)

Npr. proširivanje pravila na 3D prostor - 3D piramida

<https://www.shadertoy.com/view/4dl3Wl>

https://oosmoxiecode.com/archive/js_webgl/recursive_tree_cubes/



L-sustavi

- Astrid Lindenmayer (biolog) 1968
- opis razgranatih prirodnih objekata – modeliranje biljaka

G gramatika (vrlo slična gramatici Chomsky)

V (varijable) skup nezavršnih simbola

S (konstante) skup završnih simbola

ω početni simbol (niz) iz skupa V

P skup produkcijskih pravila

} pridjeljujemo **geometrijsku**
interpretaciju

$$G = \{V, S, \omega, P\}$$

npr. Fibonacci-jevi brojevi - gramatika:

– V : A B

– S : nijedna

– ω : A

– P : (A \rightarrow B), (B \rightarrow AB)

$n = 0$: 1: A - broj znakova

$n = 1$: 1: B

$n = 2$: 2: AB

$n = 3$: 3: BAB

$n = 4$: 5: ABBAB

$n = 5$: 8: BABABBAB

$n = 6$: 13: ABBABBABABBAB

$n = 7$: 21: BABABBABABBABBABABBAB

L - sustavi

- u svakom koraku kod primjene produkcijskih pravila cilj je primijeniti što je moguće više pravila istovremeno (zamjenjujemo sve nezavršne simbole) tj. paralelno kao što se stanice dijele istovremeno - po ovom se L-sustav razlikuje od formalnog jezika, odnosno L-sustav je podskup formalnog jezika
- može biti
 - kontekstno neovisan sustav – pravilo se odnosi na simbol, susjedi ne utječu
 - kontekstno ovisan sustav
- determinizam
 - deterministički - za svaki nezavršni simbol točno jedna produkcija
 - nedeterministički – više pravila (vjerojatnost primjene pravila)
 - kontinuirana promjena neke transformacije npr. rotacije

npr:

F/f – crtaj tako da je pero spušteno/dignuto

+/- – rotiraj za +60°/-60°

Koch – pahuljica:

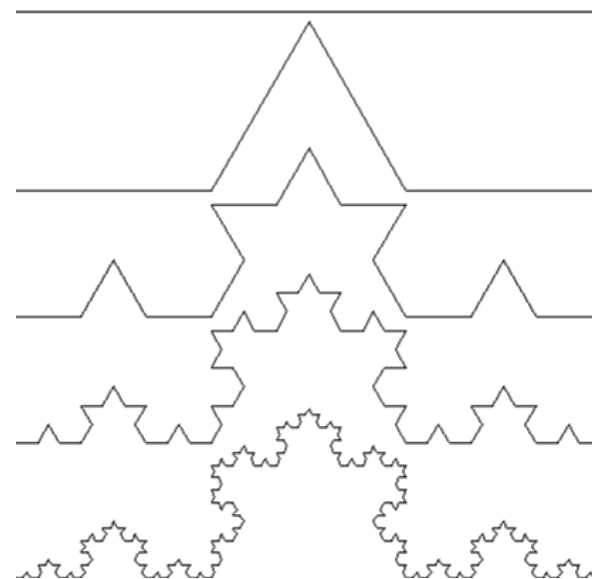
V: F

S: -, +

ω : F

P: p1: $F \rightarrow F+F--F+F$,

pravilo p_1
se primjeni k-puta:



<http://dkandalov.github.io/lssystem/>

<https://nekostark.github.io/lssystem-threejs-unifi/>

- geometrijska interpretacija završnih simbola:

Character	Meaning
F	Move forward by line length drawing a line
f	Move forward by line length without drawing a line
+	Turn left by turning angle
-	Turn right by turning angle
	Reverse direction (ie: turn by 180 degrees)
[Push current drawing state onto stack
]	Pop current drawing state from the stack
#	Increment the line width by line width increment
!	Decrement the line width by line width increment
@	Draw a dot with line width radius
{	Open a polygon
}	Close a polygon and fill it with fill colour
>	Multiply the line length by the line length scale factor
<	Divide the line length by the line length scale factor
&	Swap the meaning of + and -
(Decrement turning angle by turning angle increment
)	Increment turning angle by turning angle increment

<http://www.carl-olsson.com/project/l-system/>
<http://andrew-hoyer.com/experiments/fractals/>

L - sustav - primjer

jednostavniji – kontekstno neovisni, deterministički

Sierpinski Arrowhead Curve

V: X, Y

S: F, -, +

ω : YF

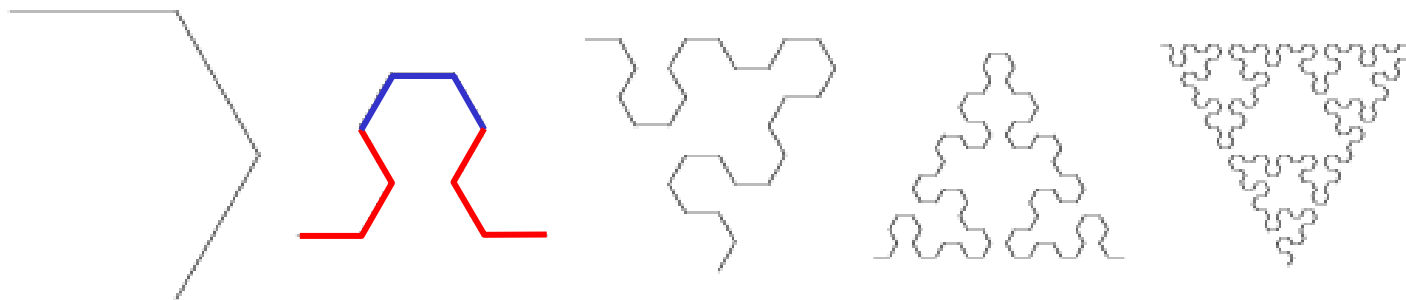
P: p1: X \rightarrow YF+XF+Y

p2: Y \rightarrow XF-YF-X

u završnom koraku X \rightarrow ϵ , Y \rightarrow ϵ

<http://jsxgraph.uni-bayreuth.de/wiki/index.php/L-systems>

<http://www.kevs3d.co.uk/dev/lsystems/>

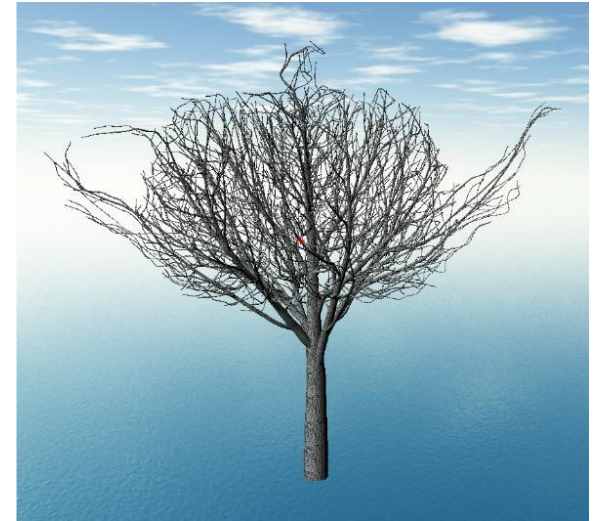
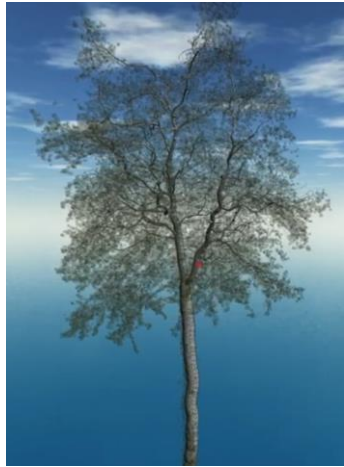
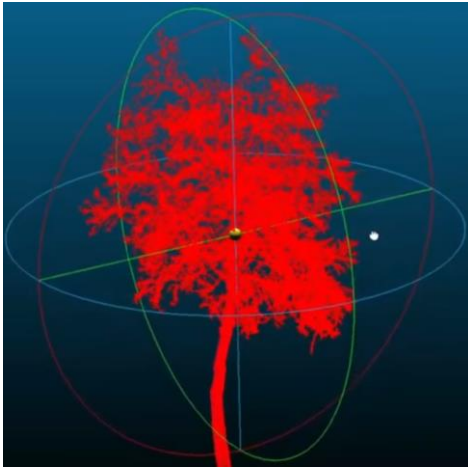


- primjeri iz botanike:
 - biljke
 - sadrže stabljiku drvenastu ili zelenu https://oosmoxiecode.com/archive/js_webgl/spring/
 - određen broj grananja (2, 3 ... 5 ..), često pravilne rotacije na stabljici
 - cvjetovi (pupovi lisni, cvjetni) – prethodi im kontekst čašice i listići
 - <http://www.malsys.cz/Gallery/Detail/tSvYmA8w>
 - rast biljke
 - utjecaj genetske informacije (opis pojedine biljke)
 - vanjski utjecaji (vjetar, sunce/sjena, prepreke – detekcija i zaobilaženje, položaj vode – jezero, okolne biljke, životinje)
 - slučajni utjecaji
 - u gramatici
 - pravila (genetski opis, hormoni rasta, inhibitori)
 - kontekstno ovisna gramatika
 - kombinacija stabljike i lista
 - cvjetovi
 - vanjski utjecaji



Upravljanje konačnim izgledom objekta – primjer stabla

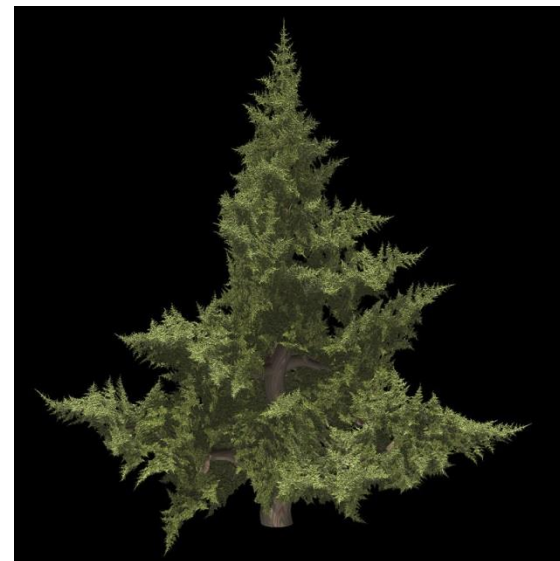
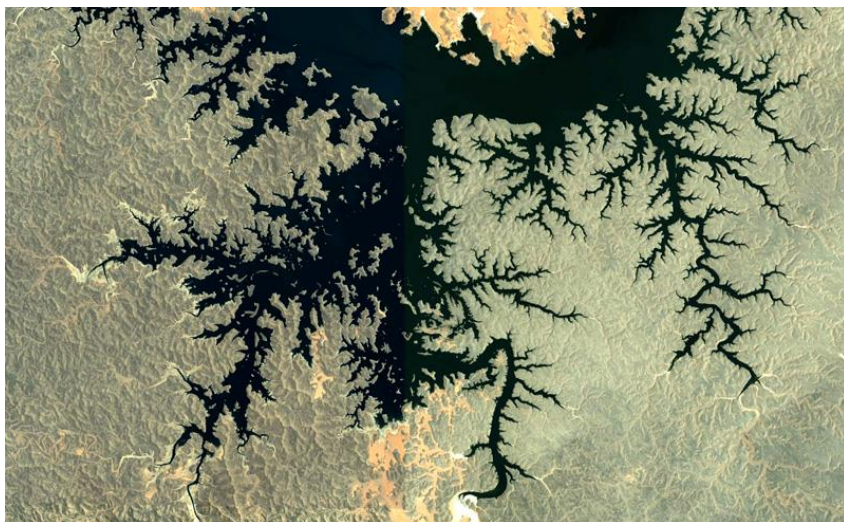
- stablo u obliku zadanog objekta - čajnika
- 2D siluete stabla
- 3D uzorkovane točke stabla (Lidar)
- <https://youtu.be/4ZV6thGIHVY>



- po potrebi vokseliziramo model, konačan oblik se generira
 - algoritmom kolonizacije prostora
 - pomoću stuje čestica
 - slično L-sustavu

Generiranje prirodnih objekata:

https://callumprentice.github.io/apps/webgl_terrain/index.html

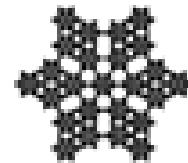


Primjena pravila u generiranju fraktala

- zadana je gramatika – crtamo fraktale (prirodne objekte)
- sekvencijski - grafika kornjače (turtle graphics) – promatramo trenutnu točku i primjenjujemo pravila
 - trenutni kontekst je određen: pozicijom, orijentacijom i skalom
- paralelno - rekurzivno umatanje geometrijskih primitiva
 - afine transformacije: pojedini segment (određuje poziciju i orijentaciju) zamjenjujemo izvornim elementom koji je skaliran (sažimanje)
 - što ako nisu transformacije sažimanja, ili ako nisu afine
- promatranje u vremenu - možemo simulirati rast biljke (kontinuirana promjena između pojedinih koraka)

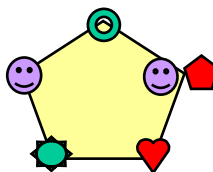
<http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/tree/maple.htm>

- fraktalna glazba



Gramatika oblika (*shape grammar*)

- simboli gramatike određeni su 3D/2D oblicima
 - produkcijska pravila za svaki oblik definiraju kako i kojim oblicima oblik može biti zamijenjen

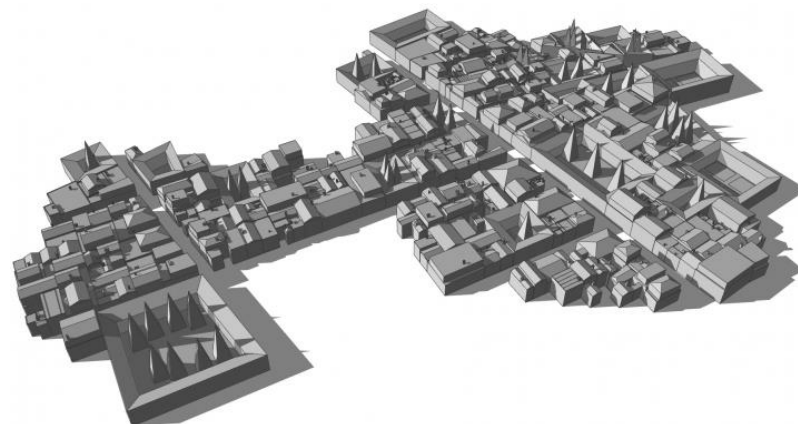
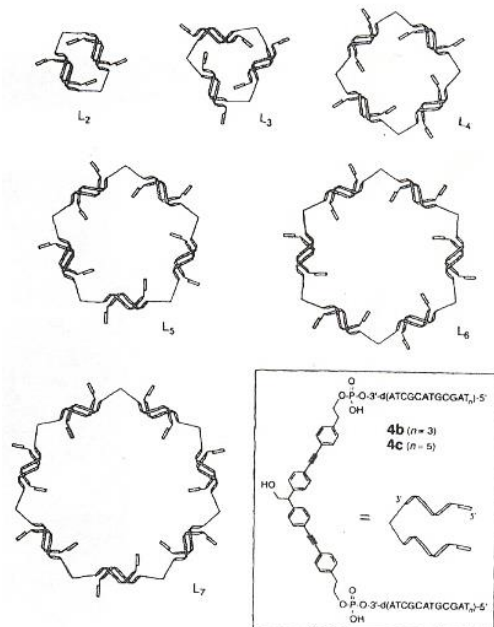


- proceduralno generiranje gradova (pročelje zgrade, različite zgrade, blokovi grada)

<https://aleward.github.io/shape-grammar-city-aleward/>

<https://alteredqualia.com/three/exam>

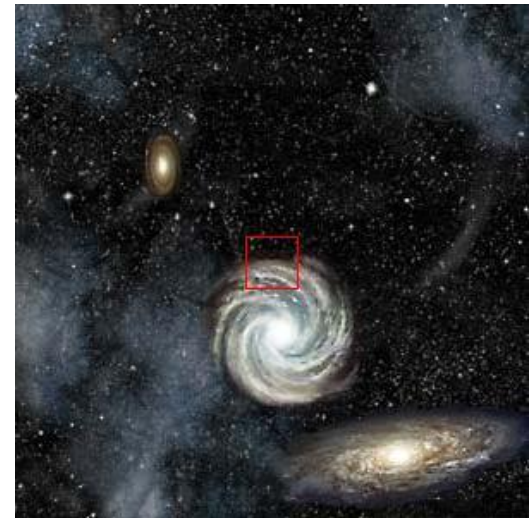
- kemijski spojevi, DNA strukture



Određivanje pravila za generiranje fraktala – inverzan postupak

- zadan je objekt – tražimo gramatiku
- određujemo uzorak/uzorke (završni simboli)
- određujemo produkcijska pravila (pravilnost)
 - određujemo genetsku informaciju, sjeme procesa
- složeni objekti i ponašanje (u prostoru i vremenu)
 - pojava pravilnosti kod biljaka, morske obale, munje, položaji planeta, zvijezda, galaksija, pahuljica snijega, DNA ... <http://www.asterank.com/3d/>
<http://micro.magnet.fsu.edu/primer/java/scienceopticsu/powersof10/>
 - kapanje kiše, širenje gripe, učestalost paketa u mreži računala
 - postavljanje zakonitosti u procesima koje smatramo “slučajnim”
 - teorija kaosa

(nelinearni dinamički sustav,
ponašanje na predvidivo nepredvidivi način)



11.2. IFS Iterativni funkcijski sustavi (engl. Iterated Function Systems)

- na slučajan način s vjerojatnošću p_i ,
odabire se preslikavanje (transformacija) w_i ,
koja se primjenjuje na prethodno dobivenu točku

$$\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, \quad \sum_i p_i = 1 \quad \mathbf{W} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11}s_1 & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22}s_2 & 0 \\ t_1 & t_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot w_i$$

r_{ij} rotacija

s_i skaliranje, faktor sažimanja

t_j translacija



IFS primjer 1D:

- Cantor-ova prašina

$$\mathbf{W} = \{w_1, w_2\} \quad w_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in [0, 1], \quad \mathbf{P} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\},$$

- područje privlačenja “atraktor”
transformacije razapinju prostor atraktora
- usporedba s geometrijski generiranim skupom

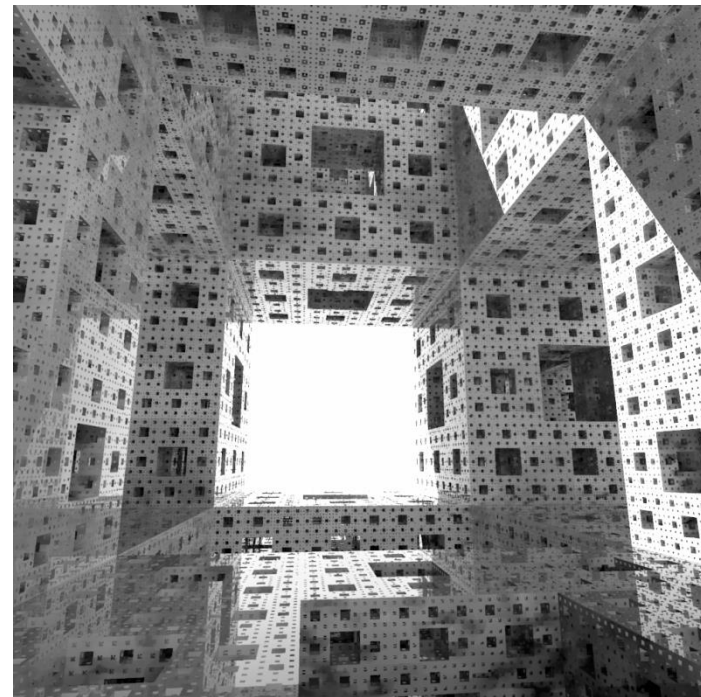
<http://hirnsohle.de/test/fractalLab/>

<https://www.shadertoy.com/view/ltfGzS>

$$B_0 = [0, 1],$$

$$B_1 = w_1(B_0) \cup w_2(B_0) = \left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$$

$$B_2 = w_1(B_1) \cup w_2(B_1) = \left[0, \frac{1}{9} \right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9} \right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9} \right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1 \right]$$



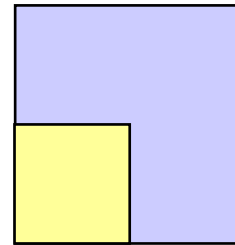
IFS primjer 2D nasumična šetnja 2D prostorom „Igra kaosa”:

- trokut Sierpinskog

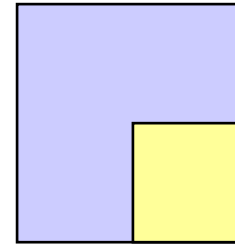
$$\mathbf{W} = \{w_1, w_2, w_3\}$$

$$\mathbf{P} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\},$$

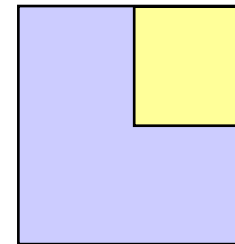
$$w_1(x, y) = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



$$w_2(x, y) = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 50 & 1 \end{bmatrix},$$



$$w_3(x, y) = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 50 & 50 & 1 \end{bmatrix}.$$



IFS primjer list paprati:

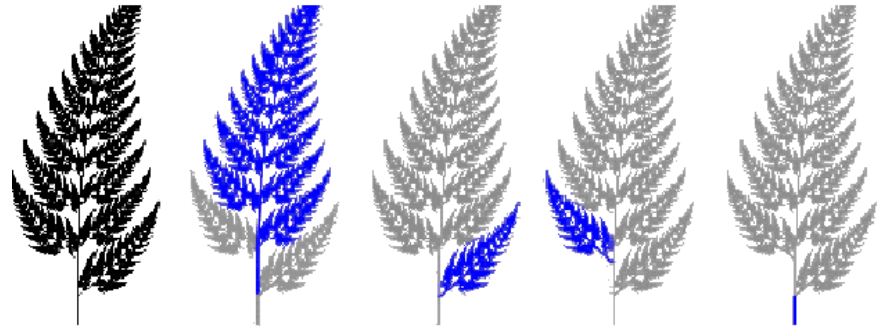
- 4 transformacije <http://sirxemic.github.io/ifs-animato/>

$$w_1(x, y) = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0,85 & -0,04 & 0 \\ 0,04 & 0,85 & 0 \\ 0 & 1,6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w_2(x, y) = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0,2 & 0,23 & 0 \\ -0,26 & 0,22 & 0 \\ 0 & 1,6 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w_3(x, y) = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} -0,15 & 0,26 & 0 \\ 0,28 & 0,24 & 0 \\ 0 & 0,44 & 1 \end{bmatrix},$$

$$w_4(x, y) = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{P} = \{0,07, 0,07, 0,85, 0,01\},$$

Određivanje matrica za IFS – inverzan postupak

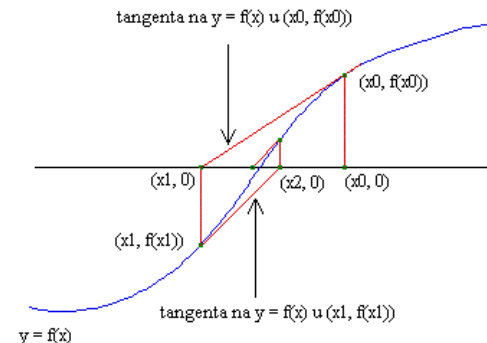
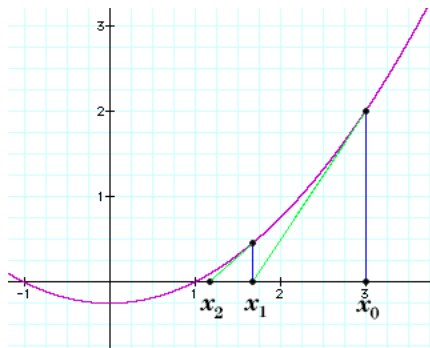
- zadana je slika (objekt) – tražimo IFS koji će generirati tu sliku
<https://www.samcodes.co.uk/project/geometrize-haxe-web/>
- Barnsley (1987 – fraktalna kompresija)
 - postupak kompresije traje – dekompresija je brza
 - kompresija s gubitkom, definiramo željenu kvalitetu rezultata
 - visok stupanj do 50:1 za slike, video 170:1,
 - dekompresija na proizvoljnu veličinu (fraktalna interpolacija ako je broj uzoraka manji od broja slikovnih elemenata u rezultatu)
 - (koristi - Encarta Microsoft)
 - slično kao DCT (Jpeg), valići (wavelet)

Atraktor

- atraktor je područje kojem se rješenja sustava asimptotski približavaju, može biti točka, krivulja ili kompleksan skup
- slično kao kod funkcije promatramo da li funkcija konvergira (jedna vrijednost), oscilira između dvije, tri ili više vrijednosti
- ovdje promatramo niz (svojstva tog niza, orbita) koji dobijemo iterativnim postupkom za nelinearne sustave – f je nelinearna funkcija

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{za neku početnu vrijednost } x_0$$

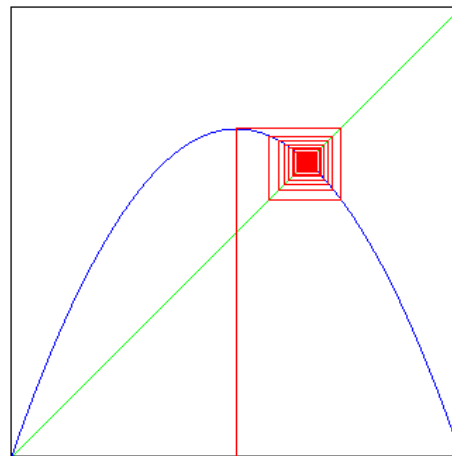
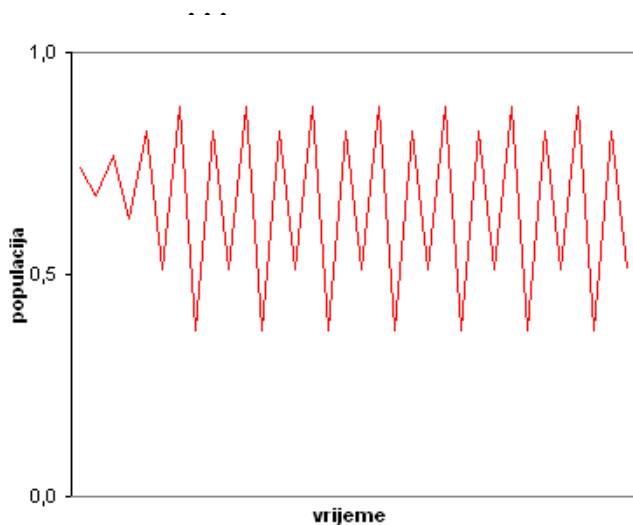
- ovu pojavu možemo promatrati u
 - 1D prostoru (odnosno kao elemente u ovisnosti o koraku iteracije), npr. numerički postupci *Newton-Raphsonova metoda* određuju x za $f(x) = 0$, odnosno računamo $x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$ <http://www.falstad.com/vector/>



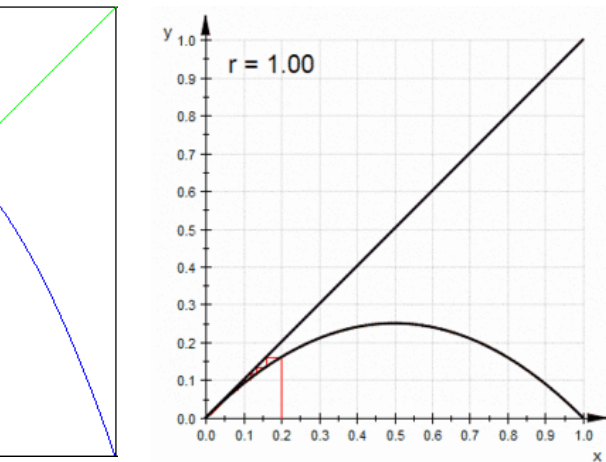
Npr. Populacijska jednačba (logistička karta)

$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n) \quad \text{https://phet.colorado.edu/sims/html/natural-selection/latest/natural-selection_all.html}$$

- x_n određuje populaciju (x_0 je početna populacija), broj između 0 i 1
- r određuje uvjete za rast populacije (reprodukcijski faktor)
 - 0 - 1 populacija umire neovisno o početnom broju jedinki
 - 1 - 2 broj jedinki se stabilizira na $x = (r-1)/r$
 - ako postoji fiksna točka (tada je $x_n = r x_n (1 - x_n)$ – otuda je rješenje)
 - 2 - 3 nakon oscilacija se isto stabilizira
 - 3 - $(1+\sqrt{6})$ populacija oscilira između dvije vrijednosti
 - 3.45 - 3.54 populacija oscilira između četiri vrijednosti
- prikaz u paučinastom dijagramu
 - iterativni proces promatramo za neki $x_0 \rightarrow f(x_0) \rightarrow$ pravac $x_1 = f(x_0)$ tj. $x_1 \rightarrow f(x_1)$



Ž. M. ZEMRIS, FER



<http://www.ibiblio.org/e-notes/MSet/logis.htm>

U populacijskoj jednadžbi se javljaju bifurkacije

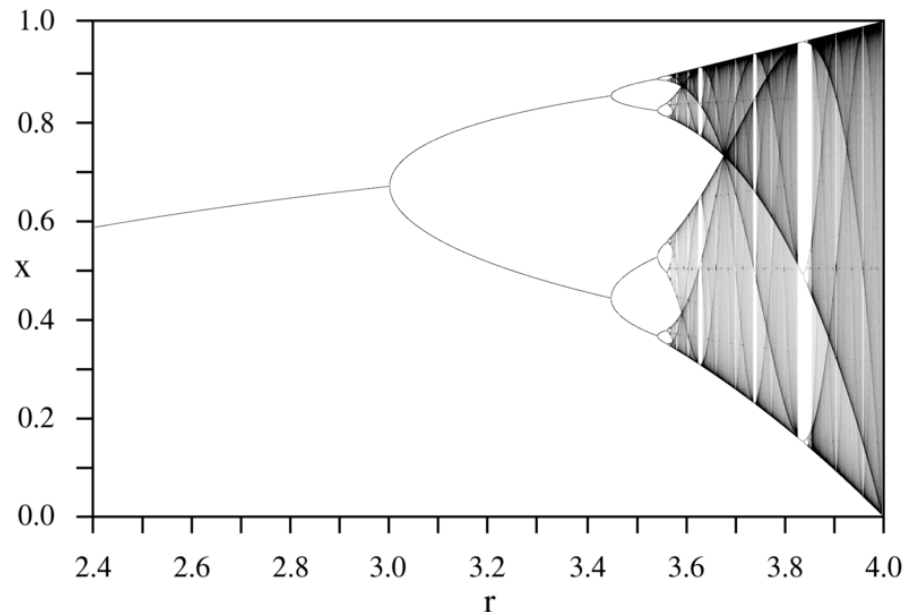
Bifurkacija – za pojedine vrijednosti parametra sustava r , naglo se promijeni broj atraktora npr. od 2 na 4 pa na 8 ... (no uz definiran omjer razmaka od 4.669 - Feigenbaum)

<https://www.complexity-explorables.org/flongs/logistic/>

Bifurkacijski dijagram

- sustav promatramo obzirom na različite r -ove (i x_0) broj atraktora
- fraktalno ponašanje (ako povećamo neki dio opet ćemo dobiti isti izgled)
- pojava ‘praznina’ u dijagramu <https://rreusser.github.io/demos/regl-sketches/009/>

Primjene – generiranje slučajnih brojeva



Atraktor – točka/područje “privlačenja”

- 2D točka, linija, ‘bazen’ - područje privlačenja
- 3D točka, linija, područje privlačenja <http://www.falstad.com/vector3d/>
- kod fraktala to nije jedna vrijednost već područje koje “privlači”
- dinamički, nelinearni sustavi - pojava “čudnih atraktora”

Lorenz (meteorolog)

- sustav diferencijalnih jednačini:

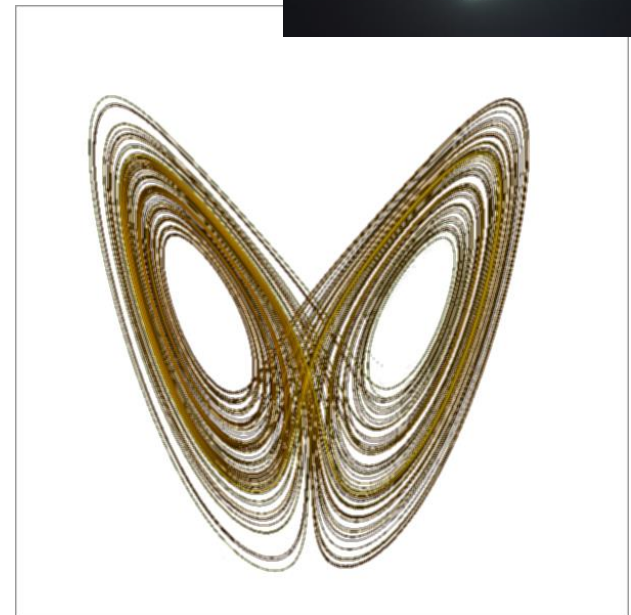
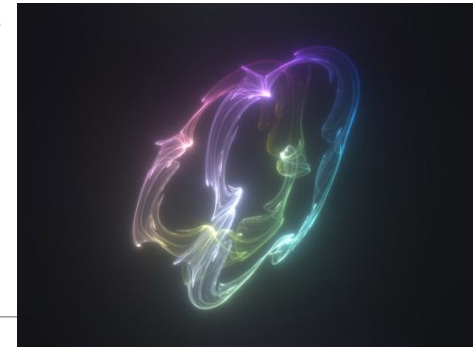
prati orbitu u 2D prostoru

- <http://www.exploratorium.edu/complexity/java/lorenz.html>
- http://www.ibiblio.org/e-notes/webgl/lorenz_model.html
- <http://mattatz.github.io/LorenzSystem/>

$$\frac{dx}{dt} = s(y - x) \quad s = 10 \quad x_0 = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = r x - y - x z \quad r = 28 \quad y_0 = 1$$

$$\frac{dz}{dt} = x y - b z \quad b = 8/3 \quad z_0 = 0$$



11.3. Ispitivanje područja konvergencije

Mandelbrotov skup

- promatramo kompleksni kvadratni polinom

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z, c \in \mathbb{C}, \quad z_0 = 0, \quad c \text{ točka kompleksne ravnine koju promatramo}$$

- Mandelbrotov skup je skup točaka kompleksne ravnine c za koje je sekvenca iz kritične točke $z_0=0$ ograničena, rub dobivenog područja je fraktal
- <https://www.shadertoy.com/view/lsX3W4>
- <https://www.shadertoy.com/view/lllGWH> <http://www.atopon.org/mandel/#>
- duž realne osi – populacijska jednadžba

Julijev skup <https://www.shadertoy.com/view/XdsGDr>

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z_0 \text{ točka kompleksne ravnine koju promatramo}$$

- c - za točke Mandelbrotovog skupa vrijedi da je

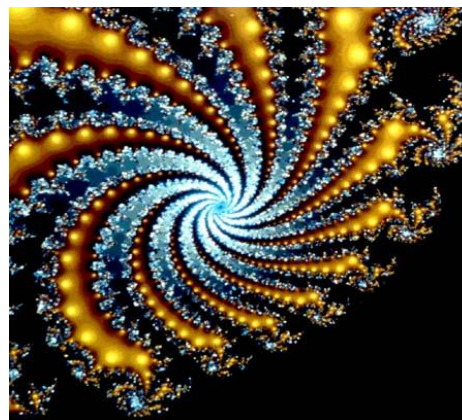
Julijev skup povezan <http://www.senchalabs.org/philogl/PhiloGL/examples/fractal/>
<https://www.leberknight.com/fractal.html>

3D <https://www.shadertoy.com/view/ltfSWn> <https://www.shadertoy.com/view/4sX3R2>



Fizikalni sustavi su u pravilu nelinearni, dinamički

- fizikalni sustav opisujemo sustavom diferencijalnih jednažbi
 - mehanički sustavi (opruge) ODE (diferencijalne jednažbe)
<http://www.mscs.dal.ca/~selinger/lagrange/doublespring.html>
 - električki RC
 - dinamika fluida – Navier-Stokes- ove jednažbe sustav zadan PDE (parcijalne diferencijalne jednažbe)
 - magnetski bazeni
- promatramo za koje početne uvjete će se postići stabilno rješenje (da li divergira i kojom brzinom)
- utjecaj parametara sustava (k , l_0 , RC, $\mu \dots$) na promjene stabilnosti sustava

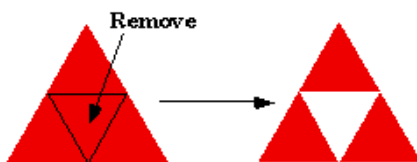


Fraktalna dimenzija

- vrijednost koja određuje u kolikoj mjeri fraktal ispunjava prostor u kojem se nalazi

npr. Kochova pahuljica

npr. trokut Sierpinskog - površina trokuta



$$P_{\Delta} = \frac{a \left(a \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

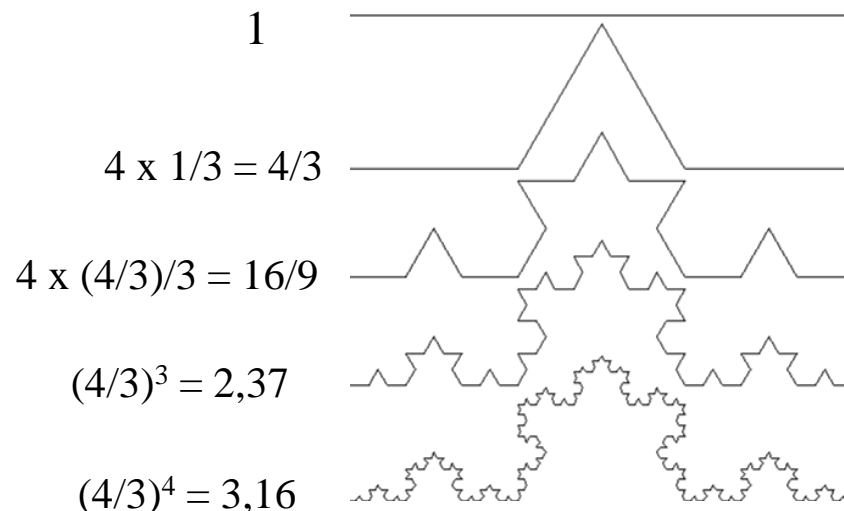
$$P_{\Delta}, \frac{3}{4} P_{\Delta}, \left(\frac{3}{4} \right)^2 P_{\Delta}, \left(\frac{3}{4} \right)^3 P_{\Delta} \dots \left(\frac{3}{4} \right)^n P_{\Delta}, \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$$

- opseg trokuta

$$O_{\Delta} = 3a$$

$$O_{\Delta}, \frac{3}{2} O_{\Delta}, \left(\frac{3}{2} \right)^2 O_{\Delta}, \left(\frac{3}{2} \right)^3 O_{\Delta} \dots \left(\frac{3}{2} \right)^n O_{\Delta}, \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \infty$$

aproksimacija duljine



duljina je beskonačna

Fraktalna dimenzija

$$D = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log N(h)}{\log(1/h)}$$

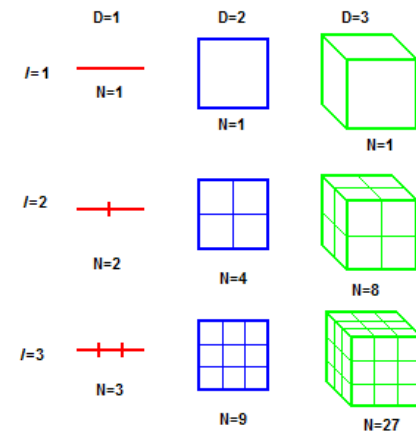
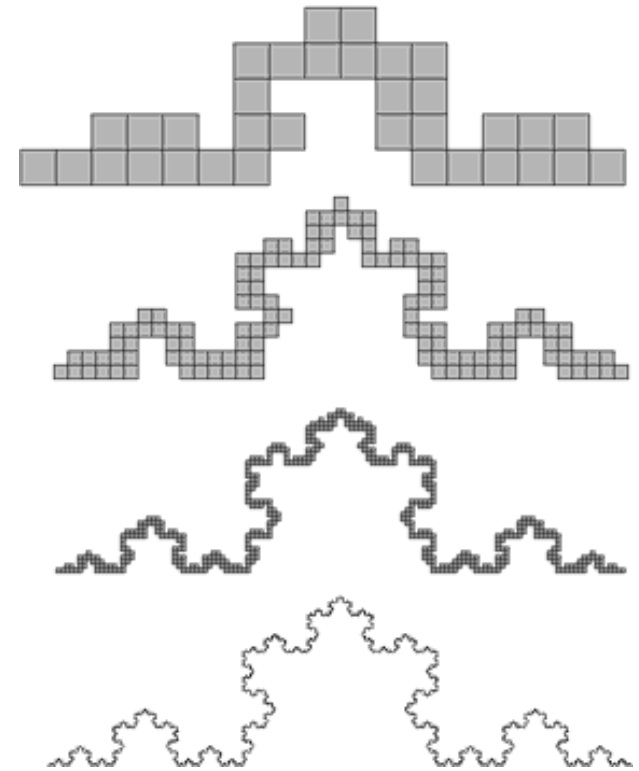
- $N(h)$ – broj kvadratića (linija) stranice h koji je potreban da prekrijemo lik
- h duljina stranice kvadratića
- h smanjujemo, $N(h)$ se povećava

Fraktalna dimenzija Kohove pahuljice:

$$\frac{\log 1}{\log 1}, \frac{\log 4}{\log 3}, \frac{\log 16}{\log 9}, \dots, \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26$$

- znači dimenzija je topološki između 1D i 2D – u kojoj mjeri “popunjava prostor”
- npr. pahuljica i linije morske obale imaju jednaku dimenziju
- fraktal je objekt čija je Hausdorffova dimenzija striktno veća od njegove topološke dimenzije

<http://polymer.bu.edu/java/java/coastline/coastlineapplet.html>



Generiranje prirodnih objekata

Razni primjeri:

Mandelbrot:

<https://www.taoeffect.com/other/fractals/mandelbulb/>

Fast Julia:

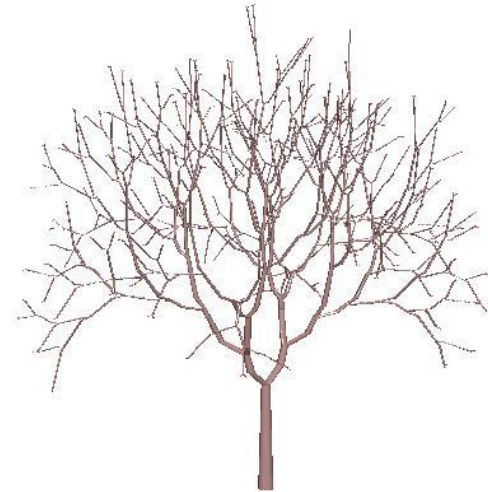
<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ed/Phoenix%28Julia%29.gif>

razno:

<https://chaos-project.github.io/>

predmet:

<http://www.cg.tuwien.ac.at/courses/Fraktale/VO.html>



..\..\..\Desktop\1 First sun ray 1080p.mp4

