5. MODELIRANJE NEIZVJESNOSTI U SUSTAVIMA TEMELJENIM NA ZNANJU
(engl. uncertainty management)

Inteligentno rješavanje problema podrazumijeva upravljanje i računanje s neizvjesnim podacima.

Neizvjesnost može biti uzrokovana sljedećim:
- podaci su nedostupni ili nedostaju,
- postoje podaci, ali su nejasni ili nepouzdani (npr. zbog pogreške mjerenja),
- predstavljanje podataka može biti neprecizno,
- podaci se možda temelje na vrijednostima koje se podrazumijevaju, a one imaju iznimke.

Sustavi temeljeni na znanju koji uvažavaju neizvjesnost trebaju kod implementacije oblikovati sljedeća rješenja:
1. kako predstaviti neprecizne podatke,
2. kako kombinirati neprecizne podatake,
3. kako izvoditi zaključke iz neizvjesnih podataka.

Četiri numerički orijentirana modela za oblikovanje neizvjesnosti:

1. **Bayesova shema**
2. **Faktori izvjesnosti**
3. **Dempster-Shaferova teorija**
4. **Neizraziti skupovi i neizrazita logika**

1. Bayesova shema

- najstarija tehnika za rješavanje neizvjesnosti
- temelji se na klasičnoj teoriji vjerojatnosti

Osnove

slučajni pokus $\rightarrow$ slučajan događaj x_i $\rightarrow$ elementarni / složeni

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ **prostor elementarnih događaja**.
Događaj je podskup od X.
$\mathcal{P}(X)$ – **prostor svih mogućih događaja** – partitivni skup od X.

X – je **siguran događaj**,
$\emptyset$ - **nemoguć događaj**
$\sim x_i$ - nije se dogodio x_i (**suprotan događaj**)
$x_i \wedge x_j$ dogodio se događaj x_i i x_j (**presjek**)
$x_i \vee x_j$ dogodio se događaj x_i ili x_j (**unija**)

Vrijede zakoni klasične teorije skupova (komutativnost, asocijativnost , DeMorganovi zakoni itd.) za operacije s događajima!

Ako je $x_i \wedge x_j = \emptyset$ - **događaji se isključuju**.

Definicija

Vjerojatnost p je funkcija $p : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$

(i) $0 \leq p(x_i) \leq 1$, za $\forall x_i \in X$, i vrijedi $p(X) = 1$,

(ii) Ako se $x_1, x_2, \ldots, x_k$ međusobno isključuju tada vrijedi $p(\cup_i x_i) = \Sigma_i\, p(x_i)$.

Iz definicije $\Rightarrow p(x_i) + p(\sim x_i) = 1$ (1)

Događaji x_1 i x_2 su **nezavisni** ako vrijedi

$$P(x_1 \wedge x_2) = P(x_1)P(x_2).$$

Uvjetna vjerojatnost

Neka su x i y događaji, tj. $x, y \subset X$.

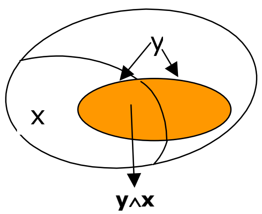
Pretpostavimo da znamo da se dogodio događaj **x**.

*Zanima nas koja je vjerojatnost događaja **y** ako se dogodio **x**?*

Ta se vjerojatnost naziva **uvjetna vjerojatnost** - **p(y|x)**.

Definicija:

Uvjetna vjerojatnost dana je sa $p(y|x) = \dfrac{p(x \wedge y)}{p(x)}$. (2)



X – prostor el. događaja

Napomena: Ako su dva događaja x i y nezavisna, tada vrijedi $p(x|y) = p(x)$ i $p(y|x) = p(y)$.

Prema definiciji, obrat, tj. vjerojatnost događaja x uz uvjet da se dogodio y je $p(x|y) = \dfrac{p(y \wedge x)}{p(y)}$. (3)

Iz (3) $\Rightarrow p(y \wedge x) = p(x|y)p(y)$ (4)

Zbog komutativnosti $p(x \wedge y) = p(x|y)p(y)$. (5)

Uvrstimo (5) u (2) $\Rightarrow$ $p(y|x) = \dfrac{p(x \mid y)p(y)}{p(x)}$. (6)

(6) je najjednostavniji oblik Bayesovog pravila.

Nazivnik pravila:

$p(x) = p(x \wedge X) = p(x \wedge (y \vee \sim y)) = p((x \wedge y) \vee (x \wedge \sim y))$ = prema (ii) iz definicije vjerojatnosti, $(x \wedge y) \cap (x \wedge \sim y) = \emptyset \Rightarrow$

$p(x) = p(x \wedge y) + (x \wedge \sim y)$

Svaki od članova se na temelju definicije uvjetne vj. može pisati:

$p(x \wedge y) = p(x|y)p(y)$,

$p(x \wedge \sim y) = p(x|\sim y)p(\sim y)$.

Sada se nazivnik pravila p(x) piše:

$p(x) = p(x|y)p(y) + p(x|\sim y)p(\sim y)$, (7)

odnosno Bayesovo pravilo ima oblik

$$\boxed{p(y|x) = \frac{p(x \mid y)p(y)}{p(x \mid y)p(y) + p(x \mid \sim y)p(\sim y)}.} \quad (8)$$

Bayesova shema u produkcijskim sustavima

AKO X je istina
TADA zaključak Y sa vjerojatnošću p.

Primjer:

AKO je pacijent prehlađen
TADA će pacijent imati hunjavicu s vjerojatnošću 0.75

Ako je istinito Y (pacijent ima hunjavicu) što možemo zaključiti abdukcijom o X (pacijent je prehlađen)?

Bayesovim pravilom možemo zaključiti o vjerojatnosti X-a!

Interpretacija gornjeg AKO-TADA pravila uz formulu (6):

- Y iz pravila (y u formuli) označava jedan **dokaz** ili činjenicu (engl. *evidence*) $\rightarrow$ E,
- X iz pravila (x u formuli) označava pretpostavku ili **hipotezu** (engl. *hypothesis*) $\rightarrow$ H.

$$p(H|E) = \frac{p(E\,|\,H)p(H)}{p(E)}. \qquad (9)$$

$$p(H|E) = \frac{p(E\,|\,H)p(H)}{p(E\,|\,H)p(H) + p(E\,|\sim H)p(\sim H)}. \qquad (10)$$

Primjer:

Da li Ivan ima prehladu (hipoteza) ako ima hunjavicu (činjenica)?

Iz (10) $\Rightarrow$ Vjerojatnost da Ivan ima prehladu uz činjenicu da ima hunjavicu jednaka je omjeru vjerojatnosti da ima oboje (i hunjavicu i prehladu) i vjerojatnosti da ima hunjavicu.

Nazivnik – vjerojatnost da ima hunjavicu jednaka je sumi umnoška uvjetnih vjerojatnosti da ima hunjavicu kada ima prehladu puta vjerojatnost prehlade i vjerojatnost hunjavice kada nema prehladu puta vjerojatnost da nema prehladu – tj. ukratko - vjerojatnost da Ivan ima hunjavicu bez obzira da li ima ili nema prehladu.

Pretpostavimo da znamo:

p(H) = p(Ivan ima prehladu) = 0.2 $\Rightarrow$ p(~H) = 0.8
p(E|H) = p(Ivan ima hunjavicu | Ivan ima prehladu) = 0.75
p(E|~H) = p(Ivan ima hunjavicu | Ivan nema prehladu) = 0.2

Tada:

p(E) = p(Ivan ima hunjavicu) = (0.75)(0.2) + (0.2)(0.8) = 0.31

(10) Bayesovo pravilo $\Rightarrow$ p(H|E) = p(Ivan ima prehladu| ako je očito da Ivan ima hunjavicu) = $\frac{0.75 \cdot 0.2}{0.31} = 0.48387$

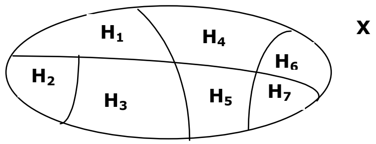
Pomoću (10) također možemo odrediti vjerojatnost *hipoteze Ivan ima prehladu* uz činjenicu da *Ivan nema hunjavicu:*

$$p(H|\sim E) = \frac{p(\sim E\,|\,H)p(H)}{p(\sim E)} = \frac{(1-0.75)(0.2)}{(1-0.31)} = 0.07246$$

Usporedbom p(H|E) i P(H) **zaključujemo:**
Činjenica da Ivan ima hunjavicu povećava vjerojatnost da ima prehladu za približno dva i pol puta.

Usporedbom p(H|~E) i P(H) **zaključujemo:**
Činjenica da Ivan nema hunjavicu smanjuje vjerojatnost da ima prehladu za približno 2.8 puta.

Poopćenje Bayesove formule na *m* hipoteza $H_1, H_2, \ldots, H_m$, gdje su $H_1, H_2, \ldots, H_m$ međusobno isključive, tj. $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ i unija $H_1, H_2, \ldots, H_m$ je cijeli prostor X tj. $\cup H_i = X$.



(H_i sa takvim svojstvom naziva se potpun sistem događaja)

$$p(H_i | E) = \frac{p(E|H_i)\,p(H_i)}{p(E)} = \frac{p(E|H_i)\;p(H_i)}{\sum_{k=1}^{m} p(E|H_k)p(H_k)},\ i=1,\ldots m. \qquad (10a)$$

Poopćenje Bayesove formule na *m* hipoteza $H_1, H_2, \ldots, H_m$ i *n* činjenica (dokaza) $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

$$p(H_i | E_1 E_2 \ldots E_n) = \frac{p(E_1 E_2 \ldots E_n | H_i)\,p(H_i)}{p(E_1 E_2 \ldots E_n)} =$$

$$= \frac{p(E_1|H_i)\,p(E_2|H_i) \ldots\ldots\ldots p(E_n|H_i)\,p(H_i)}{\sum_{k=1}^{m} p(E_1|H_k)p(E2|H_k)\ldots\ldots p(E_n|H_k)p(H_k)} \qquad (11)$$

Važna napomena:

Bayesova formula (11) izvedena je uz pretpostavku da su činjenice E_i međusobno nezavisne ako je dana neka hipoteza. To ograničenje može ograničiti uporabu Bayesove sheme u primjeni. Općenito dva su događaja nezavisna ako vrijedi $p(A \cap B)=p(A)\,p(B)$.

Primjer: Dva simptoma A i B mogu oba ukazivati na jednu bolest s nekom vjerojatnošću p. Međutim, ako su oba zajedno prisutna, onda se može desiti da pojačavaju jedan drugoga (ili su međusobno u suprotnosti).

Primjer:
H_1 Ivan ima prehladu
H_2 Ivan ima alergiju
H_3 Ivan je osjetljiv na svjetlo
} Tri međusobno isključive hipoteze

E_1 činjenica je da Ivan ima hunjavicu
E_1 činjenica je da Ivan kašlje
} dokazi/ činjenice

	Vjerojatnosti a priori i uvjetne vjerojatnosti		
	i = 1 (prehlada)	*i=2 (alergija)*	*i=3 (osjetljivost na svjetlo)*
$p(H_i)$	*0.6*	*0.3*	*0.1*
$p(E_1 \| H_i)$	*0.3*	*0.8*	*0.3*
$p(E_2 \| H_i)$	*0.6*	*0.9*	*0.0*

Ako je uočeno da pacijent ima hunjavicu, možemo izračunati ***a posteriori vjerojatnosti*** *za hipoteze H_i, i=1,3 uporabom (10a).*

$$p(H_1 | E_1) = \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.3 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.1} = 0.4$$

$$p(H_2 | E_1) = \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.3 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.1} = 0.53$$

$$p(H_3 | E_1) = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.3 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.1} = 0.06$$

Uoči da se vjerovanje u hipoteze H_1 i H_3 smanjilo dok se vjerovanje u hipotezu H_2 povećalo u prisustvu dokaza E_1.

Ako je sada još primjećeno da pacijent i kašlje tada (n=2, i formula (11)

$$p(H_1 | E_1 E_2) = \frac{0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6}{0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.0 \cdot 0.1} = 0.33$$

$$p(H_2 | E_1 E_2) = \frac{0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3}{0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.0 \cdot 0.1} = 0.67$$

$$p(H_3 | E_1 E_2) = \frac{0.3 \cdot 0.0 \cdot 0.1}{0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.0 \cdot 0.1} = 0.00$$

Hipoteza H_3 (osjetljivost na svjetlo) isključena je dok je H_2 puno vjerojatnija od H_1.

Prednosti i nedostaci Bayesove sheme.

<u>Prednosti:</u>

- vrlo je dobro teoretski utemeljena,
- najrazvijenija je od svih metoda za upravljanje i rješavanje neizvjesnosti.

<u>Nedostaci:</u>

- potrebna je velika količina podataka o vjerojatnosti da bi se izgradila baza znanja. Sve vjerojatnosti trebaju biti zadane.

Primjer: za sustav sa p=50 mogućih hioteza (pretpostavki) i q=300 mogućih svojstava (činjenica) koja mogu biti evidentirana treba zadati p*q+p=300*50+50 = 15 050 vjerojatnosti uz pretpostavke da se zaključci (hipoteze) međusobno isključuju i da su činjenice uvjetno nezavisne za sve zaključke.

- potrebno je unaprijed odrediti a priori vjerojatnosti i uvjetne vjerojatnosti
(statistički? – potrebna velika količina empiričkih podataka, expert? – nepouzdanost kvalitativnih vrijednosti vjerojatnosti)
- za ekspertni sustav temeljen na Bayesovoj shemi teško je izraditi sustav za objašnjavanje izvedenih zaključaka

Primer primjene Bayesove sheme

ekspertni sustav PROSPECTOR razvijen na Stanford University (Duda et al., 1979) za otkrivanje nalazišta rudača na temelju zemljopisnih karakteristika.

Faktori izvjesnosti (engl. ***C****ertainty* ***F****actors*, CF)

Tijekom razvoja MYCIN-a (Shortliffe, 1979) Bayesova shema pokazala se neadekvatna zbog gore navednih razloga

Liječnici skupljaju dokaze da bi opovrgli ili poduprli neku hipotezu – drugačija tehnika od Bayesove sheme!

Zbog toga razvijen formalizam faktora izvjesnosti (engl. *certainty factor*) CF.

Znanje u ekspertnom sustavu koji koristi faktore izvjesnosti (CF) oblikovano je pravilima tipa:

AKO činjenica

ONDA hipoteza (CF)

CF = vjerovanje u hipotezu uz uvjet da je prisutna činjenica

CF spada u tz. **AD HOC metode** oblikovanja neizvjesnosti koje <u>nemaju formalnu teoretsku osnovu</u>.

Napomena

Uoči da u formalizmu CF-a nije uvedena neka mjera (vjerojatnost ili izvjesnost) neistinitosti hipoteze ako činjenica nije prisutna kao što je to s Bayesovom shemom!

Pri pokušaju formaliziranja CF uvedene su tri različite vrijednosti koje su definirane u terminima pretpostavljenih matematičkih relacija [Clark, 1990].

1. **Mjera vjerovanja** (engl. *measure of belief*) MB[h, e], $0 \leq MB[h, e] \leq 1$, predstavlja stupanj u kojoj je mjeri vjerovanje u hipotezu h poduprto činjenicom e.

$$MB[h, e] = \begin{cases} 1 & \text{ako je } p(h) = 1, \\ \dfrac{p[h \mid e] - p[h]}{1 - p[h]}, & \text{inače.} \end{cases}$$

2. **Mjera sumnje** (engl. *measure of disbelief*). MD[h, e], $0 \leq MD[h, e] \leq 1$, predstavlja stupanj u kojoj je mjeri vjerovanje u nevaljanost hipoteze h poduprto činjenicom e.

$$MD[h, e] = \begin{cases} 1 & \text{ako je } p(h) = 0, \\ \dfrac{p[h] - p[h \mid e]}{p[h]}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Svojstva: Suma MB i MD nije 1! Dvije mjere ograničavaju jedna drugu na način da ako je dana činjenica E tada ona ide u prilog hipotezi ili je protiv nje.

$0 < MB[h, e] < 1$ dok je $MD[h, e] = 0$, ili

$0 < MD[h, e] < 1$ dok je $MB[h, e] = 0$.

Ovo je glavna razlika od teorije vjerojatnosti.

Ove se dvije mjere kombiniraju u faktor izvjesnosti

3. **Faktor izvjesnosti**, **CF**, čija se vrijednost kreće u granicama:
   -1 (h je opovrgnuta) i 1 (h je potvrđena)

$$CF = \frac{MB - MD}{1 - \min(MB, MD)}$$

Vrijednost CF oko 0 znači ima malo dokaza za i protiv hipoteze. CF = 0 znači da su E i H nezavisni, tj. E niti podupire niti opovrgava hipotezu H (MB=MD=0).

Računanje faktora izvjesnosti

Za vrijeme izvođenja baze znanja različita pravila mogu izvesti isti zaključak. Kako izvesti jedinstvenu vrijednost CF-a?

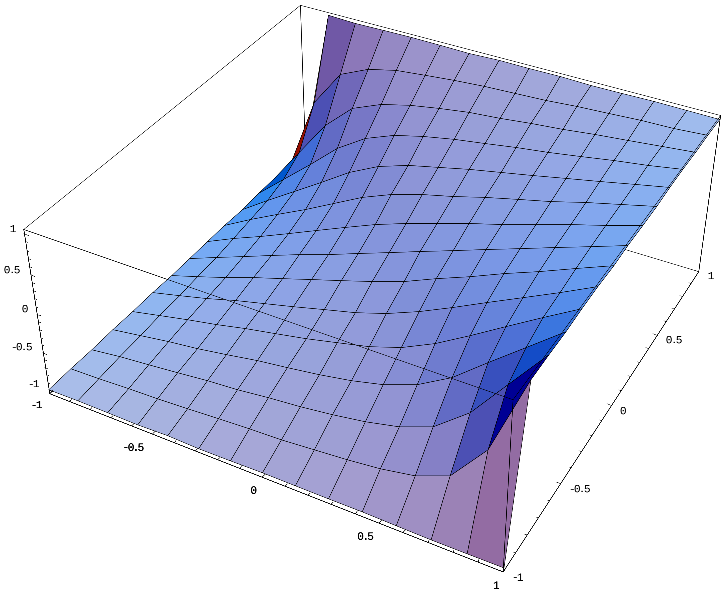
Neka je hipoteza h_1 izvedena prethodno sa CF_{stari}, a naknadno sa novim CF_{novi}.

(15)

$$CF_{obnovljen}(CF_{stari}, CF_{novi}) = \begin{cases} CF_{stari} + CF_{novi}(1 - CF_{stari}) \text{ za} & CF_{stari}, CF_{novi} > 0; \\ -CF_{obnovljen}(-CF_{stari}, -CF_{novi}), \text{ za} & CF_{stari}, CF_{novi} < 0; \\ \dfrac{CF_{stari} + CF_{novi}}{1 - \min(|CF_{stari}|, |CF_{novi}|)}, \text{ ako je jedan od} & CF_{stari}, CF_{novi} < 0. \end{cases}$$

```
h[s_, n_]:= Which[
s > 0 && n > 0, s+n(1-s),
s < 0 && n < 0, -(-s-n(s+1)),
s < 0 && n > 0, (s + n)/(1 - Min[Abs[s], Abs[n]]),
s > 0 && n < 0, (s + n)/(1 - Min[Abs[s], Abs[n]]),
s = 0 && n = 0, 0 ]
```

```
Plot3D[h[s, n],{s, -1, },{n, -1, 1},Axes -> True]
```



Zaključivanje s neizvjesnim činjenicama

Prethodna pravila izvedena su uz pretpostavku da su premise apsolutno pouzdane. Tipično u BZ je da su zaključci jednog pravila premise nekog drugog pravila.

Neka su prethodno A, B, C, D, E, F i G izvedeni s redom CF_A, CF_B, CF_C, CF_D, CF_E, CF_F, CF_G.

RULE001 **AKO** A
ONDA Q (CF=0.75)

$CF_Q = CF_A * CF_{pravila}$

RULE002 **AKO** B **I**
C **I**
D **I**
ONDA Q (CF=0.7)

$CF_Q = \min(CF_B, CF_C, CF_D) * CF_{pravila}$

RULE003 **AKO** E **ILI**
F **ILI**
G **ILI**
ONDA Q (CF=0.7)

$CF_Q = \max(CF_E, CF_F, CF_G) * CF_{pravila}$

Primjer

AKO (P1 **I** P2) **ILI** P3 **ONDA** R1 (CF=0.7) I R2 (CF=0.3)

Tijekom izvođenja baze znanja izvedeni su P1, P2 i P3 sa CF redom 0.6, 0.4, 0.2.

$CF_{premisa} = MAX(MIN(CF_{P1}, CF_{P2}), CF_{P3})$

$= MAX(MIN(0.6, 0.4), 0.2)$

$= 0.4$

$CF_{R1} = 0.4\ 0.7 = 0.28$

$CF_{R2} = 0.4\ 0.3 = 0.12$

Primjer sudskog procesa [Park, 1988] u kojem se osumnjičeni tereti za ubojstvo prvog stupnja (hipoteza)

Porota mora odvagati dokaze (činjenice) predstavljene od tužitelja i branitelja i odlučiti o krivnji.

Početak procesa. Hipoteza i početni CF:

Osumnjičeni je kriv
CF = 0

Tužitelj

RULE001 **AKO** su nađeni otisci prstiju osumnjičenog na oružju s kojim je počinjen zločin
ONDA osumnjičeni je kriv
(**$CF_{pravila1}$=0.75**)

Dokaz o podudaranju otisaka prstiju predočio je uvaženi stručnjak ⇒
$CF_{dokaza1}$ = 0.90

$CF_{zajedno}$= $CF_{dokaza1}$ * $CF_{pravila1}$= 0.90 * 0.75 =0.675

(15) ⇒ **$CF_{obnovljen}$** = CF_{stari} + CF_{novi}(1 - CF_{stari}) =
0.0 + 0.675(1 – 0)= **0.675**

RULE002 **AKO** je osumnjičeni imao motiv
ONDA osumnjičeni je kriv
(**$CF_{pravila2}$ = 0.60**)

Svjedočenje o motivu je neuvjerljivo ⇒
$CF_{dokaza2}$ = 0.50

$CF_{zajedno}$= $CF_{dokaza2}$ * $CF_{pravila2}$= 0.60 *0.50 = 0.30

(15) ⇒ **$CF_{obnovljen}$** = CF_{stari} + CF_{novi}(1 - CF_{stari}) =
0.675 + 0.30 * (1 – 0.675) =
0.7725

Obrana

RULE003 **AKO** osumnjičeni ima alibi
ONDA osumnjičeni nije kriv
(**$CF_{pravila3}$ = -0.80**)

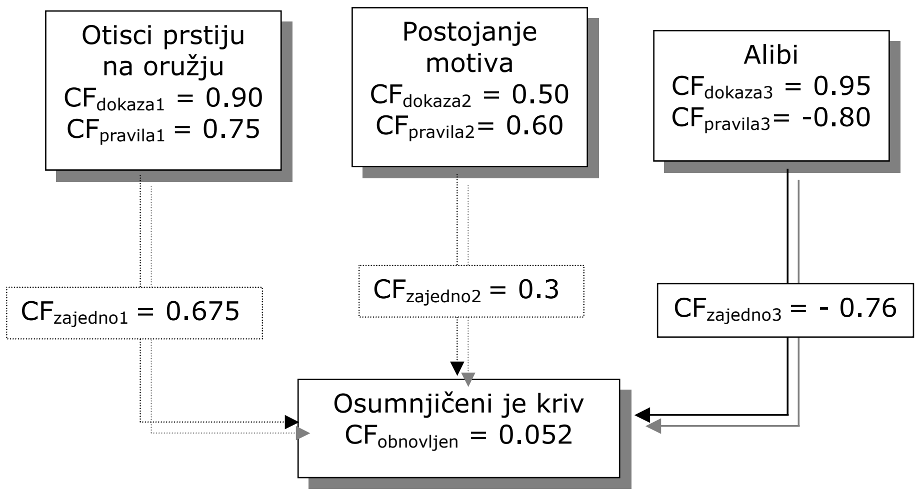
Svjedočenje o alibiju je vrlo uvjerljivo ⇒
$CF_{dokaza3}$ = 0.95

negativna vrijednost CF pravila 3 jer se njime smanjuje vjerovanje u hipotezu

$CF_{zajedno}$= $CF_{dokaza3}$ * $CF_{pravila3}$= 0.95 *-0.80 = -0.76

(15) ⇒ **$CF_{obnovljen}$** $= \frac{CF_{stari} + CF_{novi}}{1 - \min(|CF_{stari}|, |CF_{novi}|)} = \frac{0.7725 - 0.76}{1 - 0.76} = 0.052$

Shema zaključivanja s faktorima izvjesnosti:



Prednosti CF:

1. jednostavan model, omogućava ekspertu procjenu pouzdanosti zaključka,
2. omogućava izražavanje vjerovanja (MB) i sumnje (MD) u svaku hipotezu – time dozvoljava uvažavanje različitih izvora dokaza za svaku hipotezu,
3. omogućava da je znanje oblikovano pravilom, i ujedno dozvoljava kvantificiranje neizvjesnosti,
4. Određivanje CF jednostavnije nego određivanje vjerojatnosti za Bayesovu shemu. Nema statističku osnovu – oblikuje se na temelju znanja eksperta.

Primjer primjene CF je ekspertni sustav MYCIN. Međutim pokusi su pokazali da je efikasnost MYCINA prvenstveno vezana za znanje o pravilima.

Nedostaci:

- nezavisni dokazi mogu biti kombinirani samo unutar istog pravila,
- formalno-matematička neutemeljenost.

Općenito vrijedi da male varijabilnosti u određivanjima vrijednosti CF ne utječu bitno na svojstva sustava – snaga sustava prvenstveno je u znanju pohranjenom u pravilima!

3. Dempster-Shaferova teorija dokaza

Problemi s klasičnom teorijom vjerojatnosti:

1. Vjerojatnost je samo jedan broj – možda bi bilo pogodnije izraziti vjerojatnost s donjom i gornjom granicom.
2. Klasična teorija vjerojatnosti <u>ne razlikuje neznanje i neizvjesnost.</u>
3. U klasičnoj teoriji vjerovanje i sumnju u neku tvrdnju moramo gledati kao funkcionalnu zavisnost jer je $p(A)+p(\sim A)=1$.

Primjer za 2:

Tri osobe A, B, C mogu biti izvršitelji jednog nedjela.

Ako postoje dokazi na temelju kojih se može zaključiti da je $p(A) = 0.8$, a nikakvi za osobe B i C – u klasičnoj teoriji vjerojatnosti moramo 0.2 razdijeliti između osoba B i C tj. staviti $p(B)=p(C)=0.1$.

Rezultat je isti kao i kada imamo dokaze, podjednako jake za osobe B i C, pa zaključujemo da je $p(B)=p(C)=0.1$.

Međutim, u jednom slučaju ne znamo ništa o B i C i ipak im pridjeljujemo $p(B) =p(C) = 0.1$ dok u drugom slučaju imamo dokaze koje govore u prilog tim vjerojatnostima.

Ova je ograničenja pokušala riješiti **Dempster–Shaferova teorija** (razvijena tijekom 1960-tih i 1970-tih godina).

Naziv za D-S teoriju je još i **MATEMATIČKA TEORIJA DOKAZA** (engl. *Mathematical theory of evidence*) – zato jer se vrijednost između 0 i 1 pridjeljuje mogućim zaključcima kao stupanj potpore koju taj zaključak ima na temelju prikupljenih dokaza.

- D-S teorija preciznije modelira postupak prikupljanja dokaza dozvoljavajući da vrijednosti mjere pouzdanosti budu pridjeljene skupovima činjenica kao i individualnim činjenicama.
- Podsjeća na Bayesov model, ali je općenitiji jer mjera vjerovanja ili pouzdanosti (*engl. belief*) u činjenicu i njezinu negaciju ne mora biti 1.
  Moguće je da su obje vrijednosti mjere pouzdanosti 0 time izražavajući potpuno neznanje tj. potpunu odsutnost dokaza ili informacija koje idu u prilog činjenici A ili njezinoj negaciji A^C.

> Ideja je da je pojedine vrijednosti *mase vjerojatnosti* moguće dodijeliti **SVIM podskupovima univerzalnog skupa** X (tj. elementima partitivnog skupa od X), a ne samo nedjeljivim elementarnim događajima, elementima od X, kao u teoriji vjerojatnosti.

U takvom je slučaju moguće $P(A) + P(\sim A) \leq 1$.

Definicije osnovnih pojmova Dempster-Shaferove teorije

Neka je dan skup Θ, skup svih mogućih zaključaka koji mogu biti izvedeni

$$\Theta = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}.$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ međusobno su isključivi i pokrivaju sve mogućnosti.

1. **Okvir za rasuđivanje** (engl. *"Frame of discernment"*) je partitivni skup od Θ - tj. skup svih mogućih zaključaka.

   $\wp(\Theta) = \{\emptyset,\{q_1\},\{q_2\},\{q_3\},\ldots, \{q_n\}, \{q_1,q_2\}, \{q_2,q_3\}, \ldots, \{q_1,q_2,q_3\},\ldots,\{q_1,q_2,q_3,q_4\},\ldots ,\{ q_1,q_2,\ldots ,q_n\}\}$

2. **Funkcija mase vjerojatnosti** ili **osnovno vjerojatnosno pridruženje *m*** *(*engl. *mass probability function, basic probability assignment)* je funkcija koja svakom elementu iz okvira za rasuđivanje pridružuje broj iz [0, 1].

   m: $\wp(\Theta)\rightarrow [0,1]$ koja ima svojstva:

   $$m(\emptyset) = 0 \quad i \quad \sum_{A\in P(\Theta)} m(A)= 1.$$

   suma svih *masa vjerojatnosti* je 1

3. Ako je A neki mogući zaključak, tj. $A \in \wp(\Theta)$ (npr. $A = \{q_1,q_2,q_3\}$), tada je **m(A)** onaj dio ukupne mase vjerojatnosti (=1) koji je pridjeljen ***nedjeljivo i isključivo*** *A*.

   <u>m(A) ne može biti dijeljen dalje na podskupove od A, niti uključuje vrijednosti mase pridjeljene podskupovima od A!</u>

4. **Mjera pouzdanosti zaključka A**, označava se s *Bel*(A), (engl. *belief*) je suma vjerojatnosnih masa, pridjeljenih svim podskupovima od A.

Bel(A) izražava ukupnost dokaza za zaključak A, tj. pouzdanost zaključaka A ili bilo kojeg njegovog podskupa.

Mjera pouzdanosti $\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$.

Vrijedi da je $\boldsymbol{Bel(A) + Bel(A^C) \le 1}$.

Primjer:

$A = \{q_1, q_2, q_3\}$,

$Bel(A) = Bel(\{q_1, q_2, q_3\})$

$= m(\{q_1\}) + m(\{q_2\}) + m(\{q_3\}) +$

$+ m(\{q_1,q_2\}) + m(\{q_2,q_3\}) + m(\{q_2,q_3\}) +$

$+ m(\{q_1,q_2,q_3\})$

Primijetimo da je $Bel(\Theta) = 1$ jer je sigurno jedan zaključak istinit.

Napomena.

Funkcija m nije mjera, ona nam služi da definiramo mjeru.

Matematički, mjera je funkcija g koja je definirana na nekoj familiji podskupova od X, koja ima svojstva da je $g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$ (rubni uvjeti) te je uz to još neprekidna i monotona.

Vjerojatnost ima svojstva mjere i gore definirana mjera pouzdanosti (Bel) također.

Primjer: Mjera vjerojatnosti ne može razlikovati ova tri slučaja

1. Imamo dokaze za hipotezu A, takve da pridružujemo m({A})=0.8. Za sve druge hipoteze nemamo nikakve dokaze pa to neznanje izražavamo pridruživanjem mase vjerojatnosti hipotezi {A,B,C}, tj. m({A,B,C}) = 0.2.

hipoteza	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
m_{inic}(A)	0.8	0	0	0	0	0	0.2
Bel(A)	0.8	0	0	0.8	0.8	0	1

2. Imamo dokaze za hipotezu A, i dokaze za hipotezu {B, C}. Dokazi za hipotezu {B, C} su nerazlučivi na podhipoteze B i C!

hipoteza	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
m_{inic}(A)	0.8	0	0	0	0	0.2	0
Bel(A)	0.8	0	0	0.8	0.8	0.2	1

3. Imamo dokaze za hipotezu A tako da naše uvjerenje u nju izražavamo sa m({A})=0.8. Također imamo dokaze za hipotezu {B} te to svoje uvjerenje izražavamo sa m({B}) = 0.1 i još imamo neke druge dokaze za hipotezu {C} i to izražavamo sa m({C}) = 0.1.

hipoteza	{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
m_{inic}(A)	0.8	0.1	0.1	0	0	0	0
Bel(A)	0.8	0.1	0.1	0.9	0.9	0.2	1

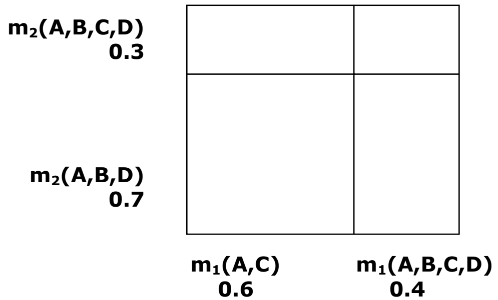
ovo je skup elementarnih
događaja X u teoriji vjerojatnosti

Treći slučaj je slučaj kada je mjera pouzdanosti *Bel* zapravo mjera vjerojatnosti. Uoči da je samo u 3. slučaju Σm za elementarne događaje (hipoteze) jednaka 1 dok je u sva tri slučaja Σm po svim mogućim podskupovima (hipotezama) jednaka 1. To je općenitiji zahtjev i u definiciji je funkcije mase vjerojatnosti.

Primjer:

hipoteza	{A}	{B}	{C}	{D}	{A,C}	...	{A,B,D}	...	{A,B,C,D}
m_1(A)	0	0	0	0	0.6		0		0.4
Bel(A)	0	0	0	0	0.6		0		1

m_2(A)	0	0	0	0	0		0.7		0.3
Bel(A)	0	0	0	0	0		0.7		1



Kombiniranje m_1 i m_2 daje novu masu vjerojatnosti m_3:

$m_3(\{A\}) = 0.6\ 0.7 / 1 = 0.42$

$m_3(\{A, C\}) = 0.6\ 0.3 / 1 = 0.18$

$m_3(\{A, B, D\}) = 0.4\ 0.7 / 1 = 0.28$

$m_3(\{A, B, C, D\}) = 0.4\ 0.3 / 1 = 0.12$

$m_3 = 0$ za sve druge podskupove tj. hipoteze.

$$Bel(\{A, C\}) = m_3(\{A\}) + m_3(\{C\}) + m_3(\{A, C\}) = \\ = 0.42 + 0 + 0.18 = 0.6.$$

Definira se **mjera prihvatljivosti Pl(A)** (engl. *plausibility*) sa

$$\boxed{Pl(A) = 1 - Bel(A^C).}$$

Vrijedi da je Bel(A) ≤ Pl(A).

Izvjesnost povezana s mogućim zaključkom A definirana je **intervalom povjerenja**

$$\boxed{[Bel(A), Pl(A)],}$$

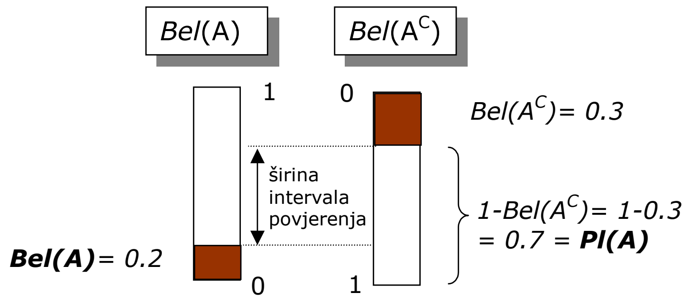
Širina intervala povjerenja *Pl*(A) - *Bel*(A) jednaka je

$= 1 - Bel(A^C) - Bel(A) = 1 - (Bel(A^C) + Bel(A))$ i interpretira se kao stupanj neznanja ili nedostatak dokaza koji idu u prilog bilo činjenici A bilo njezinoj negaciji A^C.

Primjer:

$Bel(A) = 0.2$, $Bel(A^C) = 0.3 \Rightarrow Pl(A) = 0.7$

Širina intervala povjerenja $Pl(A) - Bel(A) = 0.7 - 0.2 = 0.5$



Primjer:

Ako je Bel(A)= 0.0 i Bel(A^C)= 0.0 $\Rightarrow$ Pl(A)= 1.

Širina intervala povjerenja je 1!

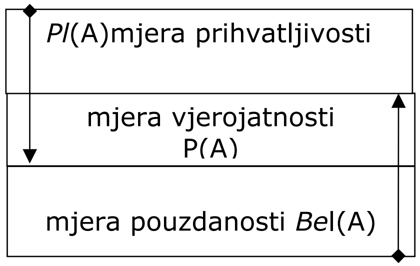
Tada interval povjerenja [0, 1] odražava stanje u kojem nema raspoloživog dokaza (informacije) koje idu u prilog bilo A bilo A^C.

Pl(A) i *Bel*(A) nazivaju se još:
gornja i donja vjerojatnosna mjera.

Pl(A) + *Pl*(A^C) $\geq$ 1

P(A) + *P*(A^C) = 1

Bel(A) + *Bel*(A^C) $\leq$ 1



Važna napomena:

Kada je širina intervala povjerenja = 0 tj. kada je *Pl*(A) - *Bel*(A) = 0, tada je *Pl*(A) = *Bel*(A) i vrijedi *Bel*(A) + *Bel*(A^C) = 1, odnosno *Pl*(A) + *Pl*(A^C) = 1 tj. govorimo o **vjerojatnosnoj mjeri.**

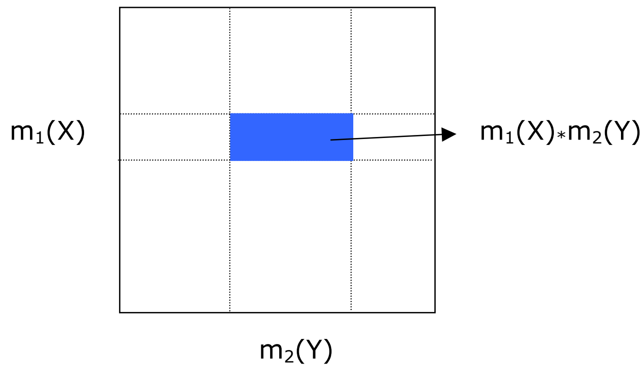
5. Ako su dane dvije mase vjerojatnosti:

   m_1 – predstavlja prethodno stanje povezano s hipotezom X

   m_2 – predstavlja nove dokaze povezane s hipotezom Y

   možemo ih kombinirati u masu vjerojatnosti m_3 koja će predstavljati stanje izvjesnosti povezano s presjekom hipoteza X i Y koristeći Dempster-ovo pravilo

$$m_3(C) = \frac{\sum_{X \cap Y = C} m_1(X) \cdot m_2(Y)}{1 - \sum_{X \cap Y = \phi} m_1(X) \cdot m_2(Y)}$$



Primjer [Spillman, 1990]:

Bob, Jim, Sally i Karen zaključani su u sobi. Odjednom nestane svjetla. Kada se svjetlo vratilo, ustanovljeno je da je Karen ubijena. Želimo ustanoviti *tko je kriv za zločin?*

Primjer zaključivanja u okvirima D-S teorije.

Skup svih međusobno isključivih zaključaka.

Θ = {B (Bob je kriv), J (Jim je kriv), S (Sally je kriva)}

1. Naše rasuđivanje o tome tko je kriv za zločin definirano je **okvirom za rasuđivanje**

   $\wp(\Theta) = \{\emptyset, \{B\}, \{J\}, \{S\}, \{B,J\}, \{B,S\}, \{J,S\}, \{B,J,S\}\}$

   Elementima $\wp(\Theta)$ pridjeljujemo broj između 0 i 1 ("masu vjerojatnosti") koja predstavlja naše uvjerenje (na temelju dokaza) u svaki od tih mogućih zaključaka. To uvjerenje nedjeljivo je na podskupove i usmjereno je isključivo na taj element, tj. zaključak.

   Razmatrajući početni skup dokaza (položaj tijela, položaj osumnjičenih,..) detektiv pridjeljuje "mase vjerojatnosti" elementima okvira za rasuđivanje.

Simbol	Događaj - zaključak	"Masa vjerojatnosti" ***m***
ϕ	nitko nije kriv	0
{B}	Bob je kriv	0.1
{J}	Jim je kriv	0.2
{S}	Sally je kriva	0.1
{B,J}	Ili Bob ili Jim je kriv	0.1
{B,S}	Ili Bob ili Sally je kriv	0.1
{J,S}	Ili Sally ili Jim je kriv	0.3
{B,J,S}	Jedan od trojice je kriv	0.1

Na temelju danih inicijalnih vrijednosti funkcije $\boldsymbol{m_{inic}}$ računamo mjeru pouzdanosti u svaki pojedini mogući zaključak (element $\wp(\Theta)$).

Na primjer, Bel({B,J}) = m({B}) + m({J}) + m({B,J})

= 0.1 + 0.2 + 0.1

= 0.4

Na taj način računa se vrijednost mjere *Bel* za sve ostale podskupove (zaključke).

A	{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
Bel(A)	0.1	0.2	0.1	0.4	0.3	0.6	1
M_{inic}(A)	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1

Zapažanje:

Zaključci u kojima je uključena Jimova krivnja imaju veće vrijednosti mjere pouzdanosti. To još nije dovoljno za kvalitetan zaključak jer

$[Bel(J), Pl(J)] = [Bel(J), 1 - Bel(J^C)] =$

$= [0.2, 1 - (m(\{B\}) + m(\{S\}) + m(\{B,S\})]$

$= [0.2, 0.7]$

širina intervala 0.5 odražava izostanak dokaza u Jimovu krivnju

Pretpostavimo da je naknadno detektiv dobio uvid u oporuku koju je Karen ostavila te da je nakon toga naše vjerovanje u moguće zaključke, tj. raspodjela "mase vjerojatnosti", dana tablicom:

A	{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
Bel(A)	0.2	0.1	0.05	0.6	0.3	0.25	1.0
M_{opor}(A)	0.2	0.1	0.05	0.3	0.05	0.1	0.2

Sada koristimo formulu pod točkom 6. za izvođenje novih kombiniranih vrijednosti "mase vjerojatnosti" zbog uvođenja novih dokaza.

Razumjevanje formule grafički.

Svaka od funkcija $m_{inic}(A)$ i $m_{opor}(A)$ dijele interval [0, 1] na dijelove.

m_{inic}

{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.3	0.1

0 1

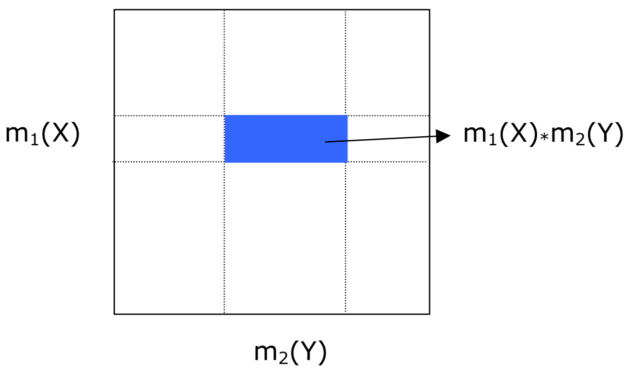
m_{opor}

{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
0.2	0.1	0.05	0.3	0.05	0.1	0.2

0 1

Računamo po formuli $m_{zajedno}(C) = \dfrac{\sum_{X \cap Y = C} m_{inic}(X) \cdot m_{opor}(Y)}{1 - \sum_{X \cap Y = \phi} m_{inic}(X) \cdot m_{opor}(Y)}.$

Ti se podijeljeni intervali stavljaju okomito.



Na primjer za zaključak {B} nova vrijednost mase vjerojatnosti dana je sa

$$m_{zajedno}(B) = \frac{\sum_{X \cap Y = B} m_{inic}(X) \cdot m_{opor}(Y)}{1 - \sum_{X \cap Y = \phi} m_{inic}(X) \cdot m_{opor}(Y)} = \frac{0.17}{1 - 0.254} = 0.225.$$

A	{B}	{J}	{S}	{B,J}	{B,S}	{J,S}	{B,J,S}
Bel(A)	0.225	0.219	0.25	0.580	0.484	0.600	1.00
$m_{zajedno}(A)$	0.225	0.219	0.25	0.105	0.040	0.131	0.03

Jim nije više najsumnjiviji. Sumnja u Sally se povećala.

Interval povjerenja	**Bob**	**Jim**	**Sally**
Inicijalni	[0.1, 0.4]	[0.2, 0.7]	[0.1, 0.6]
Zajedno	[0.225, 0.4]	[0.215, 0.485]	[0.25, 0.451]

inicijalni + oporuka

Zaključak

- Najveća prednost D-S teorije pred Bayesovom shemom je mogućnost izražavanja "**znanja o neznanju**".

  Vjerovanje u neki zaključak (činjenicu), izraženo je mjerom *Bel*(A). To je broj između 0 i 1 koji odražava u kojoj mjeri je ta činjenica poduprta dokazima.

  Uvjerenost u iznos mjere *Bel*(A) ne znači da je razlika 1 - *Bel*(A) jednaka iznosu mjere suprotnog događaja A, *Bel*(A^C).

  Za mjeru pouzdanosti vrijedi

  $$\boldsymbol{Bel(A) + Bel(A^C) \leq 1,}$$

  dok za mjeru prihvatljivosti vrijedi

  $$\boldsymbol{Pl(A) + Pl(A^C) \geq 1.}$$

  Razlika 1 – (Bel(A) + *Bel*(A^C)) predstavlja stupanj **NEZNANJA,** nedostatka dokaza, koji idu u prilog bilo A bilo A^C.

- Najveći nedostatak D-S teorije njezina je kompleksnost koja zahtijeva navođenje SVIH elemenata okvira za rasuđivanje.

  Ne postoji znanje o tome kako pridjeljivati vrijednosti funkcija mase vjerojatnosti ***m.***

Skraćeno:

Funkcija *m* naziva se **osnovno vjerojatnosno pridruženje** ili samo osnovno pridruženje *(*engl. *basic probability assignment)*
m: P(X) → [0,1] koja ima svojstva:

$$m(\emptyset) = 0 \text{ i } \sum_{A \in P(\Omega)} m(A) = 1.$$

mjera pouzdanosti $Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$ i

$$\mathbf{Pl(A) = 1 - Bel(\sim A)}$$

mjera prihvatljivosti $Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$

$$\text{Vrijedi } Pl(A) \geq Bel(A), \forall A \in P(X).$$

$$\mathbf{Pl(A) + Pl(A^C) \geq 1}$$

4. Neizrazita logika i neizraziti skupovi

Neizrazita logika spada u područje računarstva koje se naziva *meko računarstvo* (*engl.* ***soft computing***).

Sadržaj:
Zašto nam klasična logika nije dovoljna?

Primjer sa vremenom i automehaničarom

Definicija neizrazitih skupova i oznake.

Definicije unije, presjeka, negacije neizrazitih skupova.

Koja svojstva vrijede za neizrazite skupove? Sve što i za klasične skupove (distributivnost, asocijativnost, komutativnost, idempotencija, De Morganovi zakoni…), ali ne vrijedi **zakon isključenja trećega** i suprotni mu zakon - **zakon kontradikcije**.

Neizrazita logika = računanje s riječima

Generalizirani modus ponens

Neizrazita logika i neizraziti skupovi

Klasična, dvovrijednosna logika ne može modelirati pojmove nejasnih, nepreciznih granica koji se pojavljuju kada je znanje oblikovano riječima.

Primjer:
Automehaničar opisuje riječima kako zaključuje zbog čega motor automobila neće startati. Ovo je izvadak iz tog opisa koji se odnosi na starost akumulatora kao jedan od uzroka problema.

"…… <u>Povremeno</u>, ipak se može desiti da je akumulator <u>previše slab</u> da upali motor, ali ima dovoljno snage da svjetla normalno rade za neko kratko vrijeme. To se dešava <u>vrlo rijetko</u>, no normalni rad svjetla se čini u suprotnosti sa pretpostavkom o istrošenom akumulatoru. Ono što trebate razmatrati u takvom slučaju je starost akumulatora. <u>Stari akumulator</u> će imati značajan pad kapaciteta, dok će <u>novi</u> biti puno izdržljiviji. "

1. **Znanje je izraženo jezičnim izrazima čije značenje često nije jasno definirano** kao što su: povremeno, previše slab, vrlo rijetko, stari, novi, ….

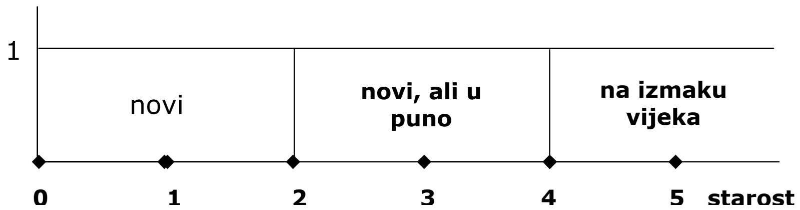
<u>Da bi znanje uobličili u neki tehnički sustav moramo znati što se podrazumijeva pod pojmovima kao što su *novi* ili *stari*.</u>

Evo kako to mehaničar pokušava objasniti:

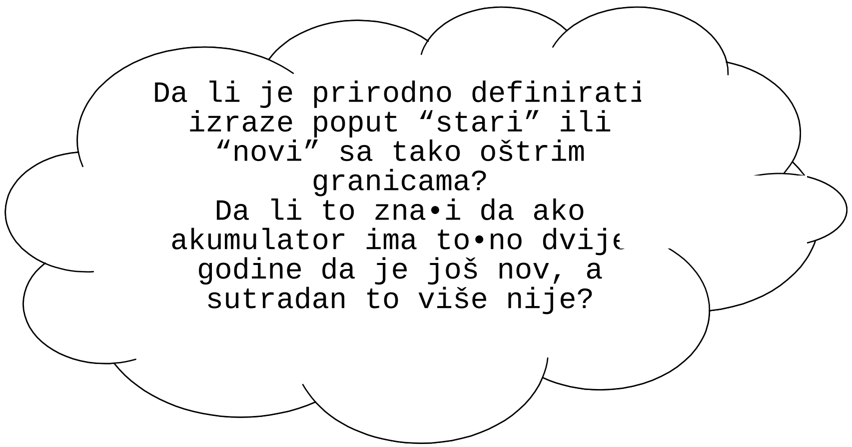
"Ako je akumulator <u>star dvije godine ili manje</u> tada bih ga smatrao **novim***. Ako je star <u>između dvije i četiri godine</u> tada bih ipak rekao da je* ***novi, ali u puno manjoj mjeri****. Akumulator <u>stariji od četiri</u> godine je* **na izmaku svog vijeka trajanja***….."*

Automehaničar je pokušao objasniti što on podrazumijeva pod nejasnim jezičnim izrazima:

JEZIČNI IZRAZ	ZNAČENJE
"novi"	manje od 2 godine
"novi, ali u puno manjoj mjeri"	između 2 i 4 godine
"na izmaku vijeka trajanja"	više od 4 godine



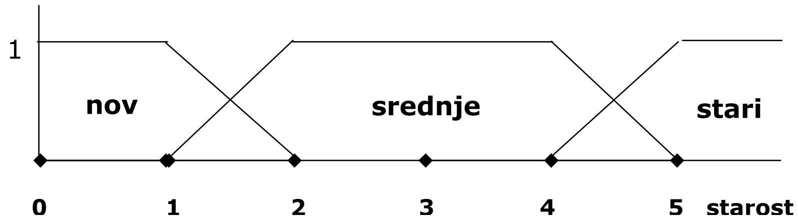
2. **Moguće je precizno definirati značenje nejasnih jezičnih izraza**, no u ovom slučaju pojmovi su definirani oštrim granicama na vremenskoj skali [0, ∞].



Takve granice daju neodgovarajući model. Starenje je neprekidni proces u kome nema naglih skokova.

3. Bilo bi prirodnije umjesto **oštrih** granica prilikom definicije nepreciznih jezičnih izraza govoriti **u kojoj je mjeri** neki akumulator star ili nov.

Ako umjesto pripadnosti ili nepripadnosti nekog elementa skupu govorimo o mjeri u kojoj neki element pripada nekom skupu onda govorimo o **neizrazitom skupu**.



4. **Znanje je subjektivno**: neki drugi automehaničar bi možda definirao da su granice 3 i 5 godina umjesto 2 i 4 godine. **Istom jezičnom izrazu mogu se pridjeliti različita značenja.**

5. *Različiti jezični izrazi mnogu opisivati isti koncept* ***tj. mogu imati isto značenje: umjesto izraza "na izmaku vijeka trajanja mogli smo staviti izraz "stari" i sl.***

6. *Znanje je kontekstno zavisno**: stari*** → akumulator
→ čovjek

Klasična logika ne može oblikovati na odgovarajući način znanje koje je oblikovano riječima, nejasno, neprecizno i kontekstno zavisno. Ona ne može odrediti u kojoj mjeri neki element pripada ili ne pripada nekom skupu.
Te probleme je riješila neizrazita logika, odnosno neizrazita teorija skupova.

Neizrazita logika je formalni matematički model za oblikovanje ljudskog znanja i zaključivanje kada je znanje izraženo riječima, nejasno i neprecizno.

Jezična varijabla

Neformalno, jezična ili lingvistička varijabla je varijabla koja umjesto uobičajenih numeričkih vrijednosti poprima vrijednosti u obliku riječi ili rečenica.

Jezična varijabla osigurava vezu između prirodnog jezika i kvantificiranja neizrazitih propozicija. Stoga je njeno razumjevanje neophodno za razumijevanje zaključivanja u neizrazitoj logici.

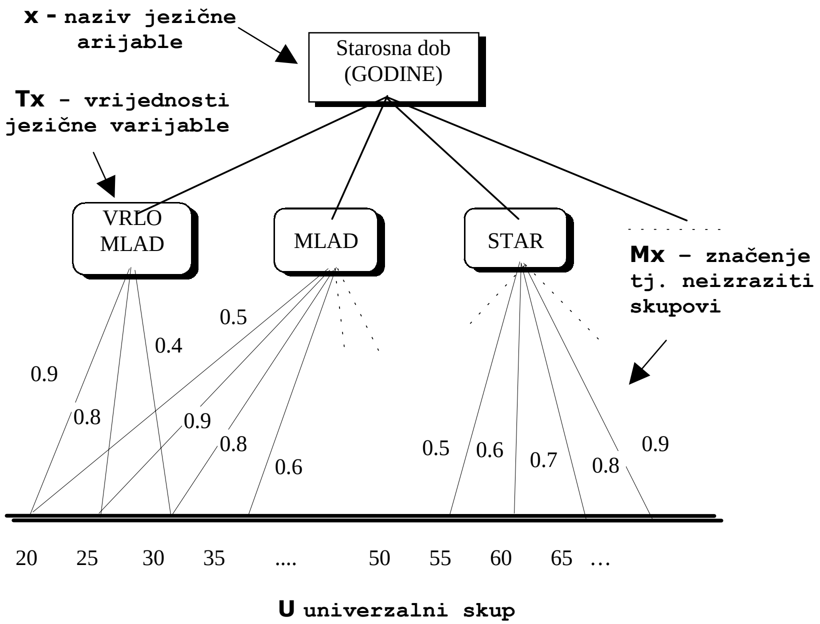
Definicija (jezična varijabla) [Zadeh, 1975]

Jezična varijabla je petorka (x, Tx, U, G, M_x), gdje je :
x - naziv jezične varijable;
Tx - skup jezičnih vrijednosti (termina, izraza) koje može poprimiti jezična varijabla Tx → skup termina *(term-set)*;
U univerzalni skup *(engl. universe of discourse)* je stvarna fizička domena u kojoj elementi iz T poprimaju numeričke vrijednosti. (U → kontinuiran ili diskretan);
G je gramatika tj. skup sintaktičkih pravila koji generiraju skup T iz skupa osnovnih termina;
Mx je semantička funkcija koja daje (kvantitativno) značenje (interpretaciju) jezičnim izrazima. Mx je funkcija koja $\forall$ x $\in$ T (tj. svakoj jezičnoj vrijednosti) pridružuje neki neizraziti podskup od U.

Primjer

Jezična varijabla: STAROSNA DOB
x= STAROSNA DOB
T(STAROSNA DOB) = mlad + nije mlad + vrlo mlad + ne vrlo mlad + vrlo vrlo mlad + ………+ srednjih godina + star + nije star + vrlo star + vrlo vrlo star + .. + ne star i ne srednjih godina+…

U = {0, 1, 2, 3, 4, …………… 99, 100}



<u>Značenja osnovnih izraza (npr. *mlad* i *star*) su subjektivna i kontekstno zavisna</u> i ta su značenja određena unaprijed. Pomoću gramatike moguće je generirati sve ostale vrijednosti skupa T iz ta dva osnovna izraza. Na primjer, izvedeni izrazi su: *vrlo mlad, ne vrlo mlad, vrlo vrlo star* itd.

Primjeri ostalih jezičnih varijabli su: toplina, istina, vjerojatnost, jasnoća itd.

Neizrazita logika = računanje s riječima
(L. Zadeh)

Jezični modifikatori

<u>**Koncentracija**</u> je kvadriranje vrijednosti funkcije pripadnosti - odgovara jezičnom izrazum "*VRLO*".

Neka je **A** neizraziti skup. Tada je koncentracija od A definirana sa

$$\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(x)^2.$$

Primjer

A = "Prohladno"

$\mu_{\mathbf{PROHLADNO}}(x)=$

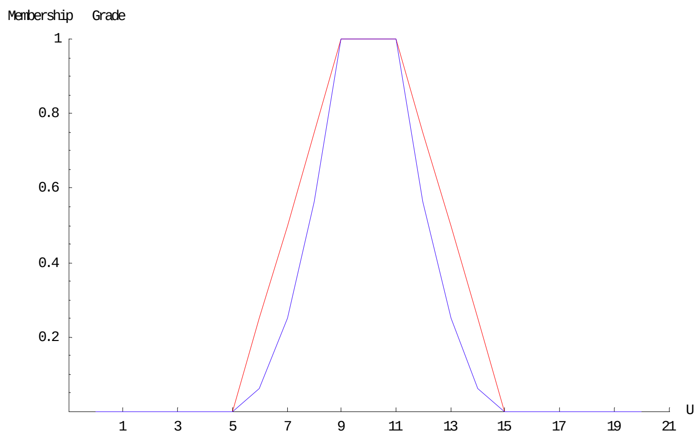
$$\left\{\left\{6, \frac{1}{4}\right\}, \left\{7, \frac{1}{2}\right\}, \left\{8, \frac{3}{4}\right\}, \{9, 1\}, \{10, 1\}, \{11, 1\}, \left\{12, \frac{3}{4}\right\}, \left\{13, \frac{1}{2}\right\}, \left\{14, \frac{1}{4}\right\}\right\}$$

(to je funkcija trapezoidnog oblika (5, 9, 11, 15))

Con(A) = "Vrlo prohladno"

$\mu_{\mathbf{VRLO\_PROHLADNO}}(x)=$

$$\left\{6, \frac{1}{16}\right\}, \left\{7, \frac{1}{4}\right\}, \left\{8, \frac{9}{16}\right\}, \{9, 1\}, \{10, 1\}, \{11, 1\}, \left\{12, \frac{9}{16}\right\}, \left\{13, \frac{1}{4}\right\}, \left\{14, \frac{1}{16}\right\}\}$$



Dilatacija uzima kvadratni korijen vrijednosti funkcije pripadnosti. Odgovara jezičnom izrazu "*MANJE ILI VIŠE*"

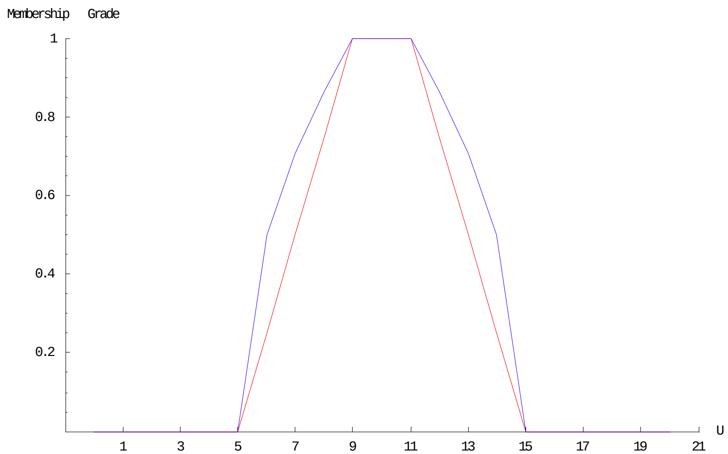
Neka je A neizraziti skup. Tada je dilatacija od **A** definirana sa

$$\mathrm{Dil}(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(x)^{1/2}.$$

Primjer:

Dil(A) = "Manje ili više prohladno"

$\mu_{\text{MANJE ILI VIŠE PROHLADNO}}(x)=$
{{6, 0.5}, {7, 0.707107}, {8, 0.866025}, {9, 1}, {10, 1}, {11, 1}, {12, 0.866025}, {13, 0.707107}, {14, 0.5}}



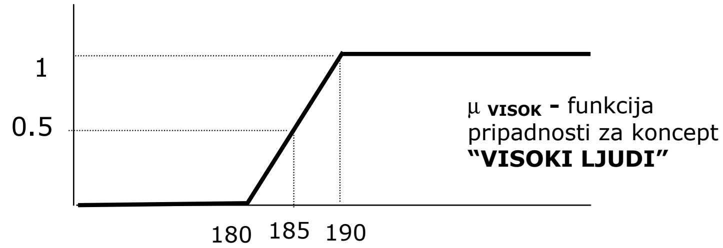
Kako su povezani teorija neizrazitih skupova i neizrazita logika?

Funkcija pripadnosti neizrazitog skupa i vrijednost istinitosti neke propozicije povezani su na sljedeći način:

Istinitost propozicije "*Element x pripada skupu A*" ekvivalentna je stupnju pripadnosti elementa x neizrazitom skupu A tj. $\mu_{\mathbf{A}}(x)$; I obrnuto:
Stupanj pripadnosti elementa x neizrazitom skupu A ekvivalentan je istinitosti propozicije "*Element x pripada skupu A*".

Primjer:

Neka Ivica ima 185 cm.
Neka je netko izjavio " Ivica je visok".
Koja je mjera istinitosti te propozicije?
Neka je skup visokih ljudi definiran sa $\mu_{\mathbf{VISOK}}(x)$.

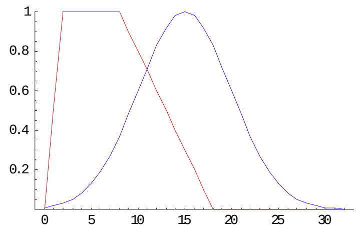


Tada je:
Istinitost propozicije "Ivica je visok" ekvivalentna je stupnju pripadnosti 185 cm skupu visokih ljudi.

$$\mu_{\text{VISOKI LJUDI}}(185) = 0.5$$

Operacije nad neizrazitim skupovima

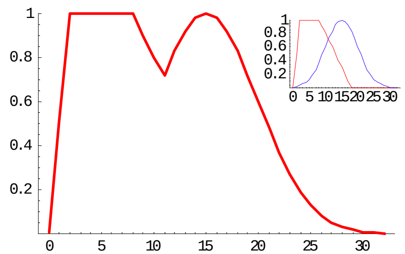
Neka su **A** i **B** neizraziti skupovi .



Unija **A** i **B** jest neizraziti skup **A** ∪ **B**,

$$\forall x \in X, \ \mu_{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}}(x) = \max(\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{B}}(x)).$$

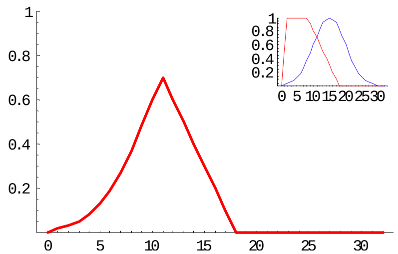
Unija oblikuje jezični izraz ***ili***.



Presjek **A** i **B** jest neizraziti skup **A** ∩ **B**

$$\forall x \in X, \ \mu_{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}}(x) = \min(\mu_{\mathbf{A}}(x), \mu_{\mathbf{B}}(x)).$$

Presjek oblikuje jezični izraz ***i***.



Komplement od **A** je definiran s a

$$\forall x \in X, \ \mu_{\mathbf{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\mathbf{A}}(x).$$

Zaključivanje u neizrazitoj logici

U klasičnoj logici možemo izvoditi nove formule (tvrdnje) uporabom valjanih pravila zaključivanja kao što je modus ponens.

Neizrazita logika: **GENERALIZIRANI MODUS PONENS.**

Neka su **A, A1, B, B1** neizraziti skupovi.

Premisa	x je **A1**
Implikacija	Ako x je **A** onda y je **B**
Zaključak	y je **B1**

Uoči bitne razlike od klasičnog modus ponensa:

1. Dozvoljena je uporaba nejasnih, nepreciznih izraza koji se definiraju neizrazitim skupovima (**A, A1, B, B1**)
2. Neizraziti skupovi **A** i **A1** te **B** i **B1,** tj. izrazi koje oni predstavljaju ne moraju biti ISTI!

Primjer

Premisa	Ivan je **visok** čovjek.
Implikacija	Ako je čovjek **visok** onda je i **težak.**
Zaključak	Ivan je manje više **težak.**

Premis	Banana je **vrlo žuta.**
Implikacija	Ako je banana **žuta** onda je banana **zrela.**
Zaključak	Banana je **vrlo zrela.**

Da bi razumjeli generalizirani modus ponens potrebno je uvesti pojam **neizrazite relacije**.

Neizraziti skup A – definiran je funkcijom pripadnosti $\mu_{\mathbf{A}}(x) : X \to [0,1]$, gdje je X univerzalni skup, a $\mu_{\mathbf{A}}(x)$ broj između 0 i 1 koji određuje u kojoj mjeri element x pripada neizrazitom skupu **A**.

Neizrazita relacija R – definirana je funkcijom $\mu_{\mathbf{R}}: X \times Y \to [0, 1]$, gdje $\mu_{\mathbf{R}}(x, y)$ određuje u kojoj su mjeri u relaciji elementi x i y iz univerzalnih skupova X i Y.

Primjer:

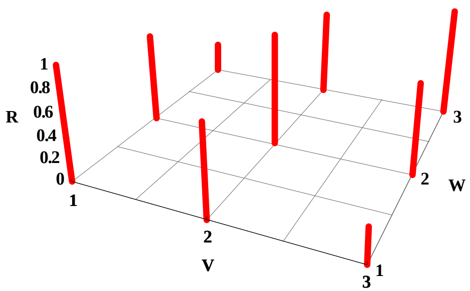
Neizrazita relacija **"približno jednako"** definirana na univerzalnom skupu V,W ={1,2,3}

R={{{1,1},1},{{1,2},.8},{{1,3},.3},{{2,1},.8},{{2,2},1}, {{2,3},.8},{{3,1},.3},{{3,2},.8},{{3,3},1}}

U matričnom obliku:

		W		
		1	2	3
	1	1	0.8	0.3
V	2	0.8	1	0.8
	3	0.3	0.8	1

Interpretacija: 1 je "približno jednako" 3 sa vrijednošću 0.3, dok je 2 "približno jednako" 2 s vrijednošću 1.



Napomena

Klasična relacija "približno jednako" imala bi na dijagonali jedinice, a sve ostalo bi bile nule.

Ako je **A** neizraziti skup na X, a **B** neizraziti skup na Y, tada je **A**x**B neizrazita relacija** na univerzalnom skupu XxY definirana sa $\mu_{\mathbf{A\times B}}: X \times Y \to [0, 1]$,

$$\mu_{\mathbf{A\times B}}(x, y) = \min(\mu_{\mathbf{R}}(x), \mu_{\mathbf{R}}(y)).$$

Svaka implikacija predstavlja neku neizrazitu relaciju. Implikacija *"Ako x je **A** onda y je **B**"* određuje **neizrazitu relaciju AxB** na XxY.

Primjer

Implikacija "Ako je Ivan visok, onda je Ivan težak" definira neizrazitu relaciju "VISOK x TEŽAK" na sljedeći način:

Neka je dan skup "visoki" ljudi i neka je dan skup "teški" ljudi. Tada je neizrazita relacija "visoki i teški" ljudi prema gornjoj definiciji definirana sljedećom tablicom:

			"teški ljudi" (u kg)								
			0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1
			60	65	70	75	80	85	90	95	100
"visoki ljudi" (u cm)	0	170	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.3	175	0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
	0.5	180	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	0.8	185	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.8	0.8	0.8
	1	190	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1
	1	195	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1
	1	200	0	0.1	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1	1

Na primjer: $\mu_{\mathbf{VISOK\ x\ TEŽAK}}(175, 90) = \min\{0.3, 0.9\} = 0.3$.

Primjer zaključivanja modus ponensom

Premisa	v je **mali** broj**.**
Implikacija	v i w su **približno jednaki.**
Zaključak	w je **manje više mali.**

kako se izvodi zaključak

Univerzalni skupovi V,W ={1,2,3}

Definiramo neizraziti skup **A** = "**mali broj**" iz premise
$\mu_{\textbf{mali broj}} = 1/1 + 0.5/2 + 0.1/3.$

Definiramo relaciju "**približno jednaki**" brojevi iz implikacije.

$$\mathbf{R}_{\text{"približno jednaki"}} = \begin{array}{c|ccc} & \multicolumn{3}{c}{W} \\ & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 0.8 & 0.3 \\ 2 & 0.8 & 1 & 0.8 \\ 3 & 0.3 & 0.8 & 1 \end{array}$$

Pravilo zaključivanja za generalizirani modus ponens (tzv. **Zadehovo pravilo min-max kompozicije**) kaže da je tada kompozicija **A o R jednaka neizrazitom skupu B** iz zaključka modus ponensa, gdje je neizraziti skup **B** definiran sa funkcijom pripadnosti
$$\mu_B(w) = \max(\ \min(\mu_A(v),\ \mu_R(v,w))\ ).$$

A "mali broj" **R ="približno jednaki brojevi"**

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.5 & 0.1 \end{array} \quad \mathbf{o} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 0.8 & 0.3 & 1 \\ 0.8 & 1 & 0.8 & 2 \\ 0.3 & 0.8 & 1 & 3 \end{array} = \mathbf{B}$$

$\mu_B(\mathbf{1})$ = max(min(μ_A(v), μ_R(v,1)))=
max{ min(1,1), min(0.5,0.8), min(0.1,0.3)} =
max{1, 0.5, 0.1} = **1**
$\mu_B(\mathbf{2})$ = max(min(μ_A(v), μ_R(v,2)))=
max{ min(1,0.8), min(0.5, 1), min(0.1,0.8)} =
max{0.8, 0.5, 0.1} = **0.8**
$\mu_B(\mathbf{3})$ = max(min(μ_A(v), μ_R(v,32)))=

max{ min(1,0.3), min(0.5, 0.8), min(0.1,1} =
max{0.3, 0.5, 0.1} = **0.5**

Dakle, rezultat kompozicije tj. zaključivanja je neizraziti skup
B = A o R = 1/1 + 0.8/2 + 0.5/3.

Takvom neizrazitom skupu možemo pridjeliti neki jezični izraz. Na primjer, to može biti jezični izraz "**manje više mali**" broj. Dakle,

Zaključak	w je **manje više mali.**

Pridjeljivanje jezičnih izraza neizrazitim skupovima naziva se **jezična aproksimacija.**

Ukratko: