1 AUTOMATSKO ZAKLJUČIVANJE UPORABOM PROPOZICIJSKE LOGIKE

1.1 UVOD

Neka su dane slijedeće četiri izjave:

1. Ivan je budan
2. Ivan nosi pribor za čišćenje
3. Majka je zadovoljna ako je Ivan budan i čisti svoju sobu
4. Ako Ivan nosi pribor za čišćenje tada on čisti svoju sobu

Ako su sve gornje izjave istinite lako intuitivno zaključujemo
majka je zadovoljna.

ta tvrdnja nije izričito zadana

Što ako je dano više stotina (tisuća) izjava?

Želimo automatizirati zaključivanje tako da ga formaliziramo i implementiramo na računalu

Izjave ili tvrdnje kojima pridjeljujemo jednu (i samo samo jednu) vrijednosti istinitosti (*istina* ili *laž*) nazivamo **propozicije** ili **sudovi**.

Jedan od jezika za prikaz znanja na području umjetne inteligencije je **propozicijska logika**

1.2 SIMBOLI, SINTAKSA I SEMANTIKA PROPOZICIJSKE LOGIKE

SIMBOLI PROPOZICIJSKE LOGIKE

Napomene, sinonimi

- Skup entiteta V = {A, B, C, D,…} koji se nazivaju **atomi** ili elementarne propozicije (to su logičke varijable)

Logička varijabla – propozicija - sud

- Logički veznici:
  - Unarni ~ (negacija)
  - Binarni ∧ konjunkcija,
    ∨ disjunkcija,
    → implikacija ,
    ↔ ekvivalencija

Logički operatori

- Skup vrijednosti istinitosti { *t*, *f* }, (to su logičke konstante)

t – istina, true,
f – laž, false.
Još se koristi: {0, 1}
ili { ⊤, ⊥} ili { ⊤, F }

SINTAKSA PROPOZICIJSKE LOGIKE

Formula se gradi na slijedeći način:

(i) Atom je formula;
(ii) ako je F formula tada je i (~F) formula;
(iii) ako su F i G formule tada su formule :
(F ∧ G),
(F ∨ G),
(F → G),

Umjesto izraza formula *koriste se još i izrazi: rečenica ili dobro oblikovana formula, (engl. well formed formula ili* ***wff****)*

$(F \leftrightarrow G)$.

Primjeri atoma :

A = ”Zemlja je okrugla”
B = “Harry Potter se školuje u Hogwartsu”
C = ”Propozicijska logika je najmoćnija shema za prikaz znanja”
D = “Minotaur je mitsko biće”

Primjeri formula:

C
$(\sim C)$
$((A \vee B) \wedge \sim C)$
$(((B \vee F) \wedge (\sim B \vee G)) \rightarrow (F \vee G))$
$((C \vee D) \rightarrow (\sim A \leftrightarrow B))$

SEMANTIKA PROPOZICIJSKE LOGIKE

Neka je F skup svih formula. Do sada je F samo skup simbola, nema značenja pridjeljenog elementima.

Neka je dana funkcija $t : V \rightarrow \{t, f\}$
Funkcija t je **pridruživanje vrijednosti istinitosti** *t* ili *f* propozicijama (odnosno atomima, elementima skupa V). Ako je t(A) = *t* kažemo da je propozicija **istinita**, ako je t(A) = *f* kažemo da je propozicija **lažna**.

Svaka funkcija $t : V \rightarrow \{t, f\}$ određuje jednu moguću **evaluaciju istinitosti formule**, tj. funkciju $\mathsf{t}: \mathsf{F} \rightarrow \{t, f\}$ na slijedeći način:

Za svaku formulu F iz F određuje se pridružena vrijednost istinitosti na slijedeći način:

1. Svako pojavljivanje nekog atoma A u formuli F zamijeni sa t(A). Tako dobiven izraz sastoji se od znakova *t*, *f*, ~, ∧, ∨ , →, ↔ .
2. Pomoću tablica istinitosti koje definiraju značenja logičkih operatora ~, ∧ ,∨ , →, određuje se pridružena vrijednost istinitosti formule F.

∧	***t***	***f***
t	***t***	***f***
f	***f***	***f***

∨	***t***	***f***
t	***t***	***t***
f	***t***	***f***

	~
t	***f***
f	***t***

→	***t***	***f***
t	***t***	***f***
f	***t***	***t***

↔	***t***	***f***
t	***t***	***f***
f	***f***	***t***

Napomena: redundancija → i ↔

INTERPRETACIJA FORMULE

Definicija

Pridruživanje vrijednosti istinitosti svakom atomu formule (tj. funkcija t) naziva se i**nterpretacija formule.**
Interpretacija zadovoljava formulu ako je formula istinita za tu interpretaciju.

Primjer.

Za formulu $((A \vee B) \wedge C) \wedge (\sim B \vee C)$ neka je dana slijedeća interpretacija $t(A) = f$
$t(B) = t$
$t(C) = t.$

Tada je evaluacija istinitosti formule:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{t}\,(\,((A \vee B) \wedge C) \wedge (\sim B \vee C)\,) &= (\,(t(A) \vee t(B)) \wedge t(C)) \wedge (\sim t(B) \vee t(C)) \\
&= ((f \vee t) \wedge t) \wedge (\sim t \vee t) \\
&= (t \vee t) \vee \ (f \vee t) \\
&= t \wedge t \\
&= t.
\end{aligned}
$$

Zaključak: Zadana interpretacija zadovoljava formulu.

Ako formula ima n atoma $\Rightarrow$ 2^n različitih interpretacija formule.
Redoslijed izvođenja operacija je slijedeći:

$$\sim,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

Primjer:

$(((\sim A) \wedge B) \ \rightarrow (C \vee D))$ je isto što i
$\sim A \wedge B \ \rightarrow C \vee D$

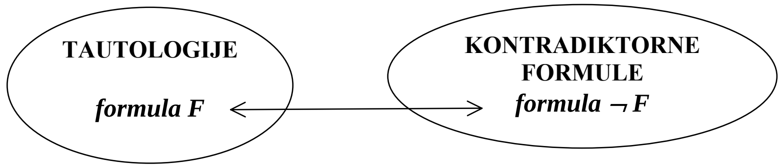
TAUTOLOGIJA I KONTRADIKCIJA

Definicija.

Formula je **tautologija** (*engl. tautology, valid formula)* akko je istinita za svaku svoju interpretaciju.
Formula je **kontradikcija ili proturječje** (*engl. contradiction, inconsistent, unsatisfiable*) akko je laž za svaku svoju interpretaciju.

Primjer tautologije $(B \vee \sim B)$.
Primjer proturječja $(B \wedge \sim B)$.

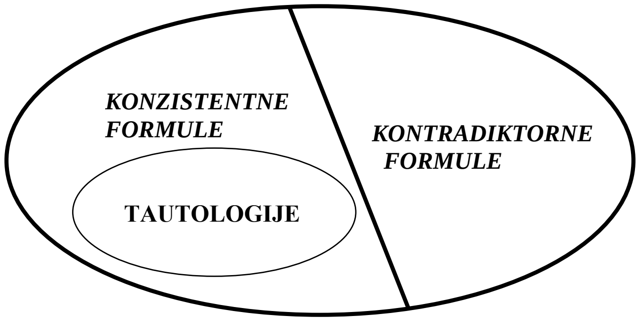
Vrijedi da je formula tautologija akko je njezina negacija proturječje.



Definicija.

Formula je **konzistentna** (*engl. consistent, satisfiable*) akko nije kontradikcija.

Skup svih formula



<u>Može se još reći da je formula konzistentna ako je istinita barem za jednu svoju interpretaciju.</u>

Ako je formula tautologija onda je i konzistentna (tj. tautologija $\Rightarrow$ konzistencija), ali ne vrijedi obrat.

Ako formula nije tautologija onda ne znači da je kontradikcija. Ako formula nije kontradikcija onda je po definicija konzistentna, što ne znači da je proturječje.

EKVIVALENCIJA

Definicija.

Formula F je **ekvivalentna** formuli G akko je vrijednost istinitosti od F jednaka vrijednosti istinitosti od G za svaku moguću interpretaciju F i G. Piše se F $\equiv$ G.

Primjer.

Dokazivanje ekvivalentnosti formula **~(A $\vee$ B)** i **(~A $\wedge$ ~B)** tablicom istinitosti

A	B	(A $\vee$ B)	~(A $\vee$ B)	~B	~A	(~A $\wedge$ ~B)
t	*t*	*t*	*f*	*f*	*f*	*f*
t	*f*	*t*	*f*	*t*	*f*	*f*
f	*t*	*t*	*f*	*f*	*t*	*f*
f	*f*	*f*	*t*	*t*	*t*	*t*

Tablica najčešće korištenih ekvivalencija u propozicijskoj i predikatnoj logici

[1]	$\sim(\sim F)$	$\equiv$	F	involucija
[2]	$(F \rightarrow G)$	$\equiv$	$(\sim F \vee G)$	eliminacija implikacije
[3]	$(F \rightarrow G)$	$\equiv$	$(\sim G \rightarrow \sim F)$	kontrapozicija
[4]	$(F \rightarrow (G \rightarrow H))$	$\equiv$	$(G \rightarrow (F \rightarrow H))$	
[5]	$(F \rightarrow (G \rightarrow H))$	$\equiv$	$((F \wedge G) \rightarrow H)$	
[6]	$(F \leftrightarrow G)$	$\equiv$	$((F \wedge G) \vee (\sim F \wedge \sim G))$	
[7]	$(F \leftrightarrow G)$	$\equiv$	$((F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F))$	
[8]	$(F \leftrightarrow G)$	$\equiv$	$((\sim F \vee G) \wedge (\sim G \vee F))$	
[9]	$(G \wedge G)$	$\equiv$	G	idempotencija
[10]	$(G \wedge$ *true*$)$	$\equiv$	G	
[11]	$(G \wedge$ *false*$)$	$\equiv$	*false*	
[12]	$(G \wedge \sim G)$	$\equiv$	*false*	zakon kontradikcije (ekskluzija)
[13]	$(G \vee G)$	$\equiv$	G	faktorizacija
[14]	$(G \vee$ *true*$)$	$\equiv$	*true*	
[15]	$(G \vee$ *false*$)$	$\equiv$	G	
[16]	$(G \vee \sim G)$	$\equiv$	*true*	zakon isključenja trećega (komplementiranje)
[17]	$((F \wedge G) \wedge H)$	$\equiv$	$(F \wedge (G \wedge H))$	asocijativnost
[18]	$((F \vee G) \vee H)$	$\equiv$	$(F \vee (G \vee H))$	
[19]	$(F \wedge G)$	$\equiv$	$(G \wedge F)$	komutativnost
[20]	$(F \vee G)$	$\equiv$	$(G \vee F)$	
[21]	$(F \vee (G \wedge H))$	$\equiv$	$((F \vee G) \wedge (F \vee H))$	distributivnost
[22]	$(F \wedge (G \vee H))$	$\equiv$	$((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$	
[23]	$\sim(F \vee G)$	$\equiv$	$(\sim F \wedge \sim G)$	De Morganovi zakoni
[24]	$\sim(F \wedge G)$	$\equiv$	$(\sim F \vee \sim G)$	
[25]	$(F \vee (F \wedge G))$	$\equiv$	F	apsorpcija
[26]	$(F \wedge (F \vee G))$	$\equiv$	F	
[27]	$(F \vee (\sim F \wedge G))$	$\equiv$	$(F \vee G)$	
[28]	$(F \wedge (\sim F \vee G))$	$\equiv$	$(F \wedge G)$	

Neke napomene:

Definicijom pridruživanja vrijednosti istinitosti $t: V \rightarrow \{t, f\}$, definirali smo propozicije kao izreke (izjave, tvrdnje, sudove) kojima se pridružuje samo jedna od dviju mogućih vrijednosti istinitosti: *istina (t)* ili *laž (f)*.

U propozicijskoj logici ne zanima nas niti sadržaj, niti struktura propozicija nego samo je li propozicija *istinita* ili *lažna*, tj. zanima nas samo *vrijednost istinitosti* propozicije.

Uobičajeni način definiranja semantičkog značenja logičkih operatora je pomoću slijedećih tablica istinitosti.

Tablice istinitosti pet logičkih operatora:
negacije, konjunkcije, disjunkcije, implikacije i ekvivalencije

F	G	~F	$(F \wedge G)$	$(F \vee G)$	$(F \rightarrow G)$	$(F \leftrightarrow G)$
t	*t*	*f*	*t*	*t*	*t*	*t*
t	*f*	*f*	*f*	*t*	*f*	*f*
f	*t*	*t*	*f*	*t*	*t*	*f*
f	*f*	*t*	*f*	*f*	*t*	*t*

Slijede neke napomene o implikaciji i ekvivalenciji.

Implikacija – pogodbeni sud.

$\boxed{\mathbf{F \rightarrow G}}$

F	**G**	**(F →G)**
t	***t***	***t***
t	***f***	***f***
f	***t***	***t***
f	***f***	***t***

Tablica istinitosti ekvivalencije

Čitamo : *Ako* F *onda* G,
F *implicira* G, F *povlači* G,
G *je nužno za* F, F *je dovoljno* za G.

Ako F tada G

antecedent ili uvjetak

konsekvens ili posljedak

Kad god je istinito F tada je istinito i G.
Ako je F lažno, da li je i G lažno? NE!

Ako je F lažno, implikacija nam ništa ne govori o istinitosti G.

Antecedent se ne treba poistovjetiti s *uzrokom*!
Konsekvens se ne treba poistovjetiti sa *posljedicom ili učinkom*!

Primjer: **Ako** (jedrenjak jedri) **tada** (vjetar puše).

Nužno je da (vjetar puše) da (jedrenjak jedri).
Dovoljno je da (jedrenjak jedri) pa da (vjetar puše).

Ako jedrenjak ne jedri (tj. antecedent je lažan) ništa ne možemo zaključiti o puhanju vjetra (tj. o kensekvensu)!

Zadatak Pokažite logičku ekvivalentnost

$$\mathbf{F \rightarrow G \equiv \sim F \vee G}$$

Ekvivalencija

$\boxed{F \leftrightarrow G}$

Tablica istinitosti ekvivalencije

F	**G**	**(F ↔G)**
t	***t***	***t***
t	***f***	***f***
f	***t***	***f***
f	***f***	***t***

Čitamo :
F *je ekvivalentno* G
F *onda i samo onda* G
F *ako i samo ako* G (skraćeno pišemo **akko**, na *engl. iff*)
F *je nužno i dovoljno* za G

Primjer:

Tablica istinitosti za formulu $(((A \vee B) \wedge \sim B) \rightarrow C)$

A	**B**	**C**	**$(A \vee B)$**	**$\sim B$**	**$((A \vee B) \wedge \sim B)$**	**$(((A \vee B) \wedge \sim B) \rightarrow C)$**
t	***t***	***t***	***t***	***f***	***f***	***t***
t	***t***	***f***	***t***	***f***	***f***	***t***
t	***f***	***t***	***t***	***t***	***t***	***t***
t	***f***	***f***	***t***	***t***	***t***	***f***
f	***t***	***t***	***t***	***f***	***f***	***t***
f	***t***	***f***	***t***	***f***	***f***	***t***
f	***f***	***t***	***f***	***t***	***f***	***t***
f	***f***	***f***	***f***	***t***	***f***	***t***

Svaki redak tablice odgovara jednoj mogućoj interpretaciji formule. Neke interpretacije pridružuju formuli vrijednost *f-laž*, a neke vrijednost *t-istinu.*

1.3 TEMELJNI POSTUPCI DOKAZIVANJA

3.1 Teorem

Definicija.

Formula G je **logička posljedica** formula F1, F2, …, Fn ako i samo ako svaka intrepretacija koja zadovoljava formulu $F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn$ također zadovoljava i formulu G.

Podsjetimo se, interpretacija koja čini formulu istinitom, zadovoljava formulu.

Kad god su F1, F2, …, Fn istinite tada je i G istinita. Prema definiciji logičke posljedice to znači da $F2 \wedge \ldots \wedge Fn$ implicira G.

Primjer: P je logička posljedica $P \wedge Q$ zato što za svaku interpretaciju za koju je $P \wedge Q$ istinito, vrijedi da je i P istinito. Da li vrijedi da je P logička posljedica $P \vee Q$? (Ne.)

F1, F2, …, Fn se nazivaju **premise,** a G se naziva **ciljna formula**.

Definicija.

Ako je G logička posljedica F1, F2, …, Fn kaže se da je $((F1 \wedge F2 \wedge \ldots \wedge Fn) \rightarrow G)$ **teorem**. Kraće se kaže da je dokazano da je **G teorem**. Postupak izvođenja naziva se dokazivanje **teorema.**

U daljnjim razmatranjima pretpostavljat ćemo da je F1, F2, …, Fn konzistentno.

3.2 Izravni dokazi i dokazi opovrgavanjem

Koji su kriteriji za izvođenje da je G logička posljedica $F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn$, odnosno koji su kriteriji za dokazivanje teorema $((F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn) \rightarrow G)$?

Tvrdnja (1)

> G je logička posljedica premisa F1, F2, …, Fn **akko** je $((F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn) \rightarrow G)$ tautologija.

Kako je negacija tautologije proturječje može se reći:

Tvrdnja (2):

G je logička posljedica premisa F1, F2, …, Fn **akko** je $\sim((F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn) \rightarrow G)$ proturječje.

Primjetimo da vrijedi:

$\sim((F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn) \rightarrow G) \equiv$ [eliminacija implikacije [2]]
$\sim(\sim(F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn) \vee G) \equiv$ [De Morganov zakon [23]]
$(\sim(\sim(F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn)) \wedge \sim G) \equiv$ [ínvolucija [1]]
$(F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn \wedge \sim G)$

Tvrdnja (2) se može dakle izreći:

> G je logička posljedica premisa F1, F2, …, Fn **akko** je $(F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn \wedge \sim G)$ proturječje.

Na temelju ovih razmatranja oblikujemo dvije osnovne metode za dokaz teorema:

1. **izravna metoda** *(engl .direct method*) kojom pokazujemo da je
   $((F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn) \rightarrow G)$ <u>tautologija</u>.

2. **metoda opovrgavanja** *(engl. refutation method)* kojom pokazujemo da je
   $((F1 \wedge F2 \wedge \dots \wedge Fn) \wedge \sim G)$ <u>proturječje</u>.

Primjer:

Dokažimo da je G logička posljedica premisa F, $F \rightarrow G$

1. izravna metoda

Treba dokazati da je $((F \wedge (F \rightarrow G)) \rightarrow G)$ tautologija

F	G	(F → G)	F ∧ (F →G)	((F ∧ (F → G)) → G)
t	*t*	*t*	*t*	*t*
t	*f*	*f*	*f*	*t*
f	*t*	*t*	*f*	*t*
f	*f*	*t*	*f*	*t*

2. metoda opovrgavanja

Treba dokazati da je $((F \wedge (F \rightarrow G)) \wedge \sim G)$ proturječje

F	G	(F → G)	F ∧ (F →G)	((F ∧ (F → G)) ∧~G)
t	*t*	*t*	*t*	*f*
t	*f*	*f*	*f*	*f*
f	*t*	*t*	*f*	*f*
f	*f*	*t*	*f*	*f*

Prema definiciji G je logička posljedica premisa F i F $\rightarrow$ G ako i samo ako svaka interpretacija koja zadovoljava formulu F $\wedge$ (F $\rightarrow$ G) istodobno zadovoljava i G.

F	**G**	**(F $\rightarrow$ G)**	**F $\wedge$ (F $\rightarrow$G)**	**G**
t	***t***	***t***	***t***	***t***
t	***f***	***f***	***f***	***f***
f	***t***	***t***	***f***	***t***
f	***f***	***t***	***f***	***f***

U propozicijskoj logici može se postupkom koji se sastoji od konačno mnogo koraka odlučiti je li zadani cilj teorem ili nije. Zato se kaže da je propozicijska logika **ODLUČLJIVA** ***(engl. decidable).***

Problem kod ovakvog dokazivanja je što koraci u postupku dokazivanja rastu eksponencijalno sa n. Ako formula ima n atoma $\Rightarrow$ 2^n redaka tablice istinitosti. Stoga je ovakav način dokazivanja primjenljiv, ali nije praktičan.

Zadatak

Da li je P logička posljedica Q i P $\vee$ Q ?

P	Q	P $\vee$ Q	Q $\wedge$ (P $\vee$ Q)	(Q $\wedge$ (P $\vee$ Q)) $\rightarrow$ P
t	*t*	*t*	*t*	*t*
t	*f*	*t*	*f*	*t*
f	*t*	*t*	*t*	*f*
f	*f*	*f*	*f*	*t*
			po definiciji	*izravnom metodom dokazano* ***nije tautologija***

Pravila zaključivanja

Alternativni postupak izravnom dokazivanju i metodi opovrgavanja jest uporaba **pravila zaključivanja** za dedukciju logičkih posljedica iz zadanih premisa.

Pravila zaključivanja omogućuju dobivanje novih izjava na temelju zadanih premisa. Slijede neki primjeri pravila zaključivanja.

PRAVILO KONJUNKCIJE – Ako su dvije tvrdnje (premise) istinite tada je istinita i njihova konjunkcija. To je najjednostavnije pravilo zaključivanja.

Premisa 1: A

Premisa 2: B

Logička posljedica: (A $\wedge$ B)

Kako provjeravamo valjanost pravila zaključivanja?

(Podsjetimo se da se kaže da je (A $\wedge$ B) logička posljedica premisa A i B ako svaka interpretacija koja zadovoljava A i zadovoljava B zadovoljava i (A $\wedge$ B))

Potvrda pravila tablicom istinitosti:

A	**B**	**(A $\wedge$ B)**
t	***t***	***t***
t	***f***	***f***
f	***t***	***f***
f	***f***	***f***

Ako općenito dokažemo da pravilo zaključivanja primjenjeno na skup premisa daje formulu koja je logička posljedica premisa, tada kažemo da smo potvrdili (*engl. verify*) da je pravilo zaključivanja **zdravo** (*engl. sound*)

Najpoznatije pravilo zaključivanja je **PRAVILO MODUS PONENS** – ako je istinita premisa A i ako je istinita premisa $A \rightarrow B$ tada je propozicija B istinita.

Premisa 1: A

<u>Premisa 2: $A \rightarrow B$</u>

Logička posljedica: B

Modus ponens smo dokazali izravnom metodom i metodom opovrgavanja. Dokaz tablicom istinitosti:

A	**B**	**$(A \rightarrow B)$**	**B**
t	***t***	***t***	***t***
t	***f***	***f***	***f***
f	***t***	***t***	***t***
f	***f***	***t***	***f***

Modus ponens omogućava da se dvije formule (A i $A \rightarrow B$) zamijene s jednom (B), zato se kaže da je modus ponens implikacijsko-eliminacijsko pravilo.

Zadatak Dokaži da pravilo abdukcije nije zdravo.

Premisa 1: B

<u>Premisa 2: $A \rightarrow B$</u>

Logička posljedica: A

A	**B**	**$(A \rightarrow B)$**	**A**
t	***t***	***t***	***t***
t	***f***	***f***	***t***
f	***t***	***t***	***f***
f	***f***	***t***	***f***

PREGLED VAŽNIJIH PRAVILA ZAKLJUČIVANJA

Neka F, G, i H predstavljaju bilo koju formulu u propozicijskoj ili predikatnoj logici.

[1]	Ako F i G tada $(F \wedge G)$	uvođenje konjunkcije
[2]	Ako $(F \wedge G)$ tada F	eliminiranje konjunkcije
[3]	Ako $(F \wedge G)$ tada G	
[4]	Ako F tada $(F \vee G)$	uvođenje disjunkcije
[5]	Ako G tada $(F \vee G)$	
[6]	Ako F i $(F \rightarrow G)$ tada G	modus ponens
[7]	Ako ~G i $(F \rightarrow G)$ tada ~F	modus tollens
[8]	Ako $(F \rightarrow G)$ i $(G \rightarrow H)$ tada $(F \rightarrow H)$	ulančavanje (silogizam)
[9]	Ako F i $(F \equiv G)$ tada G	
[10]	Ako G i $(F \equiv G)$ tada F	

Primjer:

Dokažimo direktnom metodom pravilo modus tollens.

Premise: ~G i $F \rightarrow G$; Logička posljedica: ~F

To znači da treba dokazati da je $((\sim G \wedge (F \rightarrow G)) \rightarrow \sim F)$ tautologija.

F	**G**	**~F**	**~G**	**$(F \rightarrow G)$**	**$\sim G \wedge (F \rightarrow G)$**	**$((\sim G \wedge (F \rightarrow G)) \rightarrow \sim F)$**
t	***t***	***f***	***f***	***t***	***f***	***t***
t	***f***	***f***	***t***	***f***	***f***	***t***
f	***t***	***t***	***f***	***t***	***f***	***t***
f	***f***	***t***	***t***	***t***	***t***	***t***

Navedena pravila zaključivanja koriste se u postupku zaključivanja koji se naziva prirodno zaključivanje.

3.4 Prirodno zaključivanje (engl. natural deduction)

U postupku prirodnog zaključivanja primjenjujemo jedno od pravila zaključivanja na zadani skup premisa. Izvedena formula logička je posljedica premisa i ona sadrži atome onih premisa iz kojih je izvedena.

Izvedena formula se pridodaje skupu premisa.

Ponavljanjem postupka, tj. ponovnom primjenom pravila zaključivanja, izvode se nove formule.

Zaustavljamo se kada:

- je izvedena formula identična cilju (to znači da smo pokazali da je cilj teorem) ili
- više ne možemo izvesti nove formule (to znači da cilj nije teorem).

Jedan od dva uvjeta zaustavljanja mora biti ispunjen u konačnom broju koraka jer s konačnim brojem premisa (tj. konačnim brojem atoma u premisama) i ciljem možemo izgraditi konačan broj različitih formula.

Primjer prirodnog zaključivanja:

[i] Ivan se probudio

[ii] Ivan nosi pribor za čiščenje

[iii] Majka je zadovoljna ako se Ivan probudi i čisti svoju sobu

[iv] Ako Ivan nosi pribor za čišćenje, tada on čisti svoju sobu

Dokažite prirodnom dedukcijom cilj: Mama je zadovoljna.

Označujemo propozicije sadržane u premisama sljedećim atomima:

A = Ivan se probudio

B = Ivan nosi pribor za čiščenje

C = Ivan čisti svoju sobu

D = Majka je zadovoljna

Cilj koji treba dokazati je D.

Možemo ispisati premise i kao formule.

[1] A

[2] B

[3] $A \wedge C \rightarrow D$

[4] $B \rightarrow C$

Iz ovih premisa možemo izvesti slijedeće logičke posljedice.

[5]	C	uporabom modus ponensa na [2] i [4]
[6]	$A \wedge C$	uvođenjem konjunkcije na [1] i [5]
[7]	D	uporabom modus ponensa na [3] i [6]

Cilj je izveden kao logička posljedica premisa.

Time smo dokazali da je D (Majka je zadovoljna) teorem.

Nedostatak prirodnog zaključivanja:

Implementacija postupka je vrlo složena. Program mora sadržavati sofisticiranu upravljačku strukturu koja će određivati koja pravila kada uporabiti i na kojim premisama da bi se dokazao teorem.

Primjerice, uporaba pravila *uvođenje konjunkcije* na premisama [1] i [2] daje novu formulu A $\wedge$ B. Međutim, ona je beskorisna u daljnjem postupku dokazivanja cilja D.

3. 5 Dokazivanje teorema uporabom rezolucije

Uvod

Prirodno zaključivanje je složeno zbog uporabe velikog broja pravila. Uvodimo novo pravilo zaključivanja – rezolucijsko pravilo. Ideja rezolucijskog pravila je slijedeća.

Neka su dani atomi F, G, A i njegova negacija ~A.
Zadane su dvije premise A $\vee$ F i ~A $\vee$ G. Te se dvije premise kombiniraju tako da daju jednu logičku posljedicu:

$$\begin{array}{l} A \vee F \\ \underline{\sim A \vee G} \end{array}$$

Logička posljedica: F $\vee$ G

Literali i klauzule

Definicija
Literal je atom ili njegova negacija.
Primjeri atoma su A, B, C, D, ~A, ~B, ~C, ...

Definicija
Klauzula je disjunkcija od n literala, n $\geq$ 0.

Primjeri klauzula
- A $\vee$ C $\vee$ ~B
- ~B $\vee$ D
- G
- *NIL*

Klauzula koja ima samo jedan literal naziva se **jedinična klauzula** dok simbol ***NIL*** predstavlja praznu klauzulu.

Rezolucijsko pravilo zaključivanja može se primjeniti **samo** na formulu koja je u obliku konjunkcije klauzula.

Da li je time rezolucijsko pravilo ograničeno? **NE!**
Svaka se formula može pretvoriti u njoj ekvivalentnu konjunkciju klauzula.

Pretvaranje formula u klauzalni oblik

Svaka se formula može pretvoriti u njoj ekvivalentnu konjunkciju klauzula u četiri slijedna koraka:

Korak	Svrha koraka	Ekvivalencija koja se koristi u koraku
1	Uklanjanje $\leftrightarrow$	[1] $(F \leftrightarrow G) \equiv ((\sim F \lor G) \land (\sim G \lor F))$
2	Uklanjanje $\to$	[2] $(F \to G) \equiv (\sim F \lor G)$
3	Smanjivanje dosega operatora negacije tako da se odnosi samo na jedan atom	[De Morganovi zakoni] [3a] $\sim(F \lor G) \equiv (\sim F \land \sim G)$ [3b] $\sim(F \land G) \equiv (\sim F \lor \sim G)$
4	Transformacija u konjunkciju klauzula	[Distributivnost] [4a] $(F \lor (G \land H)) \equiv ((F \lor G) \land (F \lor H))$ [4b] $((G \land H) \lor F) \equiv ((G \lor F) \land (H \lor F))$

Primjer: Pretvori formulu $((C \lor D) \to (\sim A \leftrightarrow B))$ u njoj ekvivalentnu konjunkciju klauzula slijedeći četiri prethodna koraka.

	$((C \lor D) \to (\sim A \leftrightarrow B))$	
$\equiv$	$((C \lor D) \to ((\sim(\sim A) \lor B) \land (\sim B \lor \sim A)))$	ekvivalencijom [1]
$\equiv$	$((C \lor D) \to ((A \lor B) \land (\sim B \lor \sim A)))$	eliminacija dvostruke negacije
$\equiv$	$(\sim(C \lor D) \lor ((A \lor B) \land (\sim B \lor \sim A)))$	ekvivalencijom [2]
$\equiv$	$((\sim C \land \sim D) \lor ((A \lor B) \land (\sim B \lor \sim A)))$	ekvivalencijom [3a]
$\equiv$	$(((\sim C \land \sim D) \lor (A \lor B)) \land ((\sim C \land \sim D) \lor (\sim B \lor \sim A)))$	ekvivalencijom [4a]
$\equiv$	$((\sim C \lor A \lor B) \land (\sim D \lor A \lor B)) \land ((\sim C \land \sim D) \lor (\sim B \lor \sim A))$	ekvivalencijom [4b]
$\equiv$	$((\sim C \lor A \lor B) \land (\sim D \lor A \lor B) \land (\sim C \lor \sim B \lor \sim A) \land (\sim D \lor \sim B \lor \sim A))$	ekvivalencijom [4b]

Prije primjene rezolucijskog pravila formula se mora pretvoriti u konjunkciju klauzula.

Istinitost konjunkcije klauzula znači istinitost svake pojedine klauzule, pa se konjunkcija klauzula može pisati kao skup klauzula u kojem se implicitno podrazumijeva konjunkcija.

Formula je u **klauzalnom obliku** ako je napisana u obliku skupa klauzula između kojih se implicitno podrazumijeva konjunkcija.

Primjer $(\sim C \lor A \lor B) \land (\sim D \lor A \lor B) \land (\sim C \lor \sim B)$
u klauzalnom obliku $\{(\sim C \lor A \lor B), (\sim D \lor A \lor B), (\sim C \lor \sim B)\}$
ili se klauzule mogu pisati jedna ispod druge:

$\sim C \lor A \lor B$
$\sim D \lor A \lor B$
$\sim C \lor \sim B$

Rezolucijsko pravilo[1] (engl. resolution rule)

Razmotrimo primjer:

komplementarni literali

disjunkcija n literala, n ≥ 0.

RODITELJSKE KLAUZULE

(I1) $B \vee F$
(I2) $\sim B \vee G$

Rezolucijskim pravilom se izvodi (I3)

REZOLVENTNA KLAUZULA

(I3) $F \vee G$

Rezolventna klauzula (engl. *resolvent*) dobivena je zaključivanjem ili razrješavanjem roditeljskih klauzula (I1) i (I2) s obzirom na komplementarne literale B i ~B.

Klauzula (I1) i (I2) su premise iz kojih se izvodi (I3).

Poseban slučaj:

(I1) B
<u>(I2) ~B</u>
(I3) *NIL*

[1]**Napomena:** rezolucijsko pravilo može se još nazvati i **pravilo razrješavanja.**
[1]Robinson, J.A. (1965). A machine-oriented logic based on the resolution principle, Journal of the ACM, 12(1), 23-41.

Čime je poduprto rezolucijsko pravilo?

Dokažimo da je rezolucijsko pravilo zdravo, tj. da je (I3) logička posljedica (I1) i (I2).

(I1) je uporabom ekvivalencija [1], [20], [2] …. **(F1) $\sim F \rightarrow B$**
(I2) je uporabom ekvivalencije [2]…………………..**(F2) $B \rightarrow G$**

(F1) i (F2) uz pravilo ulančavanja [8] ……………… **(F3) $\sim F \rightarrow G$**
(F3) primjenom ekvivalencije [2], [1] ….……….. **(I3) $F \vee G$**

Time smo potvrdili da je rezolucijsko pravilo zdravo, tj. da je rezolventa logička posljedica roditeljskih klauzula.

Kako se još može pokazati da je rezolucijsko pravilo zdravo?

Tablicama istinitosti kojima se pokazuje da je:

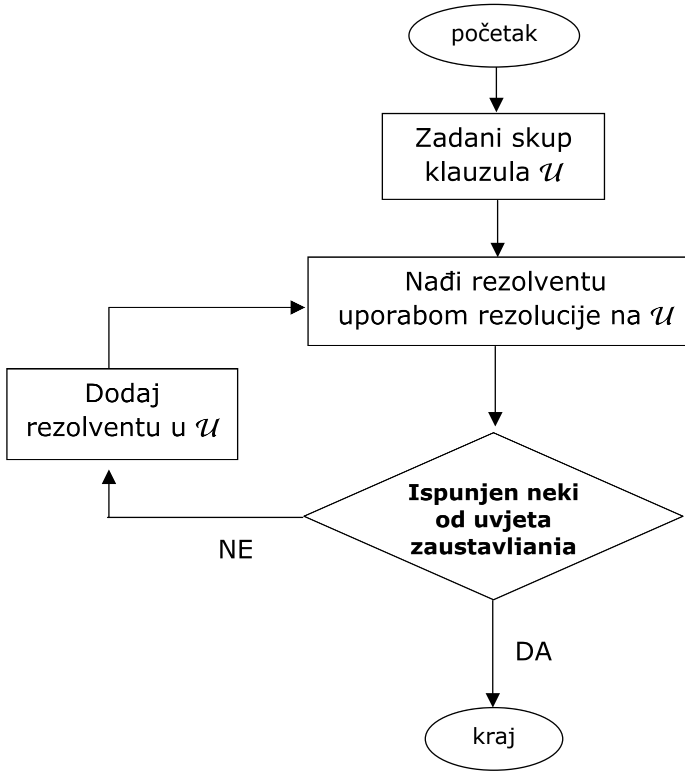
- $(((B \vee F) \wedge (\sim B \vee G)) \rightarrow (F \vee G))$ tautologija
- $(((B \vee F) \wedge (\sim B \vee G)) \wedge \sim(F \vee G))$ kontradikcija

Rezolucijsko pravilo kao generalizacija pravila modus ponensa i modus tollensa

Rezolucijsko pravilo može se shvatiti kao generalizacija pravila zaključivanja modus ponensa i modus tollensa, ako je jedna od roditeljskih klauzula jedinična.

	Premise	Izvedena logička posljedica
1	C $C \rightarrow D$	D prema modusu ponensu
	C $\sim C \vee D$	D prema rezoluciji
2	~D $C \rightarrow D$	~C prema modusu tollensu
	~D $\sim C \vee D$	~C prema rezoluciji

Rezolucijsko zaključivanje (engl. resolution deduction)



Uvjeti zaustavljanja:

- izvedena je ciljna formula
- ne može se više izvesti nova formula
- iscrpljeni su računalni resursi

Primjer rezolucijskog zaključivanja:

Skup $\mathcal{U}$

[I1] ~A ∨ ~C

[I2] ~A ∨ C ∨ D

[I3] A ∨ D ∨ E

[I4] ~ D

[I5] ~ E

Slijedi niz rezolventi izvedenih rezolucijskim zaključivanjem:

[I6] ~A ∨ C / I2 i I4 /

[I7] A ∨ E / I3 i I4 /

[I8] D ∨ E ∨ C / I3 i I6 /

[I9] C ∨ E / I6 i I7 /

.
.
.

Potpunost rezolucije opovrgavanjem

Pretpostavimo da je skup klauzula $\mathcal{U}$ nekonzistentan.
Dokazano je da će se tada rezolucijskim zaključivanjem doći do nekonzistentne klauzule. Na primjer, B i ~B koji se svode na *NIL.*
Kako je NIL izvedeno iz $\mathcal{U}$ rezolucijskim pravilom svaka interpretacija koja zadovoljava $\mathcal{U}$ mora zadovoljavati NIL. Kako ni jedna interpretacija ne zadovoljava NIL, tada ni jedna ne zadovoljava $\mathcal{U}$, što znači da je $\mathcal{U}$ proturječje.

Izvođenje NIL iz $\mathcal{U}$ znači da je $\mathcal{U}$ proturječno.

G je logička posljedica premisa F1, F2, …, Fn **akko** je (F1 ∧ F2 ∧ … ∧ Fn ∧ ~G) proturječje.

Također smo pokazali da se svaka formula može pretvoriti u klauzalni oblik.

Iz navedenog slijedi:

> Formula G je logička posljedica premisa F1, F2, …, Fn **akko** se rezolucijskim zaključivanjem može izvesti *NIL* klauzula iz **ulaznog skupa** klauzula F1, F2, … , Fn, ~G.

Rezolucijsko zaključivanje opovrgavanjem je potpuno: ako je G teorem onda će se rezolucijom opovrgavanjem to i dokazati. To ne vrijedi za izravnu metodu rezolucije.

> Rezolucija opovrgavanjem je potpuna.

Primjer

[I1] A } premise
[I2] ~A ∨ C

Želimo dokazati: [I3] A ∨ C } ciljna formula

Samo rezolucijom opovrgavanjem (bez drugih pravila) možemo dokazati ciljnu klauzulu!

Za rezoluciju opovrgavanjem potrebno je A ∧ (~A ∨ C) ∧ ~(A ∨ C) pretvoriti u ekvivalentni skup klauzula:

A ∧ (~A ∨ C) ∧ ~(A ∨ C) ≡

/De Morganovi zakoni [23]/

A ∧ (~A ∨ C) ∧ ~A ∧ ~C

izravno rezolucijsko zaključivanje	rezolucija opovrgavanjem
[I1] A [I2] ~A ∨ C rezolventa [I3] C NE MOŽEMO DOKAZATI CILJNU FORMULU SAMO UPORABOM REZOLUCIJE!	[I1] A [I2] ~A ∨ C [I4] ~A [I5] ~C rezolventa [I6] *NIL* /I1 i I4 / DOKAZALI SMO CILJNU FORMULU !

Napomena:

Rezolucija opovrgavanjem je potpuna uz uvjet da su klauzule faktorizirane. Faktorizacija je ekvivalencija ([13]) G ∨ G ≡ G kojom se višekratno pojavljivanje istog literala zamjenjuje sa jednim literalom.

Primjer koji pokazuje važnost faktorizacije kod rezolucije.

Neka je dan skup klauzula

[I1] B ∨ B
[I2]~B ∨ ~B

Taj je skup proturječan, ali primjenjujući pravilo rezolucije na njega izvodimo

[I3] B ∨ ~B , a to je tautologija!

Pretpostavljat ćemo da su sve klauzule u ulaznom skupu faktorizirane. Također, svaka se izvedena rezolventa zamijenjuje faktoriziranom klauzulom.

Rezolucijom opovrgavanjem dokazati ćemo svaku formulu koja je logička posljedica danih premisa.

Primjer (isti primjer kao i za prirodno zaključivanje)

Neka je dan skup premisa:

[1] A

[2] B

[3] $A \wedge C \rightarrow D$

[4] $B \rightarrow C$

Treba dokazati da je D logička posljedica danih premisa.
D je ciljna formula.

Premise i negacija ciljne formule pretvaraju se u klauzalni oblik te to zajedno čini ulazni skup.

[I1]	A	premise	ulazni skup
[I2]	B		
[I3]	$\sim A \vee \sim C \vee D$		
[I4]	$\sim B \vee C$		
[I5]	$\sim D$	negacija cilja	

Iz gornjeg skupa možemo izvesti slijedeće rezolvente:

[I6] $\sim A \vee \sim C$ / razrješavanjem [I3] i [I5] /

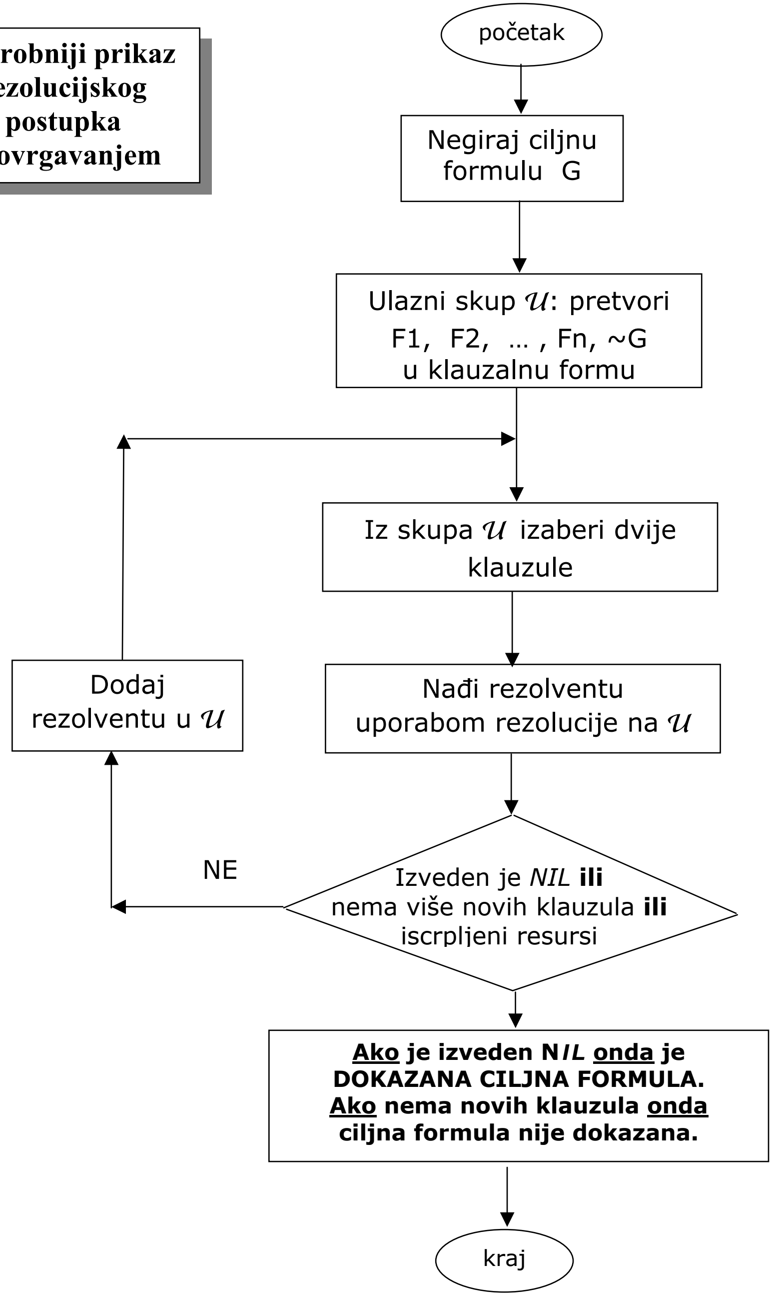
[I7] $\sim C$ / razrješavanjem [I1] i [I6] /

[I8] $\sim B$ / razrješavanjem [I4] i [I7] /

[I9] *NIL* / razrješavanjem [I2] i [I8] /

Cilj je dokazan jer je izvedena prazna klauzula *NIL*.

Podrobniji prikaz rezolucijskog postupka opovrgavanjem



Napomena: klauzule su faktorizirane !

Zadatak

Da li je P logička posljedica Q i $P \vee Q$?

P	Q	$P \vee Q$	$Q \wedge (P \vee Q)$	$(Q \wedge (P \vee Q)) \rightarrow P$
t	*t*	*t*	*t*	*t*
t	*f*	*t*	*f*	*t*
f	*t*	*t*	*t*	*f*
f	*f*	*f*	*f*	*t*
			po definiciji	*izravnom metodom dokazano* ***nije tautologija***