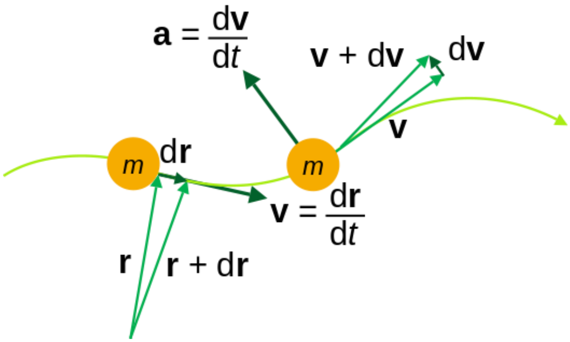
5 Dinamika

- grana klasične mehanike – povezuje gibanje s djelovanjem sile
  - dinamika materijalne točke, krutog tijela, fluida, kvantna …
  - masa, inercija
  - tijelo ne smatramo točkom
  - ovisno o svojstvima materijala različit je učinak interakcije tijela
- podjela
  - direktna – nastalo gibanje nastalo djelovanjem sila
  - inverzna – koje sile su potrebne kako bi ostvarili zadano gibanje(inverzna dinamika)
- promatramo
  - poziciju, brzina, akceleracija https://playcanv.as/p/0UuVThz7/
  - orijentacija, kutna brzina, kutna akceleracija
- primjeri
  - sustavi čestica https://www.escapemotions.com/experiments/magic_effect/index.php
  - sustavi objekata https://playcanv.as/p/vexafQ6D/ / http://lo-th.github.io/labs/index.html Crowd test
  - https://oosmoxiecode.com/archive/js_webgl/spiders_2_hammertime/
  - sustavi opruga i čestica (tkanina, kosa) https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs-basics/latest/masses-and-springs-basics_en.html
  - dinamički deformabilni objekti https://www.youtube.com/watch?v=0vMllWRX6SI
  - dinamika fluida



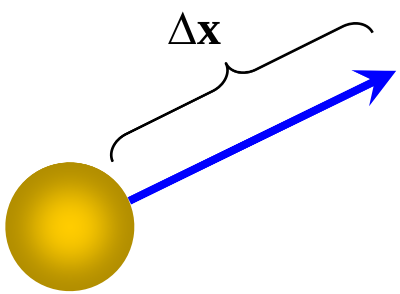
- pozicija, brzina, akceleracija
  - pozicija $\mathbf{x}(t)$
  - brzina $\mathbf{v}(t) = \mathrm{d}\mathbf{x}(t)/dt$
  - akceleracija $\mathbf{a}(t) = \mathrm{d}\mathbf{v}(t)/dt = d^2\mathbf{x}(t)/dt^2$
- za konstantnu akceleraciju
  - akceleracija $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}_0$
  - brzina $\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\, dt = \mathbf{a}_0\, t + \mathbf{v}_0$
  - pozicija $\mathbf{x}(t) = \int \mathbf{v}(t)\, dt = ½\, \mathbf{a}_0\, t^2 + \mathbf{v}_0\, t + \mathbf{x}_0$
- masa, moment, sila, težina
  - masa m
  - moment $\mathbf{P} = \mathrm{m}\, \mathbf{v}$
  - sila $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{dt} = \mathrm{m}\, \mathbf{a}$, $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$
  - Fizikalni pogon: http://brm.io/matter-js/ http://el-ement.com/etc/oimo/demos/
    djelovanje sila uzrokuje promjenu momenta (akceleracije)
  - težina $\mathbf{F} = \mathrm{m}\, \mathbf{g}$, (Zemlja $|g| = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$)
  - trenje (statičko, dinamičko), opruge, gustoća fluida
- orijentacija, kutna brzina, kutna akceleracija
- inercija rotacije, kutni moment, obrtni moment

5.1. Sustavi čestica (engl. particle systems)

- intenzivno se koriste u računalnoj animaciji od 80'tih godina (genesis)
- pravila ponašanja pojedine čestice mogu biti relativno jednostavna, a složen izgled postiže se velikim brojem čestica
- u sustavu se obično definira rađanje, promjene koje se dešavaju tijekom vremena i umiranje čestica
- koriste se
  - simulacija vatre, vatrometa
    - http://www.escapemotions.com/experiments/fluid_fire_3
  - vode – vodoskok, slap snijeg, kiša (oborine) https://threejs.org/examples/#webgpu_compute_particles_rain
  - simulacija tkanine, kose https://codepen.io/dpdknl/embed/JrgrJN?#result-box https://medium.com/@Zadvorsky/fuzzy-meshes-4c7fd3910d6f https://oosmoxiecode.com/archive/js_webgl/hair/
  - simulacija većih skupina objekata (pauci) https://oosmoxiecode.com/archive/js_webgl/autumn/
- utjecaj na pojedinu česticu može biti temeljen na fizikalnim zakonima ili možemo kombinirati s ne fizikalnim pravilima
  - http://oosmoxiecode.com/archive/js_webgl/particles_morph/

Kinematika čestica

– za pojedinu česticu definiramo pozicija, brzinu i akceleraciju



položaj	$\mathbf{x}(\mathrm{t})$	$\mathbf{x}$
brzina	$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}$	$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$
akceleracija	$\mathbf{a}(\mathrm{t}) = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}} = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^2}$	$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}}$

– zanima nas pozicija čestice, uz konstantnu akceleraciju $\mathbf{a}_\mathrm{p}$:

brzina $$\mathbf{v}(\mathrm{t}) = \int \mathbf{a}\, dt = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}_p t$$

položaj čestice $$\mathbf{x}(\mathrm{t}) = \int \mathbf{v}\, dt = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}_p t^2}{2}$$

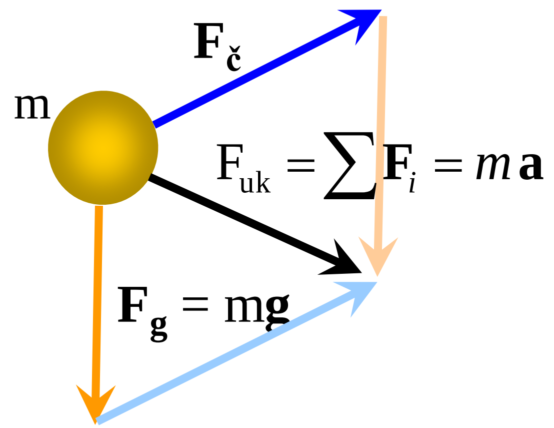
– vektorska jednadžba: pozicija, brzina i akceleracija su vektori u 3D

– pozicija slijedi parabolu u 3D prostoru, a parabola leži u ravnini

Masa čestica i sile na česticu

– za pojedinu česticu definiramo masu
– sila je definirana kao promjena momenta, odnosno $\mathbf{F}_{\mathbf{uk}} = m\mathbf{a}$

http://chandlerprall.github.io/Physijs/examples/jenga.html



– zadati početne pozicije, brzine i mase čestica – **ponavljaj za Δt**
1. izračunaj sve sile koje djeluju na čestice i odredi ukupnu silu $\mathbf{F}_{uk}$
2. izračunaj akceleraciju svih čestica $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_{uki}/m_i$
3. izračunaj brzine i poziciju čestica postupkom numeričke integracije

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \qquad \text{opcenito}: \quad \ddot{\mathbf{x}} = f\left(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t\right)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

Postupci numeričke integracije

Eksplicitni Eulerov postupak

- jednostavan za implementaciju, s desne strane su vrijednosti iz n-tog koraka
- zbog akumuliranja pogreške nije pogodan za simulacije gdje egzaktno treba odrediti izračunate vrijednosti
- nije bezuvjetno stabilan – potreban je mali korak integracije

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a} \qquad \frac{(\boldsymbol{v}_{n+1} - \boldsymbol{v}_n)}{\Delta t} = \boldsymbol{a}_n \qquad \boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{a}_n \Delta t \qquad \boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{v}_n + g(t_n, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{v}_n)\, \Delta t$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v} \qquad \frac{(\boldsymbol{x}_{n+1} - \boldsymbol{x}_n)}{\Delta t} = \boldsymbol{v}_n \qquad \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{v}_n \Delta t \qquad \boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + f(t_n, \boldsymbol{v}_n)\, \Delta t$$

Implicitni Eulerov postupak

$$\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{v}_n + g(t_{n+1}, \boldsymbol{x}_{n+1}, \boldsymbol{v}_{n+1})\, \Delta t$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + f(t_{n+1}, \boldsymbol{v}_{n+1})\, \Delta t$$

Polu implicitni Eulerov postupak (forward-backward) mala modifikacija (i dalje je eksplicitni postupak)

- dobivenu brzinu u prvoj jednadžbi uvrštavamo u drugu
- dovoljni dobar za većinu čestičnih sustava u animaciji
- poboljšana stabilnost

$$\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{v}_n + g(t_n, \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{v}_n)\, \Delta t$$

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + f(t_n, \boldsymbol{v}_{n+1})\, \Delta t$$

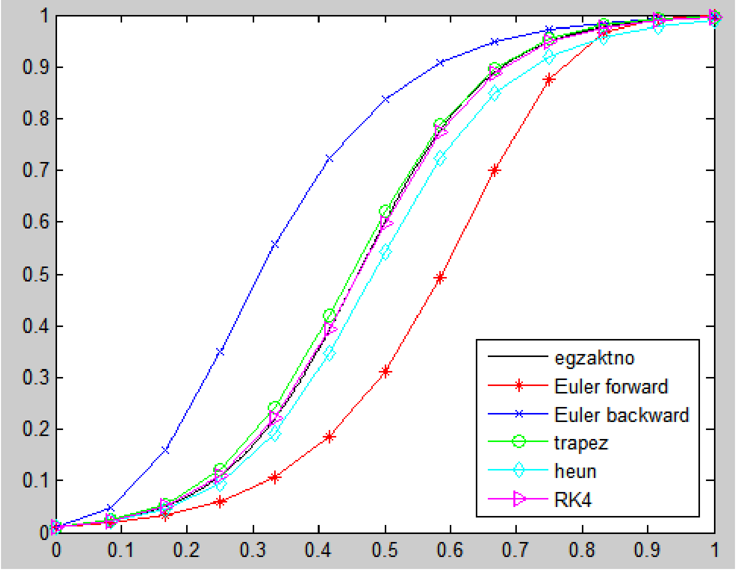
Postupci numeričke integracije

Runge Kutta postupak (vidi APR)

– problem točnosti, stabilnosti postupaka

– PostupakIntegracijeSource\Stephen Bond Spring Mass Applet.htm/ (t=0,01 i 0,05)

– https://lmesaric.github.io/ODE-Explorer/

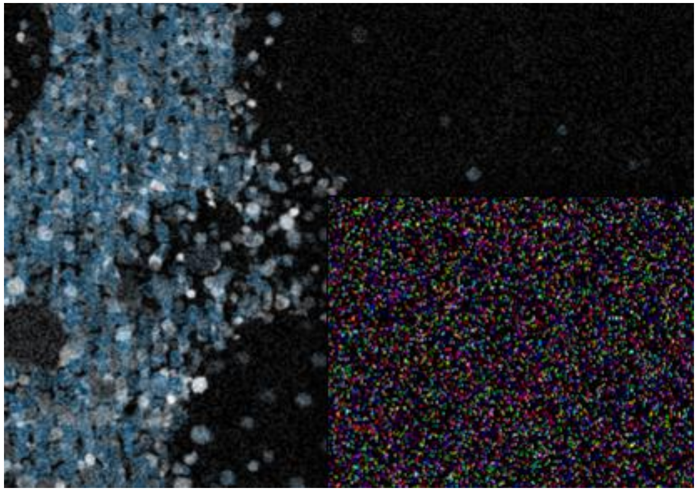


Jedna opruga - točnost/dt

GPU

– efikasno korištenje memorije za pohranu podataka o česticama (u RGB komponente pohranimo vektore brzine, pozicije ..), korištenje sjenčara (pixel shader) za proračun novog stanja

– https://www.clicktorelease.com/code/THREE.FBOHelper/



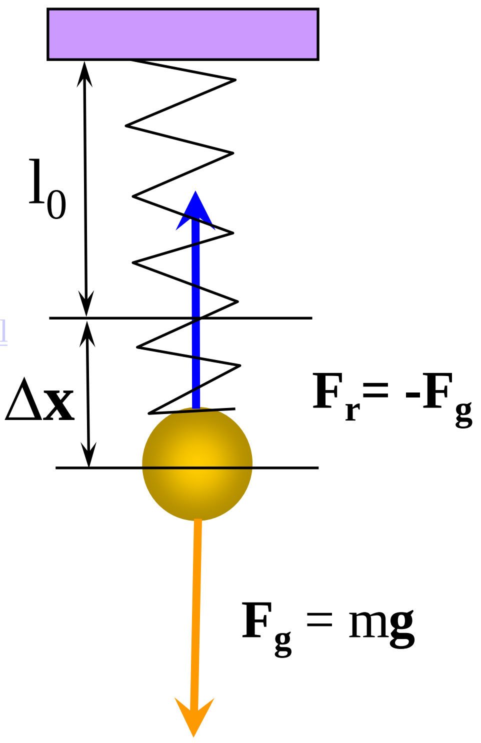
5.2. Sustav opruga i čestica (masa):

Opruga:

- u ravnotežnom položaju suma sila je nula
- Hooke-ov zakon
  - k_s konstanta opruge
  - $\Delta\mathbf{x}$ pomak iz ravnotežnog položaja (elongacija)

$$\mathbf{F}_{opruge} = -k_s\,\Delta\mathbf{x}$$

https://phet.colorado.edu/sims/html/masses-and-springs/latest/masses-and-springs_en.html



Ravnotežno stanje i jednostavno harmonijsko titranje:

http://www.walter-fendt.de/html5/phen/springpendulum_en.htm
http://www.intmath.com/applications-integration/7-work-variable-force.php#springlnk

Prigušeno gibanje – dodajemo silu prigušenja

(gubi se dio energije)

- b konstanta prigušenja
- v brzina tereta (u smjeru opruge)

$$\mathbf{F}_b = -b\,\mathbf{v}$$

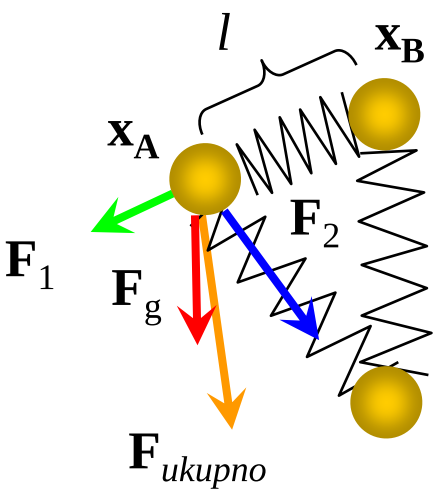
Ukupna sila:

$$\mathbf{F}_{ukupno} = m\mathbf{g} - k_s\Delta\mathbf{x} - b\,\mathbf{v}$$

Sustav opruga i masa:

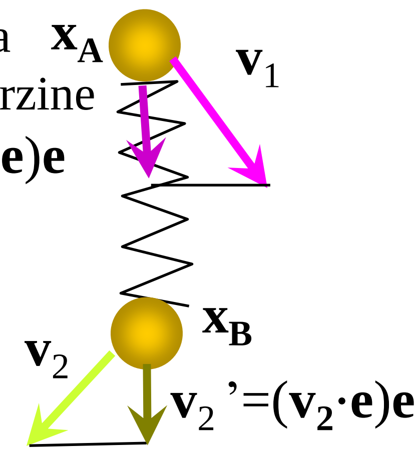
– niz kuglica masa m_i vežemo oprugama

http://www.mscs.dal.ca/~selinger/lagrange/doublespring.html
http://pmneila.github.io/jsexp/massspring/ (Chrome)
https://threejs.org/examples/physics_ammo_cloth



$\mathbf{x}$	pozicija
l	razmak kuglica
l_0	normalna duljina opruga
$\mathbf{e}$	jed. vektor u smjeru opruge
$\mathbf{v}$	brzina
$\mathbf{a}$	akceleracija
m	masa
$\mathbf{F}$	sila

projekcija vektora brzine
$\mathbf{v}_1' = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$



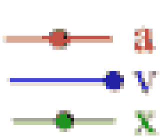
$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A}{\left|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A\right|}$$

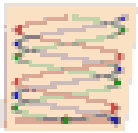
$$\mathbf{F}_{opruge} = -k_s \Delta\mathbf{x} = -k_s (l_0 - l)\mathbf{e}$$

$$\mathbf{F}_b = -b\,\mathbf{v} = -b(\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1)$$

$$\mathbf{F}_{ukupno} = m\mathbf{g} - k_s \Delta\mathbf{x} - b\,\mathbf{v} \quad \rightarrow \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_{ukupno}}{m} \quad \rightarrow \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

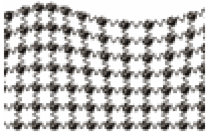
Simulacija tkanine sustavom opruga i masa:



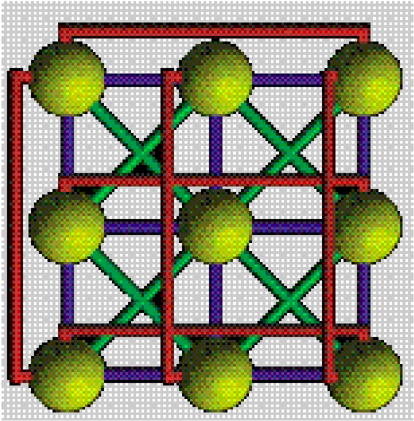


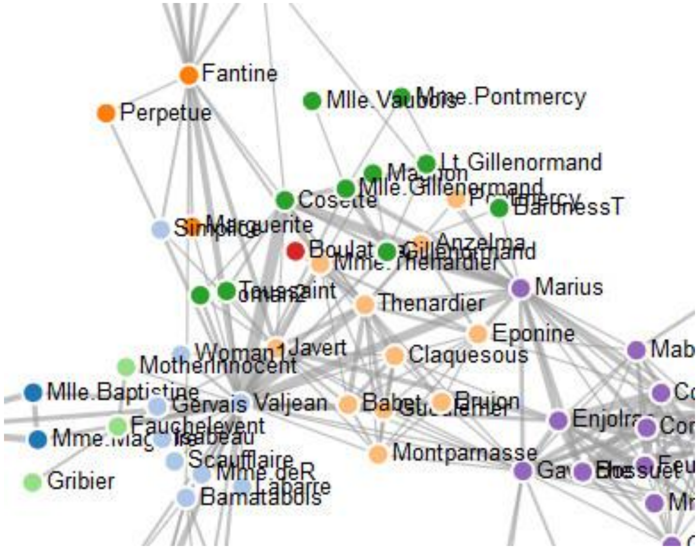
- različite objekte možemo opisati sustavom opruga i masa
  http://www.potatoland.org/solid/

- tkaninu možemo opisati sustavom opruga i masa
  http://andrew-hoyer.com/experiments/cloth/ https://codepen.io/dissimulate/pen/KrAwx
  http://zcr1.github.io/cloth/ https://www.shadertoy.com/view/MldXWX GPU /
  http://schteppe.github.io/gpu-springs/ GPU https://timvanscherpenzeel.github.io/Thesis/ Chrome



- dodatne opruge smične i pregibne

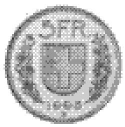




- druge primjene - grafovi:
- http://barradeau.com/one-trick-ponies/2/
- http://anvaka.github.io/ngraph/examples/three.js/Basic/index.html?graph=balancedBinTree&n=6
- https://bl.ocks.org/heybignick/3faf257bbbbc7743bb72310d03b86ee8
- slikanje https://www.escapemotions.com/experiments/flame/index.php

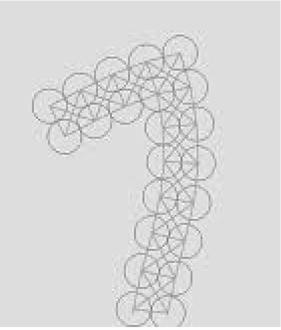
Dinamika kose:

hair https://theoberg.com/things/furball/



Simulacija povezanih i nepovezanih čestica:

https://punkoffice.com/tracksuit/ sand fire

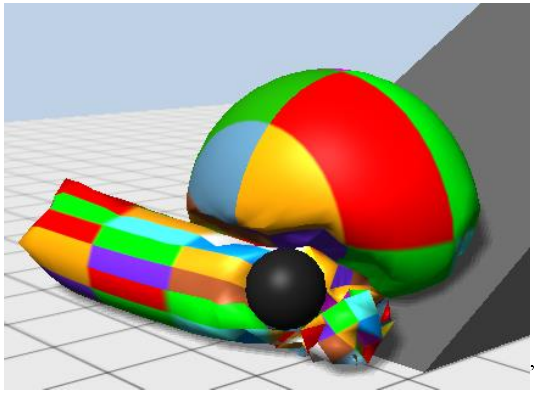


Dinamika 2D objekta:

http://codepen.io/gordonnl/pen/LvJiG http://pablotheflamingo.com/

Dinamika 3D objekta:

http://kantedal.github.io/soft-body-app/
http://kripken.github.io/ammo.js/examples/webgl_demo_softbody_volume/index.html



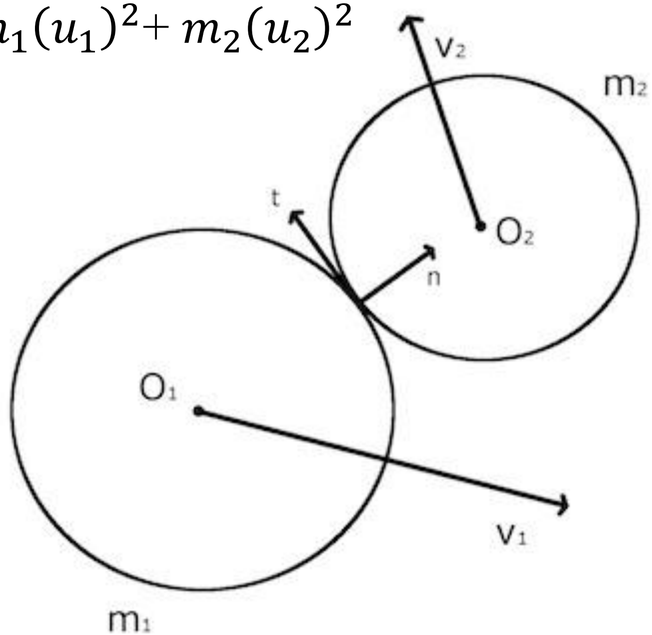
https://schteppe.github.io/gpu-physics.js/?n=128

http://lo-th.github.io/Ammo.lab/#car_advanced

Elastični sudar dvije kugle

Očuvanje momenta: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

Očuvanje kinetičke energije: $m_1 (v_1)^2 + m_2 (v_2)^2 = m_1 (u_1)^2 + m_2 (u_2)^2$



m_1 m_2 – mase kuglica

v_1 v_2 – brzina prije sudara

u_1 u_2 – brzina nakon sudara

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$$

https://playground.babylonjs.com/#7149G4#0

x_1 x_2 – pozicija središta (centar mase) u trenutku kontakta,

$\langle \quad \rangle$ skalarni produkt vektora

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{\langle \boldsymbol{v_1} - \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} \rangle}{\| \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2} \|^2} (\boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2})$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \frac{\langle \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} \rangle}{\| \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} \|^2} (\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1})$$

5.3. Dinamika fluida

- fluidi - tekućine, plinoviti
- kontinuirano mijenjaju oblik

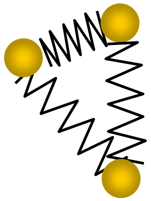
pod djelovanjem sile (kruti objekti se pomiču a elastični i deformiraju)

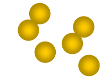
- fizikalni parametri u opisu fluida
  - tlak, gustoća, brzina
  - viskoznost, površinska napetost, smicanje - interakcija s krutim tijelima (kruti fluidi) interakcija više fluida
  - promjena vrijednosti ovisno o temperaturi - grijanjem fluidi mogu promijeniti svojstva
- Mach broj – stlačivost (brzina toka/brzina širenja zvuka u sredstvu)
  - nestlačivi Ma < 0.3 - tekućine / stlačivi fluidi – plinovi
- Reynoldsov broj - tok fluida
  - laminaran – glatka putanja toka
  - turbulentan – vrtloženje (Re > 2 320) water
- zakon očuvanja mase, energije, linearnog momenta, zakoni termodinamike

Osnovna podjela metoda za izradu modela kojima opisujemo fluide:

Lagrangeova metoda

- model sadrži niz točaka koje mijenjaju poziciju u prostoru
- npr. modeli sačinjeni od opruga i masa
- mogu biti s topološkim podacima (s mrežom - opruge) ili bez topoloških podataka (bez mreže - čestice)

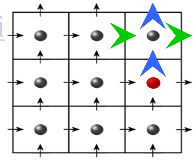




http://david.li/flow/ http://david.li/fluid/

Eulerova metoda

- promatra se skup stacionarnih točaka u prostoru za koje se provode izračuni https://nerget.com/fluidSim/ (24) https://paveldogreat.github.io/WebGL-Flui



Kombinirane

- koriste kombinaciju prethodna dva principa

(Lattice Boltzmann Method, LBM) https://www.shadertoy.com/view/4dK3zG

- hidrodinamika zaglađivanjem domene čestica SPH

(Smoothed-particle hydrodynamics) http://p.brm.sk/fluid/

https://ttnghia.github.io/posts/sph-fluid-simulation-v2/

- postavljamo osnovne fizikalne zakone na promatrani model – sustav jednadžbi (PDE Partial differential equation) linearne ili nelinearne
- sustavi (diferencijalnih) jednadžbi se rješavaju postupcima
  - Eulerov, obrnuti Eulerov postupak
  - Runge-Kutta, Verlet,
  - Adams …
- razlike korištenih postupaka su u
  - stabilnosti
  - konvergenciji
  - točnosti
  - brzini izvođenja

  - prikazu čestica http://www.adultswim.com/etcetera/soup/

Problem je što su eksplicitni postupci integracije (Euler) stabilni samo za mali korak integracije Δt. Implicitni postupci integracije (obrnuti Euler) dozvoljavaju veliki korak integracije ali postavljeni sustav jednadžbi treba riješiti za svaki vremenski korak. Linearni sustav PDE je općenito lakše rješiv i stabilniji, no linearizacija elastičnih sila vrijedi samo za male deformacije.

Navier-Stokesove jednadžbe

- opisuju tok Newton-ovog fluida – očuvanje mase i momenta
  - **u** - vektor brzine fluida, *t* - vrijeme
  - *p* - tlak $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (I)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \qquad \text{(II)}$$

  - ρ - gustoća fluida
  - ν - kinematička viskoznost – unutarnje trenje u fluidu
    http://www.esimov.com/experiments/javascript/fluid-solver-mono/

(npr. gibanje noža kroz različite fluide daje različiti otpor)

  - **f** - vanjske sile koje djeluju na fluid http://haxiomic.github.io/GPU-Fluid-Experiments/html5

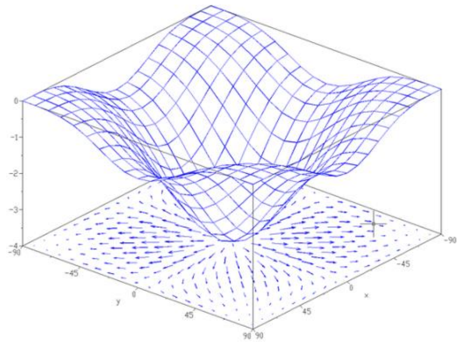
I jednadžba - izvedenica zakona o očuvanju mase za nestlačive fluide

(ne postoji promjena brzine koja izlazi izvan volumena fluida tj. količina fluida koji uđe u neko određeno područje je jednaka količini fluida koja izađe)

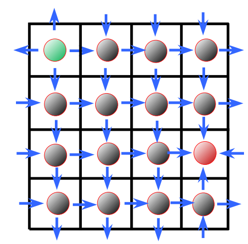
II jednadžba - 4 člana (ovisno o svojstvima fluida neki mogu biti zanemarivi)

- advekcija $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ "ubačen" djelić toka gibat će se u smjeru gradijenta vektora brzine
- razliku tlaka - fluid se giba iz područja višeg tlaka u područje nižeg
- $\nu \nabla^2 \mathbf{u}$ difuzija fluida – sila viskoznosti stvara težnju ujednačavanja brzina unutar fluida
- **f** – suma svih vanjskih sila FER http://edankwan.com/experiments/icicle-bubbles/

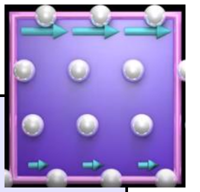
Operatori



- Hamiltonov operator $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$
  - gradijent (na skalar) $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k$
    http://mathinsight.org/applet/gradient_directional_derivative_mountain
  - divergencija (na vektor) $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
  - npr: djelovanje vektorskog polja https://github.com/rohanp/vectorfield



  - Laplaceov operator $(\nabla \cdot \nabla)\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$



Operacija	Zapis	Opis	Domena → kodomena
Gradijent	$\operatorname{grad}(f) = \nabla f$	mjeri iznos i smjer promjene u polju skalara	polje skalara → vektorsko polje
Divergencija	$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F}$	mjeri jačinu izviranja/ poniranja u promatranoj točki vektorskog polja	vektorsko polje → polje skalara
Vrtložnost	$\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F}$	mjeri tendenciju rotacije oko točke vektorskog polja http://mathinsight.org/curl_idea	vektorsko polje → vektorsko polje
Laplacijan	$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$	kompozicija divergencije i gradijenta	polje skalara → polje skalara

Numeričke metode

- računalna dinamika fluida (engl. *computational fluid dynamics* - CFD).
- metoda konačnih razlika FD, (*finite volume* FV, *finite element* FE)
- za 3D prostor (*i, j, k*) $\nabla p = \left(p_x, p_y, p_z\right).$
- provođene diskretizacije (parcijalne derivacije zamjenjujemo konačnim razlikama

(aproksimacija prvim članom Taylorovog reda)

http://www.ibiblio.org/e-notes/webgl/gpu/fluid.htm

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \qquad \text{iz} \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \underbrace{\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}}_{(1)} \underbrace{- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \ldots}_{(2)}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}$$

- postavljene jednadžbe implementiramo korištenjem numeričkih metoda

- simulacija fluida česticama (SPH - Smoothed Particle Hydrodynamics)
  Langrange metoda simulacije fluida
  http://www.escapemotions.com/experiments/fluid_water_3/

  http://dev.miaumiau.cat/sph/ (Chrome)
  http://philogb.github.io/LIC/fluid.html
  http://jamie-wong.com/2016/08/05/webgl-fluid-simulation/

Postupci numeričke integracije

Leapfrog metoda

- pozicija se računa na temelju brzine između dva koraka integracije

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{v}_{n-(1/2)}\,\Delta t$$

$$\mathbf{v}_{n+(1/2)} = \mathbf{v}_{n-(1/2)} + \mathbf{a}_n\,\Delta t$$

- sustav je moguće izraziti i pomoću cjelobrojnih indeksa

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n\,\Delta t + \mathbf{a}_n\,\frac{\Delta t^2}{2}$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \left(\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}\right)\frac{\Delta t}{2}$$

- razlika u odnosu na običnu Eulerovu metodu integracije je što se doprinos akceleracije na brzinu računa koristeći trenutnu i prethodnu vrijednost (metoda drugog reda)

Vremenski korak

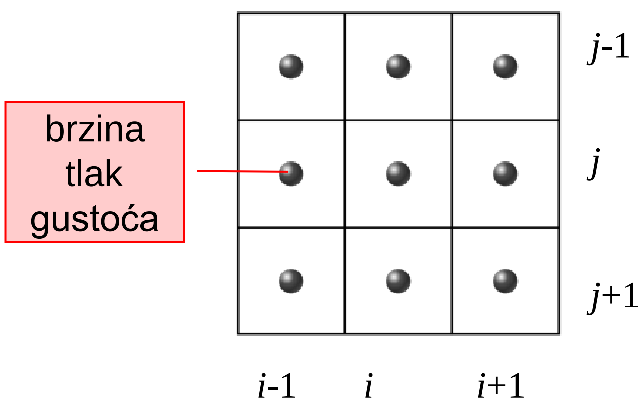
- nužan uvjet za konvergenciju Courant-Friedrichs-Lewy uvjet
- gdje je Δt vremenski korak integracije, $\mathbf{v}$ je brzina, a Δx je veličina rešetke

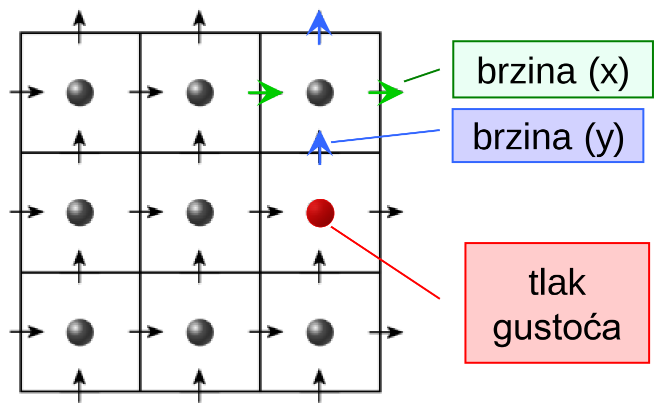
$$\mathbf{v}\,\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Diskretizacija prostora

- izračunavanje vrijednosti u središtima elemenata volumena
  - vizualizacija parametara http://alteredqualia.com/xg/examples/microsurface.html
- izračunavanje vrijednosti na rubovima i u središtima ćelija pogodnije zbog problema divergencije numeričkih postupaka

https://codepen.io/FWeinb/pen/JhzvI





Diskretizacija po vremenu

- numerička integracija (rješavanje PDE)
  - rješavanje nelinearnih jednadžbi (ako postoje)

Vizualizacija (implicitno definirane površine)

http://dev.miaumiau.cat/sph/