

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

DIPLOMSKI RAD 1848

**MODEL DISTRIBUCIJE
REFLEKTIRANOG SVJETLA**

Marko Baćić

Zagreb, 10. lipnja 2010.

Sadržaj

1.1 Uvod	2
1.2 Svetlost kao čestica	2
1.3 Svetlo kao val	2
2 Teorija svjetlosnog polja.....	4
2.1 Transportna teorija.....	4
2.2 Sjajnost.....	5
2.3 Emisivnost	5
2.4 Isijavanje.....	6
3 Refleksijska funkcija.....	7
3.1 Jednadžba iscrtavanja	8
3.1.1 Lokalno osvjetljenje.....	8
3.1.2 Globalno osvjetljenje	8
3.2 Jednadžba isijavanja	10
4 Analiza signala	11
4.1. Kompresija svjetlosnog signala	11
4.2 Sferni harmonici.....	12
4.2.1 Projiciranje i rekonstrukcija.....	15
4.2.2 Svojstva sfernih harmonika	16
5 Monte Carlo integracija	18
5.1 Osnovno o teoriji vjerovatnosti.....	18
5.2 Izvod Monte Carlo integracije	19
6 Svjetlosni izvori	21
7 Rezultati simulacije	24
7.1 Rotacija svjetla.....	25
7.2 Rotacija sfernih harmonika	25
7.3 Izvod prijenosne funkcije	26
7.4 Empirijski rezultati.....	30
8 BRDF	32
8.1 Modeli BRDF-a	32
8.1.1 Oren-Nayar model difuzne refleksije	33
8.1.2 Ward-ov refleksijski model	34
8.1.3 Cook-Torrance model	35
8.1.3.1 Distribucijska funkcija mikroploha	35
8.1.3.2 Geometrijsk izraz G	36
8.1.3.3 Fresnelov izraz	36
8.2 Rezultati izvođenja.....	37
9 Programska implementacija	40
9.1 Generiranje uzorka	40
9.2 Računanje koeficijenata prijenosne funkcije ili BRDF-a	41
9.3 Računanje koeficijenata funkcije distribucije svjetla.....	42
9.4 IsCRTavanje scene	42
9.5 Performanse	43
10 Zaključak	45

1 Osnovno o svjetlosti

1.1 Uvod

Ovisno o tipu problema koji se rješava, fizika nudi više modela gledanja na svjetlost. Dvadesetih godina 20. stoljeća Thomas Young je pokazao da se svjetlost ponaša kao elektromagnetski val. Einstein je nakon njega pokazao da se svjetlost u nekim eksperimentima ponaša kao čestica time potvrdivši Newtonovu predpostavku. Čestica je nazvana fotonom a Einstein u daljem radu na fotoelektričnom efektu dobiva Nobelovu nagradu.

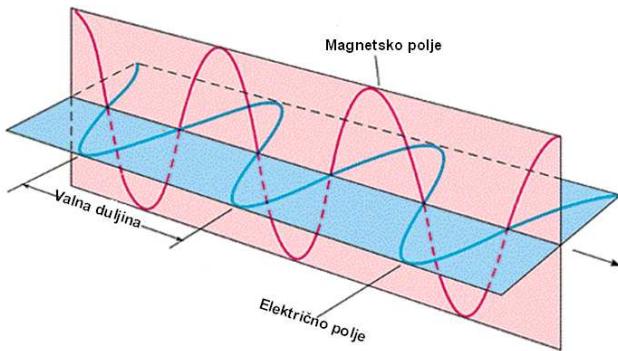
Pronalasci u fizici su uvelike utjecali na računalne modele osvjetljenja u računalnoj grafici, jer se ovisno o problemu koriste oba modela. Tako je boju praktičnije gledati kao val, dok je refleksiju i refrakciju lakše gledati kroz model čestice.

1. 2 Svjetlost kao čestica

Pri promatranju svjetlosti kao čestice fokus je na fotonima. Fotoni su modelirani kao paketići energije koji se kreću konstantnom brzinom i nemaju mase. Kod refleksije svjetla, zraka se gleda kao tok fotona. Iz shvaćanja fotona kao čestice proizlazi da je kut upada jednak kutu refleksije, što se u makro svijetu može usporediti sa slučajem kad biljarska kugla udari o rub stola. U svojoj putanji tok fotona se sudara s okolnim objektima gdje se prilikom sudara dio fotona apsorbira ovisno o svojstvima materijala. Ostatak fotona ne usporava ali ih je brojčano manje time je manja i energija zrake. Iz sudara u sudar naposljetku se kompletna zraka apsorbira. Iz prikazanog je vidljiva prednost ovakvog modela prikaza svjetlosti u intrakciji materijala i svjetla.

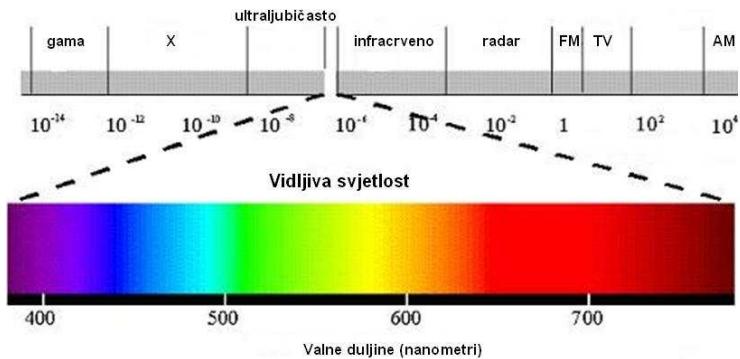
1.3 Svjetlo kao val

Svjetlost uz svojstva karakteristična česticama također posjeduje sve karakteristike elektromagnetskog vala. Prema Maxwelllovoj elektromagnetskoj teoriji valovi električnog i magnetskog polja u izolatoru su transvenzalni. Pritom vektor električnog polja (E) titra u ravnini okomitoj na ravninu u kojoj titra vektor magnetskog polja (H). Obje ravnine sadrže pravac širenja elektromagnetskog vala.



Slika 1. Elektromagnetski val.

Boja vidljive svjetlosti ovisna je o valnoj duljini. Elektromagnetski valovi u vidljivom spektru dani su slikom 2.



Slika 2. Elektromagnetski spektar.

Boja materijala je određena svojstvom materijala da apsorbira svjetlost određene valne duljine i reflektira svjetlost drugih valnih duljina. Svjetlost koja je reflektirana je upravo boja samog materijala. Prilikom modeliranja boje materijala u računalnoj grafici koristi se po jedan kanal za crvenu, zelenu i plavu, svaka od vrijednosti upravo određuje koliki se postotak svjetlosti određene valne duljine reflektira.

Jedno od svojstava valova uz valnu duljinu je i faza koja se definira kao razmak između dva vala. Iz perspektive računalne grafike faza je zanimljiva jer se veže uz interferenciju. Kad se dva ili više valova nalaze u istom prostoru tada međusobno utječu jedan na drugog. Međusobni utjecaj valova može biti konstruktivan ili destruktivan. Ako razmak vala iznosi pola njihove valne duljine govori se o destruktivnom utjecaju jer će se valovi poništiti. Ako su valovi u fazi tada se govri o konstruktivnom utjecaju i rezultantni val ima dvostruko veću amplitudu.

U modelima osvjetljenja faza se koristi kod materijala s nepravilnom površinom gdje se gleda fazna razlika reflektirane svjetlosti kako bi se vidjelo koje su boje pojačane a koje oslabljene.

2 Teorija svjetlosnog polja

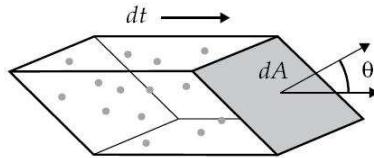
2.1 Transportna teorija

Prilikom izgradnje modela širenja svjetla u okolini koristi se geometrija tokova. Proučavanjem toka u fizici naziva se transportna teorija. Kao čestice koje čine tok uzimaju se fotoni.

Prva relevantna veličina koja se koristi je funkcija gustoće čestica $p(x)$, koja označava broj fotona po volumenu u točki x . Iz toga sljedi da je broj fotona u diferencijalnom volumenu dV dan:

$$P(X) = p(x)dV.$$

Za tok fotona vrijedi da se svi kreću istom brzinom \vec{v} u istom smjeru. Kako bi se odredilo koliko fotona u vremenskom trenutku dt udare u površinu dA gleda se volumen s bazom dA i visinom vdt . Spomenuti volumen obuhvaća sve čestice koje su bile u mogućnosti proći kroz dA u danom vremenu.



Slika 3. Čestice koje prolaze kroz površinu u vremenu dt .

Dakle ukupan broj čestica koje prođu kroz površinu je jednak

$$P(X) = p(x) * (v * dt * \cos\theta) * dA$$

θ označava kut između vektora brzine i normale na površinu dA .

Radi općenitosti gornju formulu je moguće generalizirati za slučaj kad čestice u nekoj točki nemaju istu brzinu i smjer. U tom slučaju gustoća čestica je funkcija dviju nezavisnih varijabli, pozicije x i smjera $\vec{\omega}$. Formula tada glasi:

$$P(X, \vec{\omega}) = p(x, \vec{\omega}) * \cos\theta * d\omega * dA.$$

Diferencijal čvrstog kuta je označen s $d\omega$, smjer vektora označava smjer toka dok je njegova norma jednaka iznosu čvrstog kuta.

2.2 Sjajnost

Za potrebe izrade algoritma za iscrtavanje fokus se stavlja na tok fotona. Energija sjaja izvora je gustoća fotona u prostoru množena s energijom svakog pojedinog fotona hc/λ , gdje je h -Planckova konstanta, c -brzina svjetlosti.

Radiometrijski izraz za energiju sjaja izvora je dan formulom:

$$L(x, \bar{\omega}) = \int p(x, \bar{\omega}, \lambda) \frac{hc}{\lambda} d\lambda .$$

Sjaj izvora opisuje količinu svjetla koje je emitirano iz nekog izvora i koje pada unutar danog prostornog kuta u određenom smjeru. Sve radiometrijske veličine moguće je izvesti iz spomenute veličine.

2.3 Emisivnost

Uz sjajnost još jedna važna veličina je ukupna energija po jedinici površine. Ovu veličinu je moguće izračunati integrirajući nadolazeći sjaj nad hemisferom Ω .

$$d\Phi = (\int_{\Omega} L_i * \cos \theta * d\omega) * dA$$

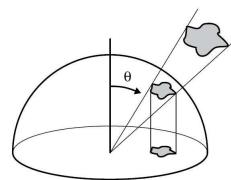
Emisivnost E , je energija sjaja po jedinici površine:

$$E \equiv \frac{d\Phi}{dA}$$

ili

$$E = \int_{\Omega} L * \cos \theta * d\omega$$

Veličina $\cos \theta * d\omega$ se još naziva projecirani prostorni kut. Moguće ju je gledati kao projekciju diferencijalne površine plašta sfere na bazu sfere (Slika 4).



Slika 4. Projekcija diferencijalne površine na bazu sfere

Gornju formulu moguće je dodatno pojednostaviti ako su zrake svjetlosti paralelne tj. ako sva nadolazeća svjetlost ima isti smijer kao što je slučaj s izvorom svjetlosti koji se nalazi beskonačno daleko. Integral se svodi na jednostavnu formulu $E = E_o * \cos\theta$, E_o je energija po jedinici površine okomite na zrake iz udaljenog izvora.

2.4 Isijavanje

Isijavanje B je veličina slična emisivnosti. Dok je emisivnost energija koja pada na jedinicu površine, isijavanje je energija po jedinici površine koja napušta površinu i jednaka je:

$$B = \int_{\Omega} L_0 * \cos\theta * d\omega$$

gdje je L_0 emitirana sjajnost.

3 Refleksijska funkcija

Transmisija, apsorbacija, spekularni i polarizacijski efekt, florescencija, itd. su efekti vezani uz interakciju svjetla i materijala. Kako bi bili modelirani uvodi se refleksijska funkcija. Prilikom modeliranja dane funkcije fokus se stavlja na zraku svjetlosti koja pada na površinu pod malim čvrstim kutom u smjeru $\vec{\omega}_i$. Količina reflektirane svjetlosti u smjeru $\vec{\omega}_r$ je proporcionalna upadnoj emisivnosti iz smjera $\vec{\omega}_i$. Vrijedi:

$$dL_r(\vec{\omega}) \propto dE(\vec{\omega}_i).$$

Konstanta proporcionalnosti se naziva bidirekcijska refleksijska distribucijska funkcija ili kraće BRDF.

$$f_r(\vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) = \frac{L_r(\vec{\omega}_r)}{L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i}$$

BRDF je definiran kao omjer reflektiranog sjaja izvora u smjeru $\vec{\omega}_r$ i emisivnosti koja ga uzrokuje iz smjera $\vec{\omega}_i$.

Svojstva BRDF-a su sljedeća:

1. Ako je BRDF temeljena na fizikalnim zakonima tada će ostati nepromijenjena ako vrijedi da su upadni i reflektirani smjerovi nepromijenjeni.

$$f_r(\vec{\omega}_r \rightarrow \vec{\omega}_i) = f_r(\vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r)$$

2. Općenito BRDF je anizotropna. U slučaju kad su upadni i reflektirani smjer fiksni prilikom rotacije površine oko svoje normale, postotak reflektiranog svjetla se može promjeniti. Primjeri takvih površina su aluminij i odjeća. U slučaju kada se radi o glatkim materijalima što predstavlja veliku većinu materijala, kod modeliranja njihove funkcije refleksije ne uzima se u obzir rotacija normale.

Općenita formula refleksije glasi:

$$L_r(\vec{\omega}_r) = \int_{\Omega_i} f_r(\vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i.$$

Izraženo riječima, reflektirani sjaj je posljedica upadnog sjaja koji dolazi iz svih smjerova težinski određen BRDF-om.

3.1 Jednadžba iscrtavanja

Jednadžba refleksije je omogućila izračunavanje distribucije reflektiranog svjetla iz distribucije upadnog svjetla i BRDF-a materijala. Ostalo je još prikazati kako izračunati distribuciju upadnog svjetla. Ovaj korak se naziva iluminacijskim modelom.

Prvi i najjednostavniji slučaj je onaj bez prikrivanja i s direktnom iluminacijom iz jednostavnog izvora svjetlosti. U tom slučaju tipično se radi s malim brojem izvora svjetlosti i pretpostavka je da sva svjetlost dolazi do površine. Takav model ne uzima u obzir kompletну okolinu i ovisi samo o svojstvima izvora svjetlosti i površine na koju pada stoga se naziva lokalni iluminacijski model.

Sjene je moguće dodati ispitivajući dali točka na površini vidi izvor svjetlosti. Takva nadogradnja modela koristi kompletну okolinu za određivanje osvjetljenosti stoga se radi o globalnom modelu osvjetljenja. Takav model je značajno komplikiraniji jer se uz prikrivanje koristi i indirektna iluminacija. U tom slučaju svjetlost može doći iz bilo koje površine u okolini.

U ovom odjeljku odbijanje i međudjelovanje površina će biti uzeto u obzir. Jednadžba iscrtavanja izvodi se iz jednadžbe refleksije. Izvodi se i jednadžba isijavanja, koja predpostavlja da su sve površine Lambertove.

3.1.1 Lokalno osvjetljenje

Radi se o najjednostavnijem obliku danom formulom:

$$L_r(\vec{\omega}_r) = \int_{\Omega_i} f_r(\vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i .$$

U ovom slučaju kako je prije spomenuto nema zaklanjanja. U formuli su uzeti u obzir samo upadno osvjetljenje i geometrijski odnos upadne svjetlosti i površine na koju svjetlost pada tj. najjednostavniji mogući oblik prijenosne funkcije (engl. transfer function).

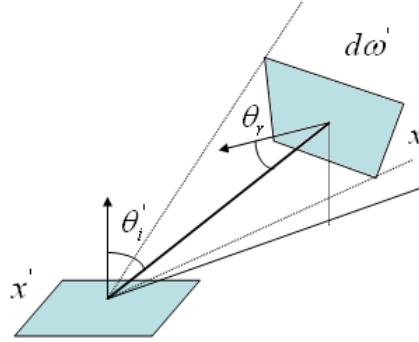
3.1.2 Globalno osvjetljenje

Kod globalne emisivnosti prvi korak koji je potrebno napraviti je povezati emisivnost na jednoj površini s reflektiranim svjetлом s druge površine. Kako bi korak bio potpun potrebno je provjeriti vidljivost površina. Uzimajući u obzir da je sjaj invarijantan duž zrake, upadni sjaj u x' zbog sjaja iz x je:

$$L_i(x', \vec{\omega}_i') = L_o(x, \vec{\omega}_o) V(x, x')$$

Gdje je $\vec{\omega}_i'$ vektor smjera od x' do x i $\vec{\omega}_o$ predstavlja suprotni smjer x' :

$$\vec{\omega}_i = -\vec{\omega}_o = \frac{x - x'}{|x - x'|}$$



Slika 5. Transportna geometrija između dvije površine

Funkcija $V(x, x')$ je funkcija vidljivosti. Jednaka je 1, ako su x i x' međusobno vidljivi inače je 0.

Dalje kod jednadžbe refleksije, potrebno je prebaciti iz integrala nad sferom iz svih smjerova u prostorni integral nad svim površinama na sceni. Ovo je lako ostvarivo povezujući prostorni kut od polazne površine prema nekoj površini na sceni u projeciranu površinu.

$$d\omega'_i = \frac{\cos \theta_o dA}{|x - x'|^2}$$

Uvodi se supstitucija :

$$d\omega'_i \cos \theta_o dA = G(x, x') dA$$

gdje je

$$G(x, x') = \frac{\cos \theta'_i \cos \theta_o}{|x - x'|^2}.$$

Uvrštavanjem $G(x, x')$ u refleksijsku jednadžbu daje:

$$L(x', \vec{\omega}) = \int_S f_r(x) L(x, \vec{\omega}) G(x, x') V(x, x') dA.$$

Da bi se dobila puna jednadžba iscrtavanja potrebno je u obzir uzeti još emisiju same površine. Puna jednadžba tada glasi:

$$L(x', \vec{\omega}) = L_e(x', \vec{\omega}') + \int_S f_r(x) L(x, \vec{\omega}) G(x, x') V(x, x') dA$$

gdje je L_e emisija same površine.

3.2 Jednadžba isijavanja

Dobivenu jednadžbu je moguće pojednostaviti uzimajući u obzir predpostavku da su sve površine u okolini Lambertove BRDF tada ne ovisi o upadnom i reflektiranom smjeru stoga se izvlači iz integrala:

$$\begin{aligned} L(x' \rightarrow x'') &= L_e(x' \rightarrow x'') + f_r(x') \int_S L(x \rightarrow x') G(x, x') V(x, x') dA \\ &= L_e(x' \rightarrow x'') + \frac{\rho(x'')}{\pi} \int_S L(x \rightarrow x') G(x, x') V(x, x') dA \end{aligned}$$

Još važnije, izlazni sjaj iz Lambertove površine je jednak u svim smjerovima i iznosi isijavanje B podjeljeno s π . To dovodi do novog pojednostavljenja:

$$B(x) = E(x) + \rho(x) \int_S B(x') \frac{G(x, x') V(x, x')}{\pi} dA.$$

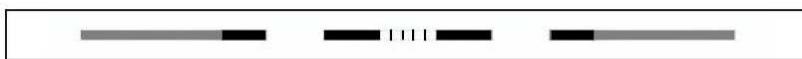
Dana formula sadrži zakon o očuvanju energije u svim točkama prostora. Kod ove jednadžbe potrebno je uočiti da se isijavanje pojavljuje i s lijeve i desne strane jednakosti stoga ju je izuzetno teško rješiti analitički.

4 Analiza signala

Prilikom računanja osvjetljenja scene nad točkom u kojoj se želi izračunati osvjetljenje se postavlja jedinična sfera, nad kojom se računaju doprinosi osvjetljenja iz svih smjerova. Ovakav pristup problemu omogućava korištenje tehnika osvjetljenja koje se temelje na realnom fizikalnom modelu. Za primjenu u računalnoj grafici u stvarnom vremenu potpuno preslikavanje fizikalnog modela bi bilo neizvedivo ali daje dobar osnov za aproksimacije. Kako bi se smanjila količina proračuna i količina potrebne memorije za izračun osvjetljenja koristi se kompresija temeljena na sfernim harmonicima.

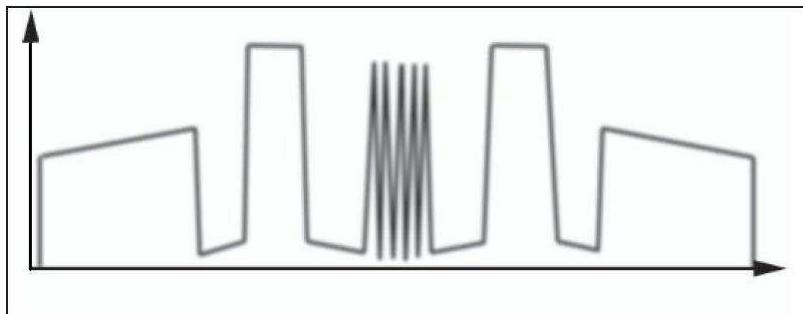
4.1. Kompresija svjetlosnog signala

Ako se promatra uski presjek osvjetljene hemisfere (Slika 6.) vidljive su pruge, svjetlijie pruge predstavljaju više osvjetljena područja hemisfere.



Slika 6. Odsječak osvjetljenje sfere.

Prema intenzitetu osvjetljenja moguće je nacrtati graf gdje se na ordinatu zapisuje intenzitet osvjetljenja.



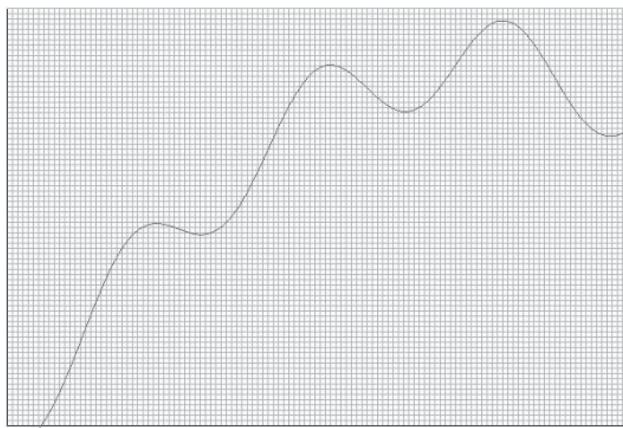
Slika 7 Graf izведен iz odsječka osvjetljenja sfere.

Ako na taj način promatramo svjetlost na hemisferi dobiva se uobičajan signal sličan audio ili video signalu. Za realni signal potrebno je spremiti milijune točaka koje opisuju dati signal, ako je potrebno obaviti bilo kakve postupke nad signalom tada je potrebno izvršiti više milijuna operacija stoga je očita potreba za kompresijom. Tu u igru ulaze bazne funkcije koje se skaliraju uz određen broj koeficijenata kako bi se dobila aproksimacija orginalnog signala. Funkcija koju je potrebno prikazati može biti izrazito kompleksna



Slika 8. Graf realnog signala.

tako da je za potpuni prikaz potrebno više koeficijenata nego samih točaka. Stoga je potrebno odlučiti koja svojstva su potrebna. U slučaju kompresije signala prikazanog na slici 8. jednostavno se zanemaruju koeficijenti koji generiraju šiljke na signalu tako da rezultantni signal izgleda kao na slici 9.



Slika 9. Komprimirani signal iz kojeg su uklonjeni viši harmonici

Ovakva vrsta filtriranja se ostvaruje preko nisko propusnog filtera zbog toga što se propuštaju samo nisko frekventne komponente signala. Osim osvjetljenja sličan pristup kompresiji signala koristi se i kod MP3 za glazbu i JPEG-a za slike.

4.2 Sferni harmonici

Sferni harmonici su bazne funkcije koje se koriste za aproksimaciju dvodimenzionalnih funkcija i koji se definiraju nad jediničnom sferom. Bazne funkcije imaju svojstvo da se mogu kombinirati i skalirati kako bi aproksimirale neke druge funkcije. Faktori skaliranja obično se nazivaju koeficijentima. Postupak rastavljanja neke funkcije u sumu baznih funkcija naziva se projiciranje.

Ako se funkcija prikazuje pomoću obitelji baznih funkcija $B_i(x)$ i koeficijenata skaliranja c_i vrijedi:

$$f(x) \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_i B_i(x).$$

Koeficijenti c_i se računaju tako da se integrira umnožak funkcije $f(x)$ s baznom funkcijom $B_i(x)$ nad cijelom domenom od $f(x)$:

$$c_i = \int_D f(x) B_i(x) dx.$$

Koeficijent c_i je obična skalarna vrijednost koja govori koliko su funkcije slične.

Ako se bazne funkcije shvate kao bazni vektori koji razapinju trodimenzionalni prostor, a neka proizvoljna funkcija predstavlja bilo koji vektor u trodimenzionalnom prostoru npr. $\vec{a}_1 = (3, 6, 2)$ tada se koeficijenti koji skaliraju bazne vektore u postupku projiciranja računaju:

$$c_1 = \vec{a}_1 * \vec{n}_1 = 3$$

$$c_2 = \vec{a}_1 * \vec{n}_2 = 6$$

$$c_3 = \vec{a}_1 * \vec{n}_3 = 2$$

Rekonstrukcija vektora \vec{a}_1 se vrši slično rekonstrukciji funkcije $f(x)$

$$\vec{a}_1 = \sum_{i=1}^3 c_i \vec{n}_i = 3 * 1\vec{i} + 6 * 1\vec{j} + 2 * 1\vec{k}.$$

Iako je ova usporedba prilično nategnuta, na jednostavan način prikazuje ideju koja stoji iza prikaza funkcije pomoću sume baznih funkcija.

Kako je prije spomenuto sferni harmonici su definirani nad jediničnom sferom stoga se radi u sfernim koordinatama. Za opis točke u sfernim koordinatama koristi se trojac azimut φ , kut elevacije θ i radijus r . U slučaju jedinične sfere radijus je jednak jedan i stoga je suvišan podatak.

Formule za preslikavanje koordinata iz sfernog u pravokutni koordinatni sustav glase:

$$x = \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \sin \theta \sin \varphi .$$

$$z = \cos \theta$$

U općenitom obliku sferni harmonici su definirani preko kompleksnih brojeva formulom:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = K_l^m e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \theta) \\ l \in N, -l \leq m \leq l$$

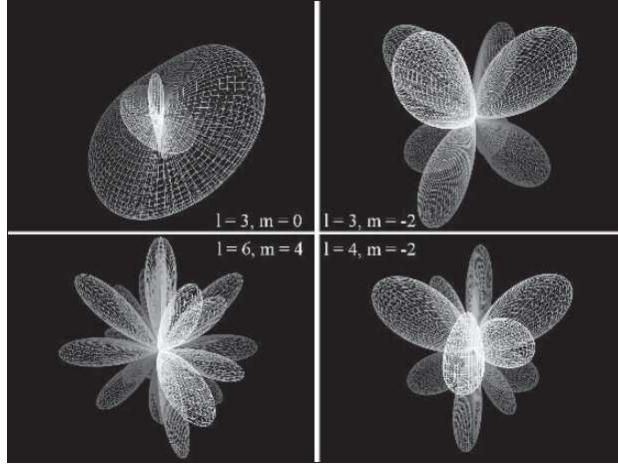
Za realne funkcije koje se ovdje aproksimiraju biti će dovoljan realni oblik koji glasi:

$$\begin{aligned} y_l^m(\theta, \varphi) &= \sqrt{2} \operatorname{Re}(Y_l^m), & m > 0 \\ y_l^m(\theta, \varphi) &= \sqrt{2} \operatorname{Im}(Y_l^m), & m < 0 \\ y_l^m(\theta, \varphi) &= Y_l^0, & m = 0 \end{aligned}$$

Konačni oblik je dan izrazom:

$$\begin{aligned} y_l^m(\theta, \varphi) &= \sqrt{2} K_l^m \cos(m\varphi) P_l^m(\cos\theta) & m > 0 \\ y_l^m(\theta, \varphi) &= \sqrt{2} K_l^m \sin(-m\varphi) P_l^m(\cos\theta) & m < 0 \\ y_l^m(\theta, \varphi) &= K_l^0 P_l^0(\cos\theta) & m = 0 \end{aligned}$$

Gdje je $l \in N, -l \leq m \leq l$.



Slika 10. Sforni harmonici

Izraz P_l^m je asocirani Legendreov polinom definiran na intervalu $[-1,1]$. Za izračun na računalu koristi se rekurzivna formula dana izrazima:

$$\begin{aligned} (l-m)P_l^m(x) &= x(2l-1)P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x) \\ P_m^m(x) &= (-1)^m (2m-1)!! (l-x^2)^{m/2} \\ P_{m+1}^m(x) &= x(2m+1)P_m^m(x) \\ l \in N, \quad 0 \leq m \leq l. \end{aligned}$$

Izraz $(2m-1)!!$ je dvostruki faktorijel koji se definira:

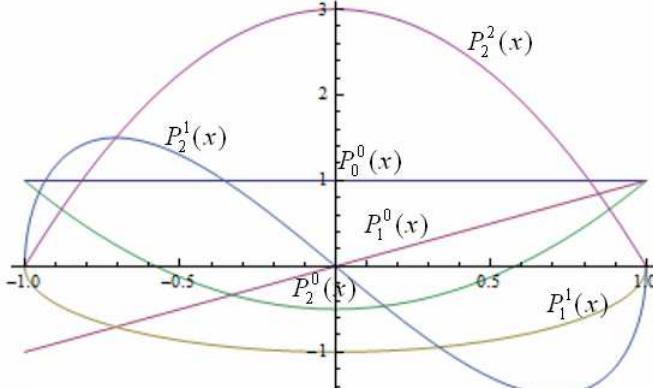
$$\begin{aligned} n!! &= n * (n-2) \dots 5 * 3 * 1 & n > 0 \text{ i neparan} \\ n!! &= n * (n-2) \dots 6 * 4 * 2 & n < 0 \text{ i paran} \\ n!! &= 1 & n = -1, 0. \end{aligned}$$

Legendreov polinom je ortonormiran što znači kad se integrira produkt takva dva polinoma dobije se 1 ako se radi o istim polinomima, inače daje 0.

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 1, \quad m=n$$

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n$$

Izgled funkcije za prva tri pojasa $(P_0^0(x)), (P_1^0(x), P_1^1(x)), (P_2^0(x), P_2^1(x), P_2^2(x))$ dan je na slici 11.



Slika 11. Prvih šest asociranih Legendreovih polinoma.

Uz Legendreov polinom u definiciji se još pojavljuje faktor koji se koristi za normalizaciju funkcije K_l^m . Definiran kao:

$$K_l^m = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi * (l+|m|)!}}.$$

4.2.1 Projiciranje i rekonstrukcija

U predhodnim poglavljima prikazan je općeniti postupak za projiciranje i rekonstrukciju jednodimenzionalnih funkcija. Isti princip vrijedi i za dvodimenzionalne funkcije koje kao bazne funkcije koriste sferne harmonike. Oznake se malo mijenjaju, tako oznaka za koeficijent c_i prelazi u c_l^m dok oznaka za bazne funkcije B_i prelazi u $y_l^m(s)$. Uz obično preimenovanje bitna razlika je uočljiva u broju indeksa koji se koriste. Pošto se aproksimira dvodimenzionalna funkcija koriste se dva indeksa (l i m). Indekse je moguće preuređiti ako se uzme da je $i = l*(l+1) + m$ tako da se dobiva:

$$y_l^m(\theta, \varphi) = y_i(\theta, \varphi).$$

Također uvodi se oznaka za aproksimaciju funkcije f , označena s \tilde{f} . Uz navedene oznake formula za rekonstrukciju izgleda:

$$\tilde{f}(s) = \sum_{l=0}^n \sum_{m=-l}^l c_l^m y_l^m(s).$$

Ako se preuredi gornji izraz tako da se koristi samo jedan indeks dobiva se:

$$\tilde{f}(s) = \sum_{l=0}^{n^2} c_l y_l(s).$$

Iz gornjeg izraza je vidljivo da za n-tu aproksimaciju funkcije f je potrebno imati n^2 koeficijenata.

Koeficijenti se računaju sljedećom formulom:

$$c_l^m = \int_S f(s) y_l^m(s) ds .$$

4.2.2 Svojstva sfernih harmonika

Najvažnije svojstvo sfernih harmonika je ortonormalnost spomenuto kod Legendrovih polinoma. Zapisano jednadžbom:

$$\begin{aligned} \int_S y_i(s) y_j(s) ds &= 1, \quad i=j \\ \int_S y_i(s) y_j(s) ds &= 0, \quad i \neq j . \end{aligned}$$

Opisano riječima, ako integriramo dva sferna harmonika koja su različita dobiva se 0, dok za dva ista se dobiva 1. Korisnost ovog svojstva vidljiva je na formuli iscrtavanja koja se jednostavnije može napisati kao:

$$\int_S L(s) A(s) ds .$$

Gdje je $L(s)$ -funkcija distribucije svjetlosti a $A(s)$ je prijenosna funkcija. Ako se ove dvije funkcije zapišu pomoću sfernih harmonika dobiva se:

$$\begin{aligned} \tilde{L}(s) &= \sum_{i=0}^{n^2} c_{L_i} y_{L_i} , \\ \tilde{A}(s) &= \sum_{i=0}^{n^2} c_{A_i} y_{A_i} . \end{aligned}$$

Dalje se jednadžba iscrtavanja može napisati:

$$\begin{aligned} \int_S L(s) A(s) ds &\approx \int_S \tilde{L}(s) \tilde{A}(s) ds = \int_S \left(\sum_{i=0}^{n^2} c_{L_i} y_{L_i} \right) \left(\sum_{i'=0}^{n^2} c_{A_{i'}} y_{A_{i'}} \right) ds , \\ \int_S L(s) t(s) ds &\approx \sum_{i=0}^{n^2} \sum_{i'=0}^{n^2} c_{L_i} c_{A_{i'}} \int_S y_{L_i} y_{A_{i'}} ds . \end{aligned}$$

Za integral $\int_S y_{L_i} y_{A_i} ds$ vrijedi da će biti jednak 1 samo ako vrijedi da su indeksi sfernih harmonika jednaki, stoga vrijedi:

$$\int_S L(s) A(s) ds \approx \sum_{i=0}^{n^2} c_{L_i} c_{A_i} .$$

Iz ovog izvoda proizlazi da je integral umnožka dvije ili više funkcija moguće svesti na jednostavna umnožak koeficijenata tih funkcija.

Uz ortonormalnost sferni harmonici posjeduju još jedno korisno svojstvo, rotacijsku invarijantnost. To znači da je za neku funkciju f svejedno da li će se prvo rotirati pa zatim projecirati u sferne harmonike ili će se prvo projecirati u sferne harmonike pa će se ti koeficijenti rotirati jer će rezultat biti isti.

5 Monte Carlo integracija

Kako bi se riješili zadani integrali koristi se Monte Carlo integracija. Radi se o metodi numeričke integracije koja koristi slučajne varijable. Spomenuta metoda omogućava promatranje integrala kao crne kutije. Za riješavanje zadanog integrala jedino što metoda koristi kao predkorak je uzimanje određenog broja uzoraka na jediničnoj sferi.

5.1 Osnovno o teoriji vjerovatnosti

Jedan od osnovnih pojmova je slučajna varijabla koja se definira kao varijabla koja poprima vrijednost na slučajan način, a vrijednosti su iz zadanog skupa vrijednosti i imaju zadanu vjerovatnost pojavljivanja.

Idući pojam je funkcija razdiobe $P(X \leq x)$ koja se definira kao vjerovatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost manju od x , $F_x(X) = P(X \leq x)$.

Za izvod potreban za Monte Carlo integraciju koristi se i funkcija vjerovatnosti koja se definira kao derivacija funkcije distribucije $p(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

Kao rezultat daje pozitivne vrijednosti ili nulu, općenito vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1 \quad p(x) \geq 0 .$$

Sljedeća funkcija koju je potrebno definirati je funkcija očekivanja. Ona daje vrijednost koju slučajna varijabla najčešće poprima tj. srednju vrijednost:

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx .$$

Gornju jednadžbu je moguće proširiti sa slučajne varijable na funkcije, tako za funkciju $g(x)$ vrijedi:

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx .$$

5.2 Izvod Monte Carlo integracije

Ukoliko je uzet velik broj uzoraka, prema zakonu velikih brojeva očekivanje $E(g(x))$ je moguće napisati:

$$E(g(x)) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i).$$

Što je uzet veći broj uzoraka to je rezultat točniji. Iz navedenih formula napokon se izvodi središnja formula koja omogućava integraciju proizvoljne funkcije:

$$\int f(x) = \int \frac{f(x)}{p(x)} p(x) dx \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)}.$$

Uobičajen način pisanja gornjeg izraza je da se uvede supstitucija $w(x) = \frac{1}{p(x)}$.

Tada spomenuta formula izgleda:

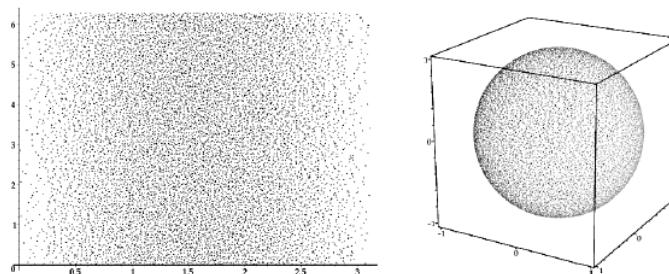
$$\int f(x) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) w(x_i).$$

Težinska funkcija za uzorce sa sfere iznosi $w(x) = 4 * \pi$. Takav rezultat se dobiva iz činjenice da je vjerovatnost da bilo koja točka na sferi bude dio uzorka je jednaka. Iz toga sljedi da je težinska funkcija jednaka površini plašta jedinične sfere. Ostao je problem uzimanja uzorka sa sfere. Prvi korak je podjela ulaznog kvadrata na $N \times N$ ćelija iz kojih će se uzimati uzorci. Točka unutar ćelije treba biti nasumično odabrana stoga se koristi funkcija koja daje nasumične brojeve po uniformnoj razdiobi. Pošto se radi u sfernog koordinatnom sustavu dobivene točke je potrebno prebaciti u sferni koordinatni sustav pomoću sljedećeg izraza:

$$\theta = 2\cos^{-1}(\sqrt{1 - \xi_x})$$

$$\varphi = 2\pi\xi_y$$

ξ_x, ξ_y su slučajni neovisni kanonski brojevi.



Slika 12. Uniformno generirani uzorci dati u sfernim koordinatama.

Monte Carlo integraciju je moguće proširiti s jednostrukih na dvostrukе integrale, tako da izraz za integraciju glasi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \approx \frac{4\pi}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i, y_i).$$

Prethodno navedena teorija se napokon uklapa sa sfernim harmonicima kroz formulu za koeficijente sfernih harmonika. Ako se žele izračunati koeficijenti distribucije svjetla dani formulom:

$$c_i = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi svijetlo(\theta, \varphi) * y_i(\theta, \varphi) * \sin \theta * d\theta * d\varphi$$

upotrebom Monte Marlo integracije gornja formula se zapisuje:

$$c_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N svijetlo(x_j) * y_i(x_j) * 4\pi = \frac{4\pi}{N} \sum_{j=1}^N svijetlo(x_j) * y_i(x_j).$$

6 Svjetlosni izvori

Kako bi se odredili koeficijenti sfernih harmonika za funkciju distribucije svjetla potrebno je prikazati svjetlosne izvore u obliku koji omogućava jednostavno uzorkovanje pristiglog svjetla na jediničnu sferu. Svjetlosne izvore je moguće prikazati na tri osnovna načina.

Prvi način je prikaz svjetlosnog izvora kao funkcije. Jedan jednostavan primjer je funkcija :

$$L(\theta, \varphi) = \max(0.5 * \cos(\theta) - 4) + \max(0, -4\sin(\theta - \pi) * \cos(\varphi - 2.5) - 3).$$

Ovakav pristup omogućava jednostavno i brzo određivanje sjajnosti prilikom uzorkovanja, loša strana je što funkcija postaje izuzetno komplikovana za složenije modele osvjetljenja i njen neintuitivan način određivanja.

Drugi način je korištenje teksture koja sadrži podatke o sjaju okoline. Takve teksture se nazivaju emisivne mape okoline. Dolaze u dva osnovna formata.

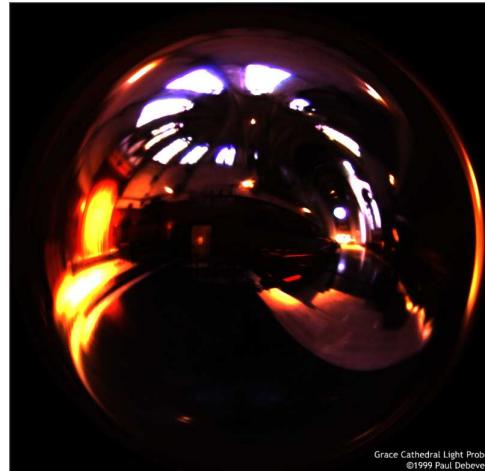
Prvi format su kubne mape (Slika 13). Kubna mapa je u osnovi skup od šest tekstura koje preslikavaju scenu. Nastaju tako da se kamera pozicionira u središte scene i uzastopno uzima slike okoline s razmakom od 90° .



Slika 13. Kubna mapa.

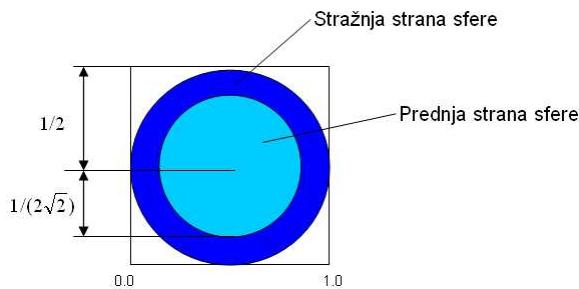
Prednost kubne mape je što sadrži cjelokupnu scenu tako da se prilikom iscrtavanja ne pojavljuju singularnosti. Nedostatak se očituje u tome što je za prikaz okoline potrebno šest tekstura.

Drugi format je sferna mapa (Slika 14). Za razliku od kubne mape sastoji se od samo jedne teksture. Lako je prepoznatljiva po krugu u kojem je projekcija okoline dok je ostatak teksture neiskorišten.



Slika 14. Sferna mapa

Nastaje tako da se uzme slika zrcalne kugle postavljene u okolini čije osvjetljenje se koristi. Odnos stražnjeg i prednjeg dijela scene prikazan je na slici 15.



Slika 15. Raspodjela sferne mape

Ako se predpostavi da je slika normalizirana s koordinatama $u = [-1, 1]$, $v = [-1, 1]$ tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\theta &= \arctan\left(\frac{v}{u}\right) \\ \varphi &= \pi * \sqrt{u^2 + v^2} \\ r &= \frac{1}{\pi} \frac{\arccos(z)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Koordinate radijvektora se dobivaju na standardni način preračunavanjem sfernih koordinata. U ovom radu biti će rađeno spomenutom metodom. Na primjeru izračuna koeficijenata sfernih harmonika za svjetlosni izvor moguće je obuhvatiti sve prije spomenuto.

Početni korak je generiranje točaka na jediničnoj sferi u kojim se uzimaju vrijednosti funkcije. U slučaju sferne mape uzorci služe za indeksiranje slikovnih elemenata. Boje okoline tj. boje pozadinskog osvjetljenja se zatim projiciraju u koeficijente sfernog harmonika. Ovim postupkom se kompletno osvjetljenje

prikazuje sa samo devet koeficijenata po kanalu ako se radi s tri pojasa. Kako bi se dobila konačna boja vrhova potrebno je još izmnožiti odgovarajuće koeficijente prijenosne funkcije koji određuju geometrijski odnos sjenčane površine i upadne svjetlosti, ovisno o kutu upadne zrake određene boje imaju veći ili manji utjecaj na konačnu boju vrhova.

Treći način bi bio korištenje već gotovih koeficijenata nekog svjetlosnog izvora koji su prethodno izračunati. Spomenuti koeficijenti se jednostavno ukjuče u jednadžbu prikaza (engl. rendering). Ovakav pristup je najbrži i najlakši, korisit se u fazi iscrtavanja kad je predprocesiranje završeno.

7 Rezultati simulacije

Cilj ovog rada je dati odgovor na pitanje koliko je koeficijenata potrebno izračunati kako bi se dobila što vjernija aproksimacija isijavanja. Koriste se dvije različite implementacije koje polaze od istih predpostavki:

1. Površine objekata na sceni su Lambertove što povlači da je funkcija BRDF-a konstantna.
2. Radi se s udaljenim izvorom svjetla tako da je distribucija svjetla na površini homogena tj. ne ovisi o poziciji već samo o upadnom kutu tako da vrijedi: $L(x, \theta'_i, \phi'_i) \rightarrow L(\theta_i, \phi_i)$.
3. Radi se s konveksnim zakrivljenim površinama, tako da se ne pojavljuje samozasjenjenje. Emisivnost ovisi samo o udaljenom svjetlosnom polju L_i .

Iz svih predpostavki proizlazi sljedeća formula:

$$E(n) = \int_{\Omega} L(\theta_i, \phi_i) \cos \theta'_i d\Omega_i. \quad (1)$$

Prva implementacija omogućava aproksimaciju emisivnosti do 5 pojaseva s 25 koeficijenata i prilično je jednostavna. Prijenosna funkcija se računa prema izrazu $A(\theta) = \cos \theta$. Sami koeficijenti prijenosne funkcije za svaki vrh se spremaju u strukturu vrhova dok se koeficijenti za svjetlosni izvor prenose kroz eksternu varijablu u program za sjenčanje (engl. shader).

Podaci o osvjetljenjnu računaju se prema formuli:

$$\int_{\Omega} L(\theta_i, \phi_i) \cos \theta_i d\Omega \approx \sum_{i=0}^{n-1} L_i A_i.$$

Rezultati ove implementacije služe za usporedbu s implementacijom koju su predložili Ramamoorthi i Hanrahan.

Druga implementacija temelji se na jednostavnom programu za sjenčanje u realnom vremenu razvijenom od strane Ramamoorthi i Hanrahan koji radi s devet koeficijenata tj. s tri pojasa. Središnja formula programa za sjenčanje je:

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} A_l L_l^m Y_l^m(\alpha, \beta).$$

Izvod gornje formule počinje od standardne jednadžbe refleksije:

$$E(n) = \int_{\Omega'} L(\theta_i, \phi_i) \cos \theta'_i d\Omega'.$$

Bitno je uočiti da su u gornjoj jednadžbi globalne i lokalne koordinate izmješane, funkcija distribucije svjetla je dana u globalnim koordinatama s obzirom da je ista

za sve objekte na sceni. Prijenosna funkcija je prirodno dana u lokalnom koordinatnom sustavu $A(\theta_i) = \cos \theta_i$.

Kako bi se integral mogao riješiti potrebno je primjeniti rotaciju sukladnu s orijentacijom površine (α, β, γ) kako bi se svjetlo prebacilo u lokalne koordinate.

7.1 Rotacija svjetla

Kako bi se izvršila rotacija u lokalne koordinate (θ_i, ϕ_i) , potrebno je provesti operaciju rotacije svjetla $L(\theta_i, \phi_i)$. Gdje (α, β, γ) su parametri koji odgovaraju orijentaciji koordinatnog sustava površine za koju se računa osvjetljenje a dobiju se na temelju normale vrha \hat{n} prema formuli:

$$\hat{n} = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha).$$

Definira se $R^{\alpha, \beta, \gamma}$ rotacijski operator koji rotira (θ_i, ϕ_i) u globalne koordinate (θ_i, ϕ_i) . Operator $R^{\alpha, \beta, \gamma}$ može se prikazati kao $R^{\alpha, \beta, \gamma} = R_z(\beta)R_y(\alpha)R_z(\gamma)$.

Ova tvrdnja je lako provjerljiva ako se uzme lokalna z-os koja je dana koordinatama $(0^\circ, 0^\circ)$, upotrebom danog operatora preslikava se u (α, β) koji odgovaraju prikazu normale u globalnom koordinatnom sustavu:

$$\begin{aligned} R^{\alpha, \beta, \gamma} &= R_z(\beta)R_y(\alpha)R_z(\gamma) \\ (\theta_i, \phi_i) &= R^{\alpha, \beta, \gamma}(\theta_i, \phi_i) \\ L(\theta_i, \phi_i) &= L(R^{\alpha, \beta, \gamma}(\theta_i, \phi_i)) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu 1. dobiva se sljedeći oblik:

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{\Omega} L(R^{\alpha, \beta, \gamma}(\theta_i, \phi_i)) A(\theta_i) d\Omega. \quad (2)$$

7.2 Rotacija sfernih harmonika

Izgradnja rotacijskog operatora za sferne harmonike počinje s rotacijom oko z-osi i dana je formulom:

$$R_z(\beta) \{Y_l^m(\theta_i, \phi_i)\} = Y_l^m(\theta_i, \phi_i + \beta) = \exp(\text{Im } \beta) Y_l^m(\theta_i, \phi_i).$$

Rotacija oko y-osi je složenija i dana je formulom:

$$R_y(\alpha) \{Y_l^m(\theta_i, \phi_i)\} = \sum_{m=-l}^l D_{m,m}^l(\alpha) Y_l^m(\theta_i, \phi_i).$$

Bitno je napomenuti da su m -indeksi izmjешani.

Uvrštavanjem rotacija za zadane kutove dobije se sljedeća jednadžba:

$$R^{\alpha,\beta,\gamma} \{Y_l^m(\theta_i^{'},\phi_i^{'})\} = R_z(\beta)R_y(\alpha)R_z(\gamma) \{Y_l^m(\theta_i^{'},\phi_i^{'})\} = \sum_{m=-l}^l D_{m,m}^l(\alpha) \exp(\text{Im}\beta) \exp(\text{Im}\gamma) Y_l^m(\theta_i^{'},\phi_i^{'})$$

Gornja jednadžba je standardna formula za rotaciju sfernih harmonika. Danu formulu je moguće značajno pojednostaviti ako se uzme u obzir da prijenosna funkcija $A(\theta^{'}) = \cos\theta_i^{'} \neq 0$ ne ovisi o azimutu stoga će svi koeficijenti za koje vrijedi $m' \neq 0$ nestati prilikom integracije jednadžbe 2. Za koeficijente s $m' = 0$ dobiva se konačna formula:

$$R^{\alpha,\beta,\gamma} \{Y_l^m(0^{'},\phi_i^{'})\} = \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{D}_{m,0}^l(\alpha,\beta,\gamma),$$

gdje je $\tilde{D}_{m,0}^l(\alpha,\beta,\gamma) = \left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2}} Y_{l,m}(\alpha,\beta)$.

7.3 Izvod prijenosne funkcije

Prijenosna funkcija je dana formulom $A(\theta^{'}) = \cos\theta_i^{'} \neq 0$. Za $A(\theta^{'})$ vrijedi da je različit od nule samo u slučaju kad je $\cos\theta_i^{'} > 0$. Na dolnjem dijelu hemisfere prijenosna funkcija poprima vrijednost 0.

U prvom koraku izvoda transferna funkcija se raspisuje preko sfernih harmonika uzimajući u obzir da ne ovisi o azimutu:

$$A(\theta^{'}) = \cos\theta_i^{'} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n Y_{n,0}(\theta_i^{'}) \quad (3)$$

Koeficijenti su dani formulom:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} Y_{n,0}(\theta_i^{'}) \cos\theta_i^{'} \sin\theta_i^{'} d\theta_i^{'} d\varphi_i^{'}, \\ A_n &= \int_0^{2\pi} d\varphi_i^{' \int_0^{\pi/2} Y_{n,0}(\theta_i^{'}) \cos\theta_i^{'} \sin\theta_i^{'} d\theta_i^{'}, \\ A_n &= 2\pi \int_0^{\pi/2} Y_{n,0}(\theta_i^{'}) \cos\theta_i^{'} \sin\theta_i^{'} d\theta_i^{'} \end{aligned}$$

Potrebno je uočiti da se po $\theta_i^{'}$ integrira od $[0 - \pi/2]$, a ne kao što je uobičajno od $[0 - \pi]$ jer se radi s gornjim dijelom hemisfere.

Idući korak je raspisivanje sfernog harmonika iz jednadžbe 3.

$$A_n = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos\theta_i^{'}) \cos\theta_i^{'} \sin\theta_i^{'} d\theta_i^{'} \quad (4)$$

Izraz $\left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ dolazi od normalizacijskog faktora sadržanog u sfernom harmoniku uz parameter $m=0$,

$$K_l^0 = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-|0|)}{(l+|0|)}} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}}.$$

U slijedećem koraku uvodi se supsticija $u = \cos \theta_i'$ time formula 4. poprima oblik:

$$A_n = 2\pi \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 P_n(u) P_l(u) du. \quad (5)$$

Rezultat integrala Lagrangeovih polinoma računa se prema slijedećoj formuli:

$$\int_0^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{1}{2n+1}, \text{ za } m=n$$

$$\int_0^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \text{ za } m \neq n \text{ i ako su } m \text{ i } n \text{ parni ili neparni}$$

$$\int_0^1 P_m(x) P_n(x) dx = f_{m,n}, \text{ za } m \text{ paran, } n \text{ neparan}$$

$$\int_0^1 P_m(x) P_n(x) dx = f_{n,m}, \text{ za } m \text{ neparan, } n \text{ paran}$$

gdje je $f_{m,n} \equiv \frac{(-1)^{(m+n+1)/2} m! n!}{2^{m+n-1} (m-n)(m+n+1) \left[\left(\frac{1}{2} m \right)! \right]^2 \{ [1/2(n-1)] \}^2}$

za slučaj gdje indeks $n = 1$ formula 5. poprima oblik:

$$n = 1: \quad A_1 = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

$$n \geq 1 \text{ i } n \text{ je neparan:} \quad A_n = 0$$

$$n \text{ je paran:} \quad A_n = 2\pi \left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{(n+2)(n+1)} \left[\frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2}!\right)^2} \right] \quad (6)$$

Koristeći se Stirlingovom formulom određuje se asimptotsko ponašanje A_n za

velike n -ove. Tako je izraz u vitičastim zagradama $\left[\frac{n!}{2^n \left(\frac{n}{2} \right)^n} \right] \approx n^{\frac{-1}{2}}$ što se krati s izrazom pod drugim korjenom za koji vrijedi $\approx n^{\frac{1}{2}}$. Stoga za koeficijente prijenosne funkcije za velike n -ove asimptotsko ponašanje je dano $A_n \approx n^{-\frac{1}{2}}$.

Uzimajući u obzir rezultat izведен za rotaciju sfernih harmonika i raspisujući jednadžbu refleksije pomoću sfernih harmonika dobiva se slijedeća jednadžba:

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sum_{m'=-l}^{l} L_{l,m} A_n D_{m,m'}^l(\alpha) \times \exp(\text{Im } \beta) \exp(\text{Im } \gamma) T_{n,l,m'} \\ T_{n,l,m'} = \int_{\phi_i'=0}^{2\pi} \int_{\theta_i'=0}^{\pi} Y_{l,m'}(\theta_i', \phi_i') Y_{n,0}(\theta_i', \phi_i') \sin \theta_i' d\theta_i' d\phi_i' = \delta_{l,n} \delta_{m',0}$$

Iz svojstva ortonormalnosti sfernih harmonika vrijedi da će svi koeficijent čiji su indeksi različit od $m=0$ i $n=l$ biti jednaki 0. Uzimajući to u obzir gornja jednadžba izgleda:

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} L_{l,m} A_l D_{m,0}^l(\alpha) \exp(\text{Im } \beta).$$

Dodatno se jednadžba pojednostavljuje uvrštavanjem izraza za $D_{m,0}^l(\alpha) \exp(\text{Im } \beta)$:

$$E(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} A_l L_{l,m} Y_{l,m}(\alpha, \beta).$$

Iz jednadžbe je vidljivo da se parameter γ ne pojavljuje na desnoj strani stoga se izostavlja tako da se napokon dobiva konačna formula:

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} A_l L_{l,m} Y_{l,m}(\alpha, \beta)$$

Ako gornju formulu napišemo tako da se uvede supstitucija

$$\hat{A}_l = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} A_l,$$

formula za emisivnost tada izgleda

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \hat{A}_l L_{l,m} Y_{l,m}(\alpha, \beta).$$

Koeficijent \hat{A}_l nestaju za neparne vrijednosti od $l > 1$, dok za parne vrijednosti opadaju vrlo brzo prema $l^{-\frac{5}{2}}$. Brzo opadanje je vidljivo ako se izračuna nekoliko vrijednosti za \hat{A}_l (Slika 16).

$$\hat{A}_0 = 3.141593$$

$$\hat{A}_1 = 2.094395$$

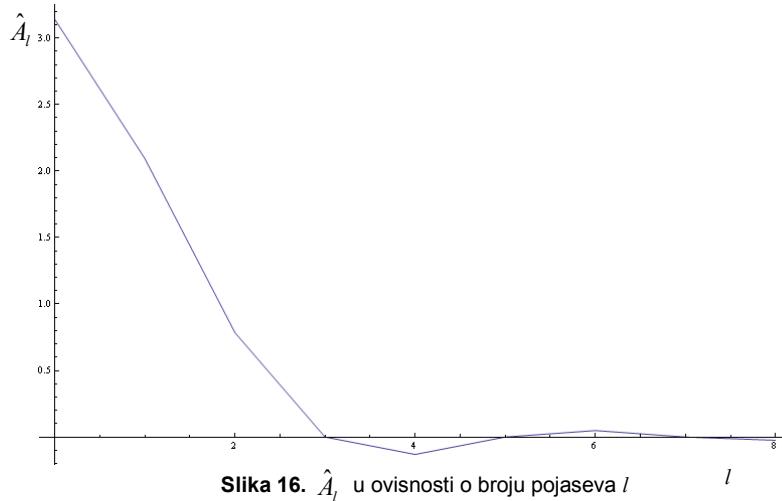
$$\hat{A}_2 = 0.785398$$

$$\hat{A}_3 = 0$$

$$\hat{A}_4 = -0.130900$$

$$\hat{A}_5 = 0$$

$$\hat{A}_6 = 0.049087$$

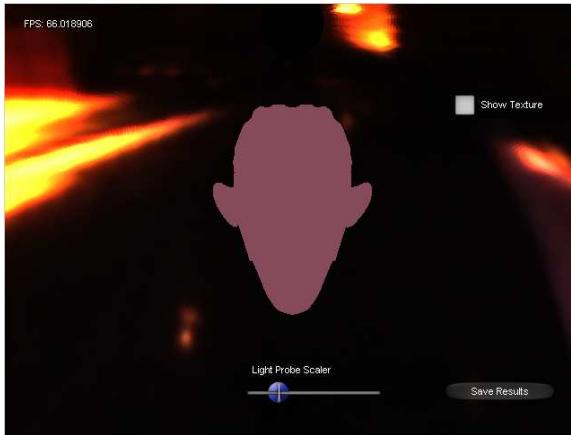


Slika 16. \hat{A}_l u ovisnosti o broju pojaseva l

Zbog naglog opadanja koeficijenata \hat{A}_l emisivnost se dovoljno dobro aproksimira sa smo 9 koeficijenata. Treba napomenuti da prijenosna funkcija ovdje dijeluje kao niskopropusni filter.

7.4 Empirijski rezultati

Konkretni rezultati dobiveni za jednostavnu scenu osvjetljenju svjetlosnom sondom Grace Cathedral dani su na slikama 17-22. Broj uzoraka za numeričku integraciju je 10 000, korištene su obje implementacije s tim da se klasičnom metodom generira osvjetljenje za 5 pojaseva dok se sa Ramamoorthi– Hanrahan generira osvjetljenje za 3 pojasa.



Slika 17. Rezultat sa samo jednim pojasmom



Slika 18. Rezultat za dva pojasa



Slika 19. Rezultat za tri pojasa, korištenjem standardne formule



Slika 20. Rezultat za tri pojasa, korištenjem Ramamoorthi – Hanahara formule



Slika 21. Rezultat za četri pojasa



Slika 22. Rezultat za pet pojaseva

Iz prikazanog je vidljivo da empirijski rezultati potvrđuju tvrdnje iz teorijskog dijela. Ako se bolje pogleda moguće je uočiti da upotrebom više pojaseva prijelazi u boji postaju oštriji ali razlike su male. Tri pojasa su sasvim dovoljna za aplikacije za koje je ova metoda namjenjena kao što su npr. računalne igre gdje je potrebno naći difuznu komponentu osvjetljenja nekog objekta na otvorenoj mapi.

8 BRDF

U prijašnjem poglavlju pokazano je da je za Lambertove površine dovoljno koristiti tri pojasa za dobru aprkosimaciju isijavanja.

Postavlja se pitanje kako prikazati refleksiju svjetla površine koja je npr. metalna. U tom slučaju BRDF funkcija nije obična konstanta tako da je nije moguće izvući iz integrala danog formulom 7.

$$L_r(\vec{\omega}_r) = \int_{\Omega_i} f_r(\vec{\omega}_i \rightarrow \vec{\omega}_r) L_i(\vec{\omega}_i) \cos \theta_i d\omega_i . \quad (7)$$

Također tu je pitanje broja pojaseva potrebnih za aprkosimaciju ovakvog modela. Početna jednadžba dana je formulom (7) ili praktičnije napisano:

$$L_r(v) = \int f_r(s, v) L_i(s) \max(0, s \cdot n) ds .$$

Gdje je $L_r(v)$ isijavanje uz smijer pogleda v , $L_i(s)$ je funkcija distribucije upadnog svjetla, $f_r(s, v)$ je BRDF. Pošto je potrebno integrirati tri različite funkcije, kako bi se smanjio broj koeficijenata uvodi se funkcija f^* koja je jednaka $f^* = f_r(s, v) \max(0, s \cdot n)$.

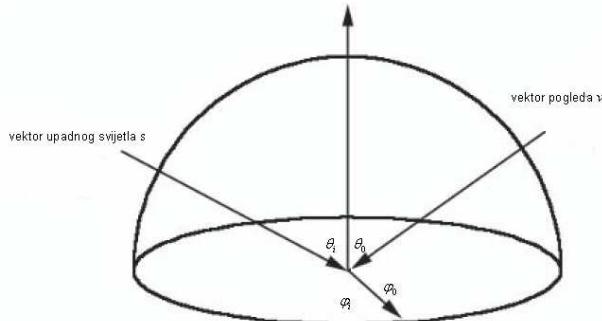
Projiciranje f^* se vrši prema formuli:

$$F_i^*(v) = \int_S f^*(s, v) y_l^m(s) ds .$$

Potrebno je napomenuti da je koeficijente F_i^* potrebno nanovo izračunati za svaku promjenu pogleda. Za prikaz u realnom vremenu obično se koristi tekstura u koju se upisuju predizračunati koeficijenti za niz različitih pogleda.

8.1 Modeli BRDF-a

Općeniti uvod u BRDF-ove dan je u poglavlju 3. U ovom radu biti će korišteni jednostavni, opće prihvaćeni modeli BRDF-a. Iako sama funkcija može ovisiti o nizu parametara kao što je valna duljina ili pozicija točke na materijalu, ovdje korišteni BRDF-ovi koristit će samo vektor upadnog svjetla i vektor pogleda.



Slika 23. Parametri BRDF-a.

8.1.1 Oren-Nayar model difuzne refleksije

Ovaj model refleksije nastao je jer je uočeno da se određene difuzne materijale nedovoljno dobro prikazuju s Lambertovim modelom. Materijali kao što je zemlja, neke vrste odjeće, glina pokazuju veliki stupanj retrorefleksije (refleksija u smjeru odakle je svjetlost došla). Zbog tog svojstva izgled osvjetljenog objekta je plosnatiji pogotovo ako se gleda iz smjera upadnog svjetla. Na slici 24 i 25 se vidi Lamebertov i Oren-Nayar model. Razlike su malene pogotovo kad se radi s višestrukim izvorom osvjetljenja kao što je ovdje slučaj. Tako je primjetno kod Oren-Nayer modela da su prijelazi u boji postupniji, nema izraženo osvjetljenih dijelova.



Slika 24. Oren-Nayar difuzna



Slika 25. Lambertova difuzna refleksija.

Model je izgrađen na predpostavci da svaka točka sadrži veliki skup malih površina koje su različito usmjerene. Pojedinačno površine se mogu ponašati prema Lambertovom modelu ali ukupna cijelina ne. Kod ovog modela mikropovršine reflektiraju veći dio svjetlosti prema izvoru svjetlosti, količina reflektirane svjetlosti ovisi o parametru grubosti.

Prilikom modeliranje grubosti, smjer mikropovršina se određuje koristeći se Gaussovom distribucijom sa srednjom vrijednosti nula. Standardna distribucija smijera površina se iz toga tretira kao mjera hraptavosti. Veća standardna devijacija označava da je smjer mikropovršina raznolikiji time grublji.

Ron Fosner je na temelju orginalne formule razvio jednostavniji oblik koji se koristi u ovom radu:

$$f_r = D * (N \bullet L) * (A + B * \sin(\alpha) * \tan(\beta) * \text{MAX}(0, \cos(C)))$$

$$A = 1 - 0.5 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 0.33}$$

$$B = 0.45 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 0.09}$$

$$\alpha = \text{MAX}(\cos^{-1}(N \bullet L), \cos^{-1}(N \bullet V))$$

$$\beta = \text{MIN}(\cos^{-1}(N \bullet L), \cos^{-1}(N \bullet V))$$

$$C = \text{azimut kuta između vektora pogleda i upadne zrake svjetlosti.}$$

8.1.2 Ward-ov refleksijski model

Ovaj model razvijen je za materijale kao što je metal koji posjeduje izraženu spekularnu komponentu. Radi se o fizikalno ispravnom modelu kojeg je moguće napisati u izotropnom i anizotropnom obliku. Spekularni sjaj se kontrolira parametrom grubosti σ .

Formula za izotropni model glasi:

$$f_r = \left(D + S * \frac{e^{-\tan^2 \gamma / \sigma^2}}{2\pi\sigma^2 \sqrt{(N \bullet L)(N \bullet V)}} \right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}(N \bullet H)$$

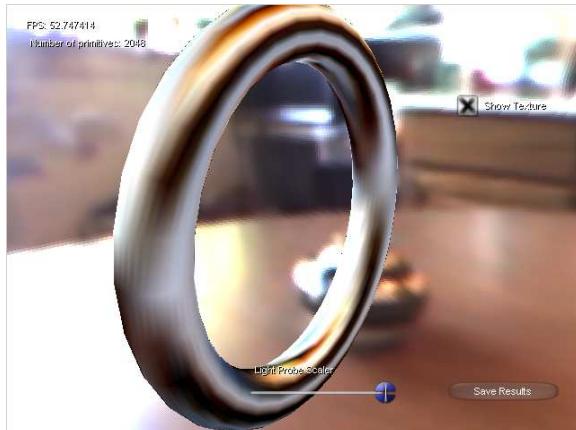
Za anizotropni model formula je:

$$f_r = \left(D + S * \frac{e^{-\tan^2 \gamma \left(\frac{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \right)}}{2\pi\sigma_x\sigma_y \sqrt{(N \bullet L)(N \bullet V)}} \right)$$

$$\gamma = \cos^{-1}(N \bullet H)$$

ϕ = azimut kuta između vektora pogleda i tangencijalne ravnine.

Rezultati za izotropnu i anizotropnu verziju prikazani su na slikama 26 i 27.



Slika 26. Ward anizotropski.



Slika 27. Ward izotropski.

Za anizotropni model spekularni odsjaj je uvelike izražen u smjeru anisotropije.

8.1.3 Cook-Torrance model

Ovaj model razvijen je za prikaz metalnih površina. Površina se opisuje kao skup velikog broja mikroploha koje reflektiraju svjetlost u različitim pravcima. Formula glasi:

$$f_r = \left(\frac{FDG}{(N \bullet L)(N \bullet V)} \right)$$

8.1.3.1 Distribucijska funkcija mikroploha

Opisuje distribuciju nagiba mikropovršina. Kako svjetlost dolazi pod različitim kutovima, različite distribucije nagiba mikropovršina će uzrokovati različite uzorke refleksije. Formula funkcije distribucije mikropovršina glasi:

$$D = \frac{e^{-\left(\frac{\tan \alpha}{m}\right)^2}}{m^2 \cos^4 \alpha}.$$

Gdje je m prosječan nagib mikropovršine, α je $\alpha = \cos^{-1}(N \bullet H)$ gdje je $H = L + V$. Malena vrijednost m -a znači da je površina glatka tj. da su mikropovršine plitke čime je spekularni sjaj oštiji. Velika vrijednost m -a indicira grubu površinu s dubokim udubinama čime površina materijala daje široki odsjaj. Slike 28. i 29. prikazuju rezultate za Cook-Torrance model za različite vrijednosti parametra m .



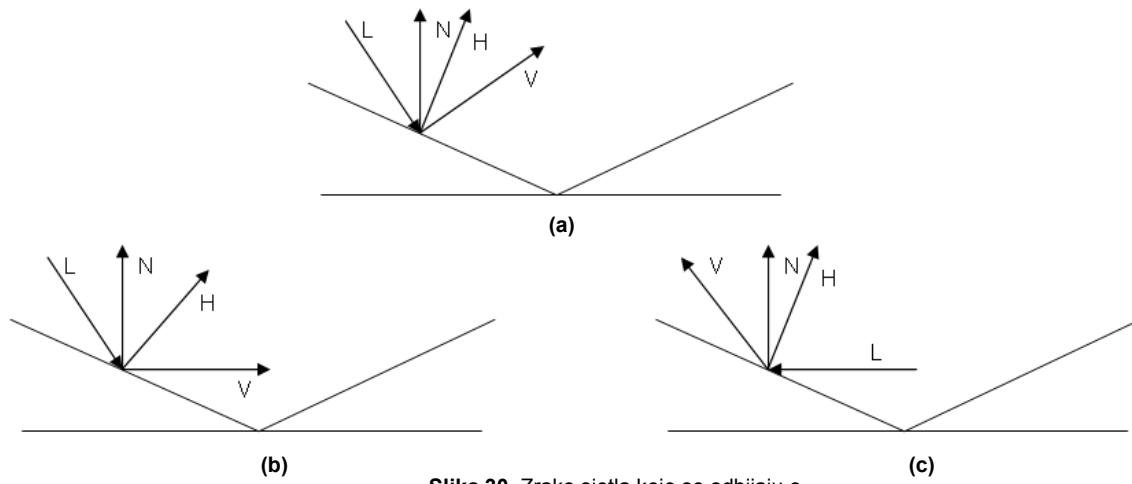
Slika 28. Cook-Torrance, $m=0.5$.



Slika 29. Cook-Torrance, $m=0.6$.

8.1.3.2 Geometrijsk izraz G

Parametar G se koristi za računanje utjecaja geometrije mikropovršina na količinu spekularne refleksije. Stijenka mikropovršine može blokirati svjetlo koje bi inače palo na površinu ili svjetlo koje je palo na mikropovršinu pri izlasku biva blokirano.



Slika 30. Zrake sjetla koje se odbijaju o mikropovršine. (a) Bez ometanja. (b) Dijelomično ometanje reflektirane zrake. (c) Dijelomično ometanje upadne zrake.

Formula za izračunavanje G-a glasi:

$$G = \min \left\{ 1, \frac{2(N \bullet H)(N \bullet V)}{(V \bullet H)}, \frac{2(N \bullet H)(N \bullet L)}{(V \bullet H)} \right\}.$$

8.1.3.3 Fresnelov izraz

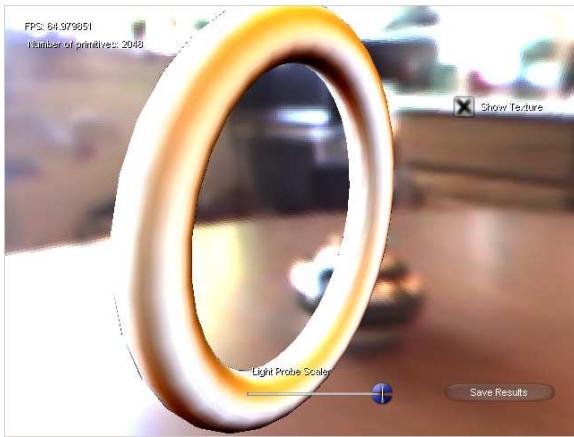
Količina reflektiranog svjetla koje se vidi ovisi o kutu pogleda. Ako se površina vode gleda okomito s vrha, vrlo malo refleksijskog odsjaja će doći do promatrača. U slučaju kad se voda gleda paralelno s njenom povšinom spekularni odsjaj je izuzetno naglašen. Ova pojava se naziva Fresnelovom refleksijom i izuzetno je bitna za materijale kao što je plastika, staklo, voda itd. Aproksimacija Fresnelove formule dana je od strane Schlick-a i glasi:

$$F = f_\lambda + (1 - f_\lambda)(1 - N \bullet V)^5$$

f_λ je Frasnalov refleksijski indeks.

8.2 Rezultati izvođenja

Kod Lambertovih površina pokazano je da su dovojno tri pojasa za aprkosimaciju isijavanja. Za projiciranje BRDF-a situacija je komplikiranija. Ako se promatra spekularni sjaj na objektu vidljivi su oštiri lokalizirani prijelazi u osvjetljenu pojedinih dijelova ovisno o kutu pogleda i dominatnom smjeru izvora svjetlosti. Za aproksimaciju takvih funkcija jasno je da će biti potrebno više od tri pojasa. Traženje analitičkog rješenja broja pojaseva je izuzetno teško zbog složenosti podintegralne funkcije. Ovdje će biti predstavljeni eksperimentalni rezultati za različite modele BRDF-ova. Uspoređivat će se rezultati za tri i pet pojaseva.



Slika 31. Cook-Torrance model, tri pojasa.



Slika 32. Cook-Torrance model, pet pojaseva.



Slika 33. Oren-Nayar difuzni model, tri pojasa.



Slika 34. Oren-Nayar difuzni model, pet pojaseva.



Slika 35. Ward-ov anizotropski model, tri pojaseva.



Slika 36. Ward-ov anizotropski model, pet pojaseva.



Slika 37. Ward-ov izotropski model, tri pojaseva.



Slika 38. Ward-ov izotropski model, pet pojaseva.

Iz danih slika 31-38 odmah su vidljive značajne razlike u kvaliteti prikaza za različiti broj pojaseva. Aproximacija s tri pojasa nije u mogućnosti prikazati oštре prijelaze niti uske pojaseve osvjetljenja. Razike su značajne čak i za Oren-Nayar difuzni model. Iz prikazanog proizlazi zaključak da je za sjenčanje površna koje nisu Lambertove potrebno koristiti minimalno pet pojaseva.

Programska implementacija predložena od strane Jan Kautz, Peter-Pike Sloan i John Snyder u radu "Fast, Arbitrary BRDF Shading for Low-Frequency Lighting Using Spherical Harmonics" također radi s pet pojaseva, što je kako je vidljivo minimum. Koeficijenti funkcije distribucije svjetla se zapisuju u strukturu točke, njih ukupno 75. S tim da je spomenute koeficijente potrebno rotirati u lokalni koordinatni sustav točke. Koeficijenti funkcije f^* se računaju u lokalnom koordinatnom sustavu za niz vektora pogleda \vec{v} . Za spremanje tih koeficijenata predlažu korištenje teksture veličine 128x128 slikovnih elementata što znači da je

potrebno ukupno izračunati 16384 grupe koeficijenata. Veličina jednog slikovnog elementa tekture bi tako trebala biti 100 bajtova. Ovakva implementacija je izuzetno zahtjevna i za CPU-u i GPU-u, tako da iscrtavanje nije moguće obaviti u stvarnom vremenu.

Drugačiji pristup problemu su predložili Hao Chen i Xinguo Liu u radu "Lighting and Material of Halo 3". Njihova ideja je prikazati niskofrekventni dio funkcije f^* preko sfernih harmonika, srednje frekvencije pomoću kubne mape okoline dok se viskofrekventni dio računa klasično preko dominatnog izvora osvjetljenja. Pomoću ovog rješenja moguće je iscrtavanje u stvarnom vremenu ali ovakav pristup radi samo za izotropne BRDF-ove i točno se prikazuje samo niskofrekventna komponenta.

Iz priloženog se vidi da trenutno nije moguće u potpunosti koristiti ovakav model osvjetljenja u stvarnom vremenu ali uz povećanjem procesorske snage i propusnosti između grafičke kartice i centralne memorije će biti moguće.

9 Programska implementacija

Kao jezik za programsku implementaciju korišten je C++, dok je za pisanje programa za sjenčanje korišten HLSL. Od tehnologija za iscrtavanje se koristi Direct3D, za izradu GUI-a korišten je DXUT dok su ostali zahtjevi pokriveni s Win32 API-jem i STL-om. Struktura samog programa proizlazi iz algoritma čiji su osnovni koraci:

1. Generiranje uzoraka.
2. Računanje koeficijenata prijenosne funkcije ili koeficijenata BRDF-a.
3. Računanje koeficijenata funkcije distribucije svjetla.
4. Iscrtavanje scene.

9.1 Generiranje uzoraka

Generiranje uzoraka izvedeno je preko klase SampleGenerator. Od klase se očekuje da za zadani broj uzoraka generira nasumične točke na jediničnoj sferi prema uniformnoj razdiobi. Uz generiranje samih točaka klasa također računa vrijednosti funkcije sfernih harmonika u danim točkama za zadani broj pojaseva. Izračunate vrijednosti se kasnije koriste za izračunavanje koeficijenata prijenosne funkcije i funkcije distribucije svjetla.

```
class SampleGenerator
{
private:
    UINT mNumBands;                                // broj pojaseva
    UINT mNumSqrtSamples;                           // korjen od broja uzoraka
    UINT mNumSamples;                               // ukupan broj uzoraka

    SHSamples* mSHSamples;                         // matrica uzoraka

    char* pointer;
    void freeMem( char* pPointer, SHSamples* pSHSamples, UINT pNumSamples );
    void allocateMem( char** pPointer, SHSamples** pSHSamples, UINT pNumSamples );

public:
    SHSamples* calculateSamples( UINT mNumSqrtSamples ); // racuna uzorke
    SampleGenerator( UINT numBands ); // inicijalizira objekt na temelju broja pojaseva
    UINT getNumBands();                // vraca broj pojaseva
    UINT getNumSamples();              // vraca broj uzoraka
    SHSamples* getSHSamples();         // vraca same uzorke

    ~SampleGenerator();
};
```

9.2 Računanje koeficijenata prijenosne funkcije ili BRDF-a

Potrebno je naglasiti da je ovaj korak opcionalan. Ako se koristi Ramamoorthi–Hanrahan rješenje ovaj korak je suvišan jer kako je pokazano prijenosna funkcija se računa u lokalnom koordinatnom sustavu što omogućava jednostavno izračunavanje integrala koristeći Byerly-vu formulu. Za klasičnu metodu s druge strane, potrebno je izračunati prijenosnu funkciju. Izračun se vrši tako da se normala množi sa svakom točkom uzorka, taj proces je vremenski zahtjevan ali omogućava izvedbe složenih prijenosnih funkcija koje npr. ukjučuju funkciju vidljivosti. Kako se koeficijenti razlikuju za svaki vrh klasa također upisuje podatke o koeficijentima u strukturu vrhova. Uz računanje jednostavne prijenosne funkcije oblika $\cos\theta$, klasa omogućuje računanje produkta $f^* = f_r(s, v) \max(0, s * n)$ preko funkcije addBRDFCoefficientData. Parametar BrdfFunc* mFunc je pokazivač na baznu klasu koja posjeduje virtualnu funkciju koja računa vrijednost funkcije BRDF-a.

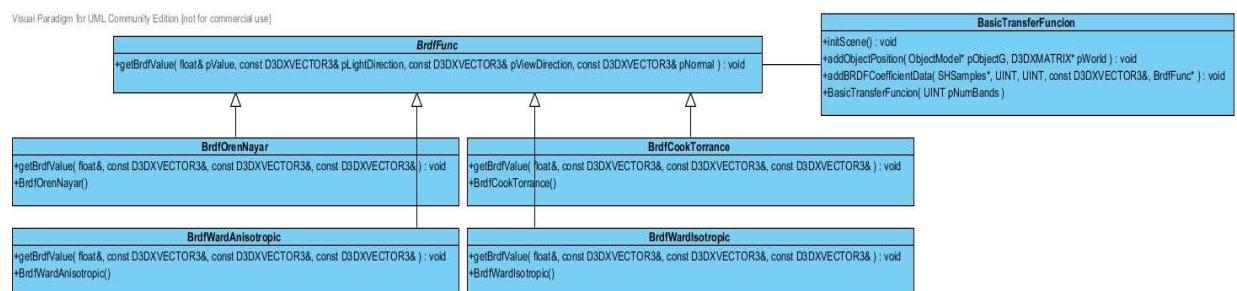
```

class BasicTransferFuncion
{
protected:
    virtual bool isShadowed(); // virtualna funkcija koja omogucava izvedbu
                               // transferne funkcije s funkcijom vidljivosti
    std::vector< ObjectPosition > objectOnScne; // scena s modelima i pripadajućim
                                                 // matricama tran. svijeta
    UINT numBands; // broj pojaseva

public:
    void initScene(); //funkcija koju je potrebno pozvati prije dodavanja objekata
                      // na scenu
    void addObjectPosition( ObjectModel* pObjectG, D3DXMATRIX* pWorld );// dodaje
                           // objekt i njihovu matricu tran. svijeta
    void addCoefficientData( SHSamples* pSamples, UINT pNumSamples, UINT
                           pNumCoefficients );//funkcija koja racuna
                           // koeficijente i upisuje ih u Vertexe tipa PNTC
    void addBRDFCoefficientData( SHSamples* pSamples, UINT pNumSamples, UINT
                           pNumCoefficients, const D3DXVECTOR3& pEyePos, BrdfFunc* mFunc );

    BasicTransferFuncion( UINT pNumBands );
};

```

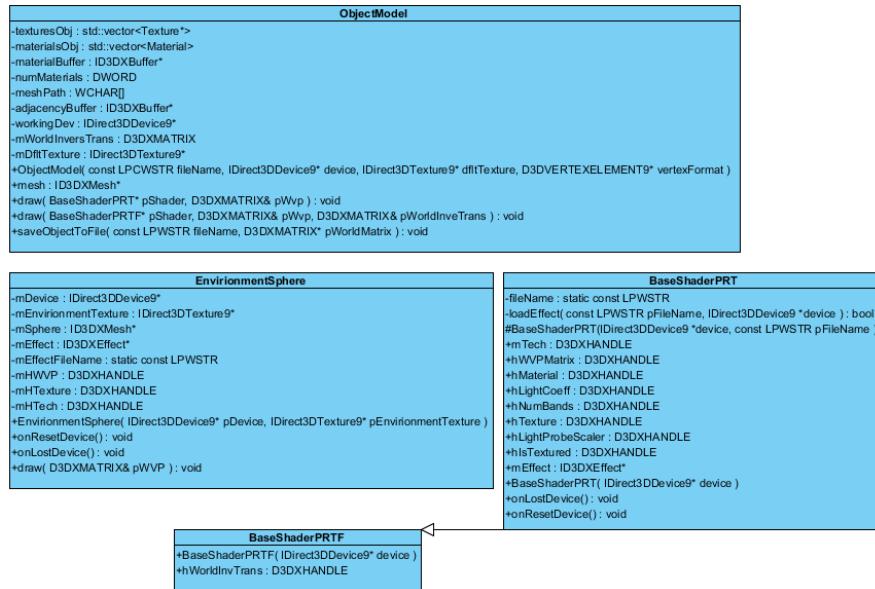


9.3 Računanje koeficijenata funkcije distribucije svjetla

Za ovaj zadatak zadužena je klasa LightProbe. Prvo je potrebno učitati teksturu u kojoj se spremjeni podatci o osvjetljenju scene u tu svrhu se koriste sferne mape. Koordinate točaka uzoraka preslikavaju se u koordinate slikovnih elemenata teksture gdje se boja preračunava u koeficijente sfernih harmonika.

9.4 IsCRTavanje scene

Kako bi se scena iscrtala koriste se klase ObjectModel, EnvironmmentSphere, BaseShaderPRT, BaseShaderPRTF. Spomenute klase su omotači oko klase ID3DXMesh i ID3DXEffect koje čine jedan od osnovnih dijelova Direct3D-a.



Kratki opis klase je:

ObjectModel – sadrži model objekta zajedno sa teksturama i materijalima. Posjeduje jednostavno sučelje za učitavanje modela opisanih u .x datoteci i funkciju za iscrtavanje modela gdje se postavljaju parametri i pokreće program za sjenčanje.

EnvironmentSphere – iscrtava sfernu mapu okoline. Sadrži mrežu poligona koji opisuju sferu. Kao tekstura koristi se sferna mapa koja se ujedno koristi za osvjetljenje. Program za sjenčanje je izuzetno jednostavan. Program za sjenčanje vrhova prosljeđuje transformiranu poziciju programu za sjenčanje slikovnih elemenata s tim da se za transformiranu vrijednost pozicije u komponenu vektora upisuje vrijednost homogene komponente kako bi okolina izgledala uvjek jednako udeljenom neovisno o poziciji kamere.

```
oPosH = mul(float4(posL, 1.0f), gWVP).xyww;
```

BaseShaderPRT i BaseShaderPRTF su omotači oko klase ID3DXEffect koja služi za rad s programima za sjenčanje.

Prvi program za sjenčanje temelji se na formuli $\int_S L(s)A(s)ds \approx \sum_{i=0}^{n^2} c_{L_i} c_{A_i}$.

Računanje ovog izraza obavlja se po vrhu jer emisivnost varira polako. Kako je prije spomenuto koeficijenti prijenosne funkcije spremjeni su u strukturi samog vrha što značajno povećava njegovu veličinu i time utječe na protočnost sustava. Direct3D ovaj problem unutar svog radnog okvira riješava kompresijom koeficijenata što omogućava korištenje i više od 6 pojaseva.

Drugi program za sjenčanje temelji se na formuli danoj od strane Ramamarthi – Hanrahoan-a. Izraz koji se računa također u programu za sjenčanje vrhova glasi:

$$E(n) = c_1 L_{2,2}(x^2 - y^2) + c_3 L_{2,0}z^2 + c_4 L_{0,0} - c_5 L_{2,0} + 2c_1(L_{2,-2}xy + L_{2,1}xz + L_{2,-1}yz) + 2c_2(L_{1,1}x + L_{1,-1}y + L_{1,0}z)$$

Konstante c dolaze od numeričkih vrijednosti za \hat{A}_i i normalizacija za sferne harmonike.

9.5 Performanse

Za testnu konfiguraciju korišteno je računalo s Intel Pentium M procesorom na 1.86 GHz, 1.5 GB radne memorije i grafička kartica ATI Mobility Radeon X700 s 128 MB memorije. Ispitivane su četri vrijednosti, vrijeme potrebno za generiranje koeficijenata svjetlosne mape (Tablica 1), vrijeme potrebno za generiranja koeficijenata prijenosne funkcije (Tablica 2), vrijeme potrebno za generiranje koeficijenata BRDF-a i brzina iscrtavanja gotove scene. Sva mijerenja su obavljena na 10000 uzoraka i 3 pojasa.

razlučivost teksture (slikovni element)	potrebno vrijeme (s)
256x256	0.0086849025
512x512	0.0095827822
640x640	0.010086478
800x800	0.010720915
1024x1024	0.010830147

Tablica 1. Vrijeme potrebno za generiranje koeficijenata svjetlosne mape.

Kod tablice 1. vidljivo je da se koeficijenti distribucije svjetla generiraju ispod jedne sekunde i to pri visokim razlučivostima teksture. Ovakav rezultat proizlazi iz činjenice da se koristi Monte Carlo integracija koja ne uzima vrijednost svakog slikovnog elementa već samo njih 10000 što odgovara teksturi razlučivosti od 100x100.

broj vrhova	potrebno vrijeme, klasična metoda (s)	potrebno vrijeme, Ramamarthi – Hanrahoan (s)
598	0.82	-
17575	28.446	-
31076	43.774	-

Tablica 2. Vrijeme potrebno za generiranja koeficijenata prijenosne funkcije

Tablica 2. pokazuje vrijeme potrebno za izračun koeficijenata prijenosne funkcije, vremenski najzahtjevnijeg dijela programa. Koeficijenti se računaju samo za klasičnu metodu jer je prijenosna funkcija dana u globalnim koordinatama, dok kod Ramamarthi – Hanrahoan taj korak nije potreban jer su koeficijenti isti za svaki vrh.

model BRDF-a	potrebno vrijeme (s)
Cook-Torrance	17.83
Oren-Nayar	11.84
Ward-ov anizotropski	41.39
Ward-ov izotropski	37.26

Tablica 3. Vrijeme potrebno za generiranje koeficijenata BRDF-a

Tablica 3. daje vrijeme potrebno za izrčun koeficijenata BRDF-a ovisno o tipu. Kod obične prijenosne funkcije računa se jednostavni skalarni produkt između normale i vektora upadne svjetlosti. U slučaju BRDF-a proračun je složeniji jer se višestruko upotrebljavaju operacije kao normalizacija vektora, skalarni produkt, potenciranje i vektorski produkt. Mjerena su obavljena na objektu s 1024 točke. Za aprkosimaciju funkcije koristi se pet pojaseva.

broj poligona	brzina iscrtavanja, Ramamarthi – Hanrahoan (FPS)
1073	57
34560	57
60339	55

Tablica 4. Brzina iscrtavanja

Tablica 4. prikazuje brzinu iscrtavanja za jednostavnu scenu. Razlučivost prozora je 1440x900 slikovnih elemenata.

10 Zaključak

Cilj rada je bio prikazati metodu za izračunavanje osvjetljenja scene u kojoj se koristi veliki kontinuirani izvor svjetla kao što je nebo. Drugi cilj je bio dati odgovor na pitanje koliko je koeficijenata potrebno za realističan i brz izračun osvjetljenja. Korištene su dvije implementacije temeljene na istim teoretski osnovama. Prva, klasična implementacija služi za generiranje rezultata za usporedbu. Druga implementacija se temelji na članku Ramamarthi i Hanrahoan i cilj je samog rada. U poglavlju 7.3 izvedena je formula za izračun koeficijenata prijenosne funkcije (Formula 6) iz koje se crtanjem grafa (Slika 16) vidi da ta funkcija dijeluje kao niskopropusni filter. Iz grafa je također vidljivo da je za aproksimaciju prijenosne funkcije dovoljno tri pojasa iz čega sljedi da je i za aproksimaciju emisivnosti dovoljno tri pojasa. Konkretni rezultati dani su na slikama 17-22 gdje se jasno vidi opravdanost te tvrdnje.

Ako se jednadžba refleksije popći tako da se u obzir uzmu površine koje nisu Lambertove iz poglavlja 8 se vidi da je minimalno potrebno pet pojaseva. Činjenica da je potrebno rotirati tri puta po 25 koeficijenata po točki i da je za svaku promjenu pogleda potrebno nanovo izračunavati koeficijene BRDF-a onemogućava iscrtavanje u stvarnom vremenu.

Prednosti ove metode određivanja osvjetljenja je u tome što omogućava korištenje kompleksnih svjetlosnih izvora. Formula je kratka i jednostavna tako da je pogodna za izračun na grafičkoj kartici.

Nedostatak ove metode je što je potrebna faza predprocesiranja kako bi se izračunali koeficijenti funkcije distribucije svjetla. Za mape niske razlučivosti ovaj korak je moguće izvršiti ispod sekunde što pokazuje da će se u budućnosti moći koristiti dinamičko osvjetljenje.

Drugi nedostatak je u tome što spekularnu komponentu nije moguće prikazati u stvarnom vremenu. Taj nedostatak će u budućnosti prema dosadašnjim trendovima razvoja grafičkih procesora biti ispravljen. Povećanjem memorije i popunjavanjem i proširenjem instrukciskog seta GPU-u će omogućiti rotaciju sfernih harmonika na njemu čime će biti riješeno usko grlo ove metode.

Iz dosad prikazanih rezultata vidljivo je da dana metoda predstavlja dobar odabir za grafičke aplikacije u stvarnom vremenu koje koriste Lambertove površine pogotovo uzimajući u obzir alternativu kao što je korištenje Phongovog modela osvjetljenja. Spekularna komponenta osvjetljenja se može izračunati na klasičan način određivanjem dominantanog izvora svjetlosti ili korištenjem kubne mape okoline što predstavlja zadovoljavajuću aproksimaciju za igre.

Literatura

- [1] *Advanced Lighting And Materials With Shaders*,
Kelly Dempski, Emmanuel Viale
- [2] *Radiosity and Realistic Image Synthesis*,
Michael F. Cohen, John R. Wallace
- [3] *An Efficient Representation for Irradiance Environment Maps*,
Ravi Ramamoorthi, Pat Hanrahan
- [4] *On the relationship between radiance and irradiance: determining the illumination from images of a convex Lambertian object*,
Ravi Ramamoorthi, Pat Hanrahan
- [5] *Spherical Harmonic Lighting: The Gritty Details*,
Robin Green
- [6] *Postupci ostvarivanja globalnog osvjetljenja*,
Robert Sajko
- [7] *Programming vertex and pixel shaders*,
Wolfgang Engle
- [8] *Fast, Arbitrary BRDF Shading for Low-Frequency Lighting Using Spherical Harmonics*,
Jan Kautz, Peter-Pike Sloan i John Snyder
- [9] *Lighting and Material of Halo 3*,
Hao Chen i Xinguo Liu

Sažetak (Model distribucije reflektiranog svjetla)

Realističnost u velikoj mjeri ovisi o modelu osvjetljenja koji se koristi. Za primjene u računalnoj grafici u realnom vremenu dosad su korišteni jednostavni izvori svjetla. Ovdje je predstavljena metoda koja omogućava efikasno i fizikalno utemeljeno izračunavanje isijavanja koristeći kompleksne izvore svjetlosti. Razmatra se prikaz difuznog objekta pod udaljenim osvjetljenjem zadanim u sfernoj mapi okoline. Isijavanje se prikazuje pomoću devet koeficijenata sfernih harmonika što čini dobru aprkosimaciju. Dana je jednostavna formula koja se izvršava na GPU-u. Model se kasnije proširuje na proizvoljne BRDF-ove gdje je pokazano da je potrebno koristiti minimalno 25 koeficijenata.

Ključne riječi: Isijavanje, Mape Okoline, Analiza Signala, Osvjetljenje, Lambertova Refleksija, Sferni Harmonici, Monte Carlo Integracija, BRDF

Abstract (Distribution model of reflected light)

Realism to a great degree depends on model of light that is used. For application in computer graphics in real time being simple light sources where used. Here is presented method that enables efficient and physically based calculation of irradiance using complex sources of light. It considers rendering off diffuse object under distant illumination as given in spherical map. Irradiance is presented by nine spherical harmonic coefficients what makes good approximation. Simple formula is given that runs on GPU. Model is later expand to support arbitrary BRDF where is shown that 25 coefficients is needed.

Keywords: Irradiance, Environment Maps, Signal Processing, Illumination, Lambertian Reflectance, Spherical Harmonics, Monte Carlo Integration, BRDF