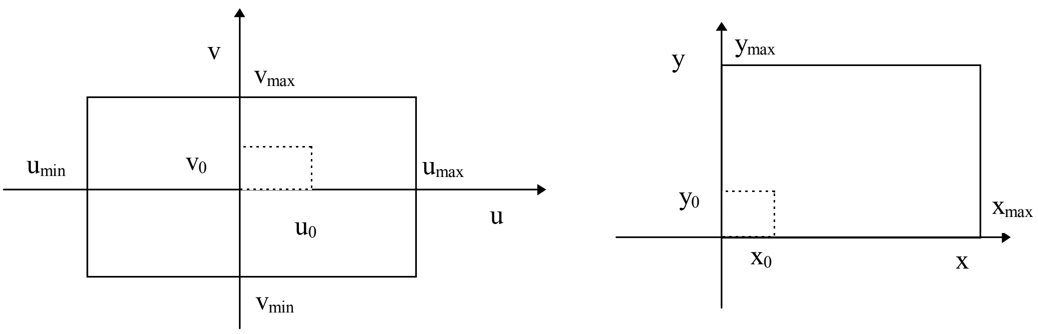
8. Fraktali – Mandelbrotov i Julijev fraktalni skup

8.1 Kompleksna ravnina i ravnina prikaza

Funkcija kompleksne varijable $f(z_n)$ promatra se u kompleksnoj ravnini čije su osi (u, v). Ravnina prikaza (x, y) je ravnina u kojoj prikazujemo promatranu kompleksnu funkciju. Prevođenje iz sustava (O u v) u sustav (O' x y) ovisi o promatranom području u pojedinim sustavima. Neka je promatrano područje kompleksne funkcije zadano s u_{max}, u_{min}, v_{max} i v_{min}. Područje sustava prikaza neka je zadano s rez_x i rez_y (Slika 8.1).



Slika 8.1. Ravnina kompleksne funkcije i ravnina prikaza.

Sustav prikaza je zaslon, pa su vrijednosti na *x* i *y* osi diskretne. Koordinate točke u_0 i v_0 u kompleksnoj ravnini koje odgovaraju vrijednostima x_0 i y_0 su:

$$u_0 = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{x_{\max}} x_0 + u_{\min}, \; v_0 = \frac{v_{\max} - v_{\min}}{y_{\max}} y_0 + v_{\min} \tag{1}$$

Navedenim izrazima definirano je prevođenje iz jednog u drugi sustav.

8.2 Skupovi Mandelbrota i Julije

Neka je zadano iterativno preslikavanje:

$$z_{n+1} = f\left(z_n\right), \tag{2}$$

gdje je $f(z_n)$ na primjer $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^{\,2} + c,\ z, c \in C$, a c je odabrana točka kompleksne ravnine za koju ispitujemo konvergenciju generiranog niza. Za ovako definirano iterativno preslikavanje možemo promatrati da li niz koji generiramo (z_0, z_1, z_2, ..) konvergira ili ne. Uvjet zaustavljanja u programskoj implementaciji može biti različit. Jedan primjer kriterija kojim ustanovljavamo da li niz konvergira je ocjena apsolutne vrijednosti:

$$|z_n| = \sqrt{u^2 + v^2}, |z_n| < \varepsilon, \quad n > n_0$$

Ako iterativno preslikavanje $z_{n+1} = f(z_n)$ nakon *n* iteracija ne zadovolji uvjet $|z| > \varepsilon$ reći ćemo da niz konvergira, a inače da divergira. Definirat ćemo “brzinu divergencije" brojem iteracija koje su potrebne da uvjet $|z| > \varepsilon$ bude zadovoljen. Postupak se provodi tako da se za svaki slikovni element ravnine prikaza (x_0, y_0) odredi pripadna točka kompleksne ravnine, te za nju ispita konvergencija pripadnog niza. Područje kompleksne ravnine unutar kojega iterativno preslikavanje generira konvergentne nizove naziva se Mandelbrot-ov skup.

Za Julijev skup potrebno je odabrati $c \in C$ (točku kompleksne ravnine), a z_0 je točka kompleksne ravnine za koju ispitujemo konvergenciju niza. Ako se za $c \in C$ odabere točka unutar Mandelbrot-ovog skupa Julijev skup će biti povezan, a inače nepovezan.

8.3 Radni zadatak

8.3.1 Postupak za Mandelbrotov skup:

1. Učitati prag epsilon *eps* i maksimalan broj iteracija *m*.
2. Učitati područje kompleksne ravnine koja se promatra (u_{min}, u_{max}), (v_{min}, v_{max}).
3. Pročitati razlučivost zaslona x_{max}, y_{max}.
4. Za svaku točku zaslona x_0, y_0:

   a) odrediti u_0, v_0 (prema formuli 1).

   a) Postaviti: $k = -1$, $c_{real} = u_0$, $c_{imag} = v_0$, $z_0 = 0$.

   b) Činiti:

   $k = k + 1$,

   $$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

   $$r = \sqrt{z_{real}^2 + z_{imag}^2}$$

   dok je ispunjen uvjet $r < eps$ i $k < m$:
5. Na mjestu x_0, y_0 iscrtati slikovni element u boji k .

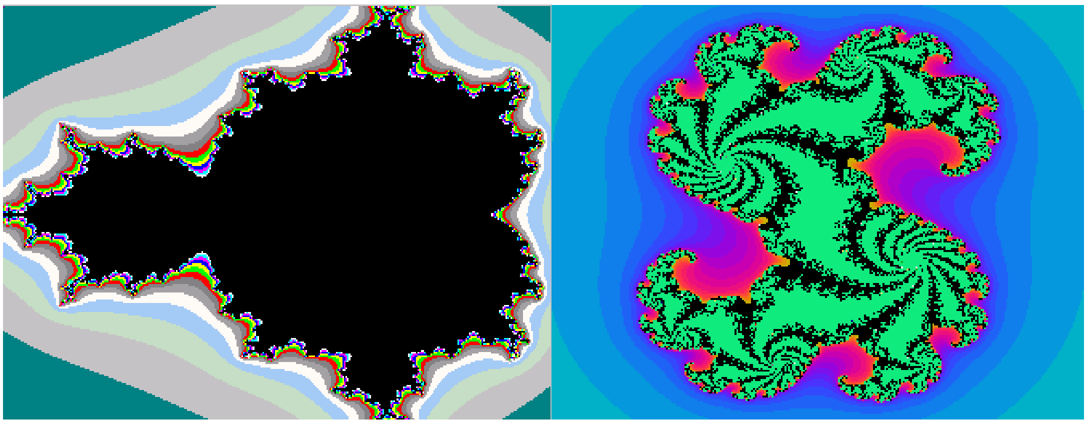
Primjer: *eps*=100, *m*=16, (u_{min}, u_{max}) = (-1.5, 0.5), (v_{min}, v_{max})=(-1, 1)

8.3.2 Postupak za Julijev skup:

Postupak je sličan prethodnom, a promjene su:

1. Dodatno učitati i kompleksnu konstantu $c \in C$.
   a) Postaviti: $k = -1$, $z_{real} = u_0$, $z_{imag} = v_0$.

Primjer: *eps*=100, *m*=16, $(u_{min}\ u_{max})=(-1\ \ 1)$, $(v_{min}\ v_{max})=(-1.2\ \ 1.2)$, $(c_{real}\ c_{imag})=(0.32\ \ 0.043)$.



Slika 1: Mandelbrotov i Julijev fraktalni skup.