

3 Grafičke primitive

3.1 2D DVODIMENZIJSKE PRIMITIVE

– 2D TOČKE

- Homogena koordinata (proizvoljna a obično je 1)
 - sjecište paralelnih pravaca (točka u ∞ može se zapisati)
 - jedinstven zapis osnovnih geometrijskih transformacija
 - dodatne mogućnosti kod parametarskog prikaza krivulja

$$\mathbf{V}=(x, y) \rightarrow \mathbf{X}=(x', y', h) \text{ ili } \mathbf{X}=(x_1, x_2, x_3)$$

$$\rightarrow x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\leftarrow x_1 = x x_3 \quad x_2 = y x_3$$

Točka u ∞ je $(\infty, \infty, 0)$. Kombinacija $(0, 0, 0)$ nije dozvoljena.

Npr. $(2, 5) \rightarrow (2, 5, 1)$ preslikavanje iz n prostora u $n+1$

$$\rightarrow (4, 10, 2)$$

$$(2, 4) \leftarrow (4, 8, 2)$$

– 2D PRAVAC

- implicitni oblik

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

- uvođenje homogene koordinate

$$a \cdot \frac{x_1}{x_3} + b \cdot \frac{x_2}{x_3} + c = 0$$

- homogena jednačina

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$$

- matrični zapis

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} = a x_1 + b x_2 + c x_3 = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\mathbf{n} = [a \quad b] \quad \text{vektor normale}$$

$$\mathbf{t} = [b \quad -a] \quad \text{vektor tangente}$$

- po dogovoru uvodimo:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{G} \begin{cases} > 0, & \mathbf{X} \text{ je "iznad" pravca} \\ = 0, & \mathbf{X} \text{ je na pravcu} \\ < 0, & \mathbf{X} \text{ je "ispod" pravca} \end{cases}$$

♣ dvije točke određuju pravac (vektorski produkt)

$$\mathbf{X}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad h_1)$$

$$\mathbf{X}_2 = (x_2 \quad y_2 \quad h_2)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & h_1 \\ x_2 & y_2 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 h_2 - y_2 h_1 \\ -(x_1 h_2 - x_2 h_1) \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{G}$$

♣ dva pravca sijeku se u točki (vektorski produkt)

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ako je $h = 0 \Rightarrow \mathbf{G}_1 \parallel \mathbf{G}_2$ jer se sijeku u ∞

$$x = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x_1}{0} \quad y = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x_2}{0}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}_1^\tau \times \mathbf{G}_2^\tau = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}^\tau = \left(\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 c_2 - b_2 c_1 \\ -(a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \right)^\tau = \begin{bmatrix} x \\ y \\ h \end{bmatrix}^\tau = \mathbf{X}^\tau$$

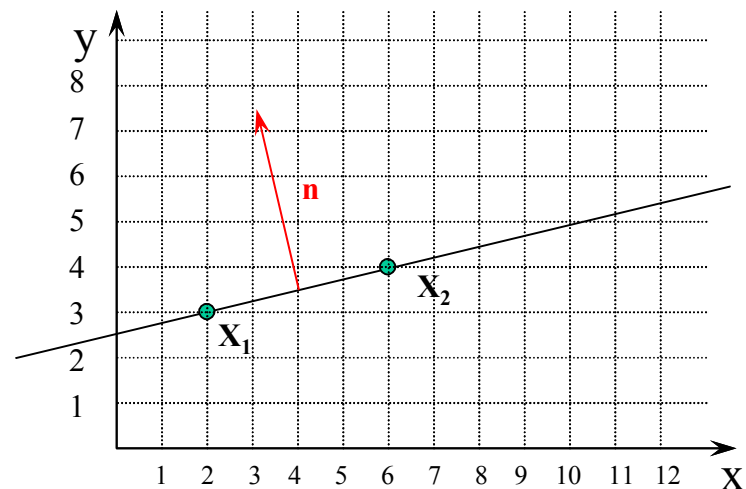
NPR:

$$\mathbf{X}_1 = (2 \ 3 \ 1)$$

$$\mathbf{X}_2 = (6 \ 4 \ 1)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3-4 \\ -(2-6) \\ 8-18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{n} = [-1 \ 4] \quad \text{vektor normale}$$

$$\mathbf{t} = [4 \ 1] \quad \text{vektor tangente}$$

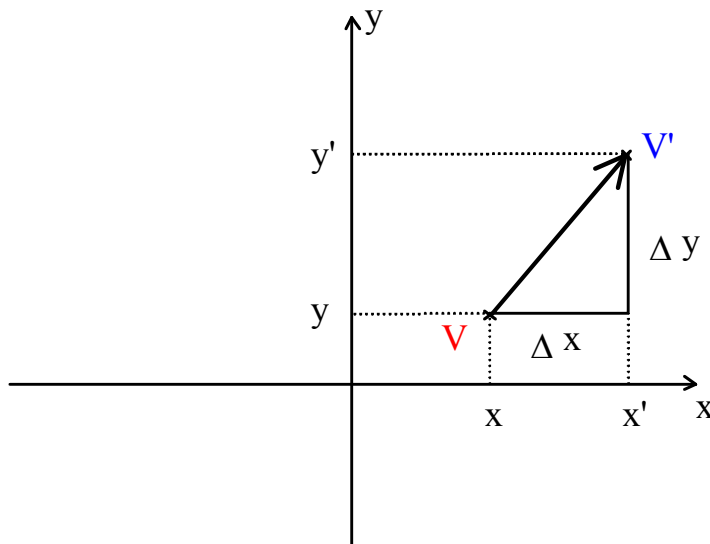
$-x_1 + 4x_2 - 10x_3 = 0$ zamjena redoslijeda točaka utječe na orijentaciju pravca

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= (6 \ 9 \ 3) \\ \mathbf{X}_2 &= (24 \ 16 \ 4) \end{aligned} \quad \mathbf{G} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 9 & 3 \\ 24 & 16 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -12 \\ 48 \\ -120 \end{bmatrix}$$

2D TRANSFORMACIJE

- TRANSLACIJA (POMAK) T- matrica translacija

$$\begin{aligned}x' &= x + \Delta x \\y' &= y + \Delta y\end{aligned}\quad [x' \quad y' \quad h'] = [x \quad y \quad h] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}$$

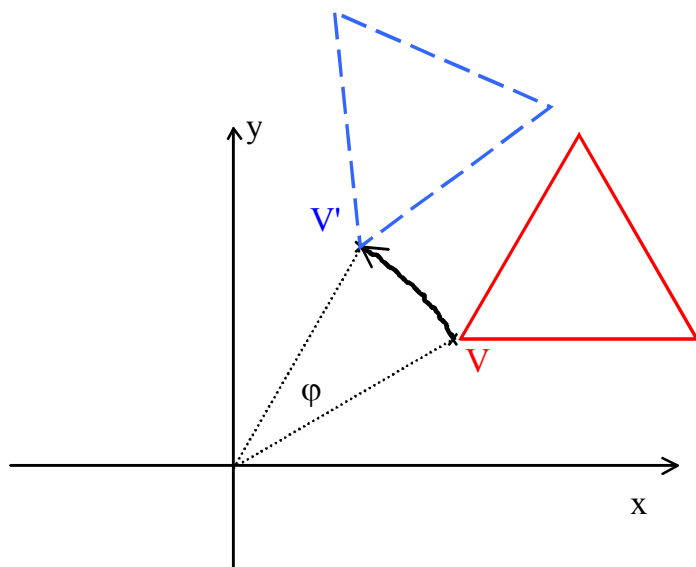


- ROTACIJA oko ishodišta za kut φ suprotno smjeru kazaljke na satu

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

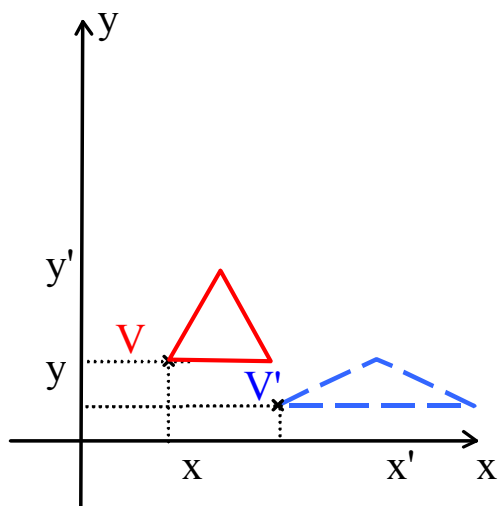


važno je obratiti pažnju da se radi o rotaciji oko ishodišta

- SKALIRANJE (promjena mjerila)

$$\begin{aligned} x' &= x s_x \\ y' &= y s_y \end{aligned} \quad [x' \quad y' \quad h'] = [x \quad y \quad h] \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$$

negativan predznak $-s_x$ (ili $-s_y$) daje zrcaljenje oko koordinatnih osi x (ili y)

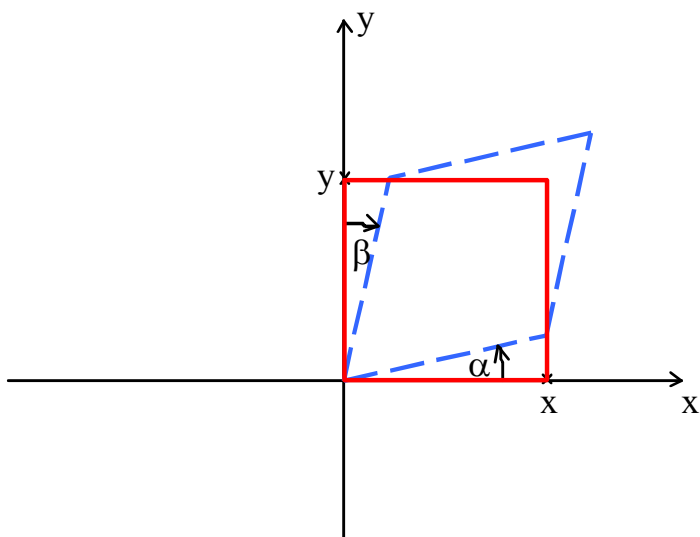


$$[x' \quad y' \quad h'] = [x \quad y \quad h] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ daje isti učinak kao } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

- SMIK - uzdužne transformacije

$$\begin{aligned} x' &= x + y \cdot \operatorname{tg} \beta \\ y' &= y + x \cdot \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \quad [x' \quad y' \quad h'] = [x \quad y \quad h] \cdot \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} \alpha & 0 \\ \operatorname{tg} \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



http://www.hdm-stuttgart.de/~rk020/Files/Computeranimation/affine_transformation/applet/affine_transform_applet.html
<http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/chap2fig4.html>

- INVERZNE TRANSFORMACIJE

- translacija - inverz matrice translacije odgovara inverznoj transformaciji tj. pomaku u suprotnom smjeru

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\Delta x & -\Delta y & 1 \end{bmatrix}$$

- rotacija - inverzna matrice rotacije odgovara inverznoj transformaciji tj. rotaciji u suprotnom smjeru

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- skaliranje - inverz matrice skaliranja odgovara inverznoj transformaciji tj. povećavanje odgovara smanjivanju

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- TRANSFORMACIJA PRAVCA

- transformacija točke \mathbf{V} u \mathbf{V}' matricom \mathbf{H} je

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} \mathbf{H}$$

- pravac \mathbf{G} transformiramo u \mathbf{G}' inverznom matricom \mathbf{H}

$$\mathbf{G}' = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$$

neformalni dokaz:

neka je $\mathbf{V} \mathbf{G} = 0 \Rightarrow \mathbf{V}' \mathbf{G}' = 0$ tj. Ako točka \mathbf{V} leži na pravcu \mathbf{G} , slika točke \mathbf{V}' leži na slici pravca \mathbf{G}' .

Ako je $\mathbf{V} \mathbf{G} = 0 \Rightarrow \mathbf{V} \mathbf{H} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} = 0 \Rightarrow \mathbf{V}' \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} = 0 \Rightarrow \mathbf{G}' = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}$

- VAŽNO

- operacije su sadržane u *podacima* (matricama),
a ne u instrukcijama

- zadnji stupac u navedenim matricama je:

- što znači da su transformacije AFINE

- t.j. čuvaju *paralelnost* pravaca.

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ \times & \times & 1 \end{bmatrix}$$

- transformacije translacije, rotacije i skaliranja ($s_x=s_y$) čine
također ortogonalno preslikavanje

- tj. čuvaju *kuteve*

- kod korištenja više uzastopnih transformacija bitan je ***redosljed***
tih transformacija (zato što množenje matrica nije komutativno)

- *** <http://www.cs.princeton.edu/~min/cs426/jar/transform.html>

- ** <http://www.cs.rit.edu/~icss571/clipTrans/transformation.html>

- *** http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/repository/edu/brown/cs/exploratories/appleTs/transformationGame/transformation_game_java_browser.html

3.2 3D TRODIMENZIJSKE PRIMITIVE

– 3D TOČKE

- Homogena koordinata (proizvoljna a obično je 1)

$$\mathbf{V}=(x, y, z) \rightarrow \mathbf{X}=(x', y', z', h) \text{ ili } \mathbf{X}=(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{x_1}{x_4} \quad y = \frac{x_2}{x_4} \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

$$\leftarrow \quad x_1 = x x_4 \quad x_2 = y x_4 \quad x_3 = z x_4$$

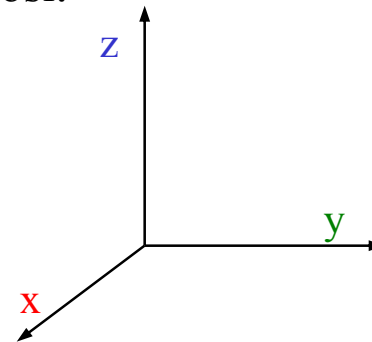
Točka u ∞ je $(\infty, \infty, \infty, 0)$. Kombinacija $(0, 0, 0, 0)$ nije dozvoljena.

– KOORDINATNI SUSTAV

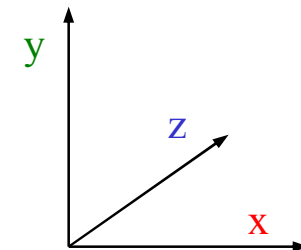
- Desni (lijevi) koordinatni sustav: kada se gleda iz pozitivnog smjera osi prema ishodištu rotacija za 90° suprotno smjeru (u smjeru) kazaljke na satu daje zakretanje osi.

Gledano iz: daje zakretanje:

- **x** $y \rightarrow z$
- **y** $z \rightarrow x$
- **z** $x \rightarrow y$



DESNI



LIJEVI₃₋₁₂

– 3D PRAVAC

- Parametarski prikaz pravca

- Proširenje eksplicitnog ili implicitnog oblika jednadžbe pravca iz dvodimenzijskog prostora za još jednu koordinatu neće dati pravac u trodimenzijskom prostoru.

$$x_1 = at + x_0$$

$$x_2 = bt + y_0$$

$$x_3 = ct + z_0$$

$$x_4 = dt + h_0$$

$$\mathbf{X} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4) = [t \quad 1] \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x_0 & y_0 & z_0 & h_0 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{L}$$

- \mathbf{L} je karakteristična matrica pravca
- t je parametar

♣ pravac je određen s dvije točke

$$\mathbf{V}_0 = (x_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad h_0), \quad t_0 = 0$$

$$\mathbf{V}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad h_1), \quad t_1 = 1$$

dvije točke uvrstimo u parametarsku
jednadžbu pravca:

$$\mathbf{V} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4) = [t \quad 1] \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x_0 & y_0 & z_0 & h_0 \end{bmatrix} = \mathbf{TL}$$

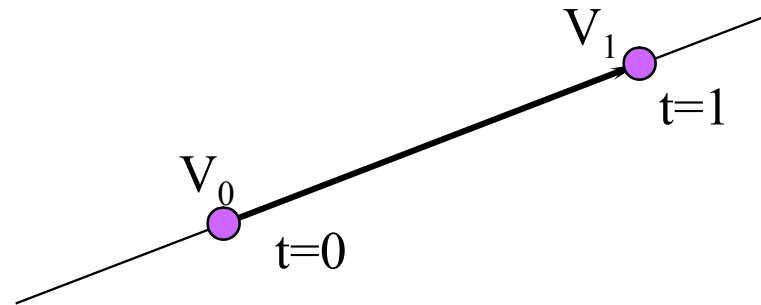
$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 & 1 \\ t_1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{L} \Rightarrow \mathbf{L} = \begin{bmatrix} t_0 & 1 \\ t_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{TL} = [t \quad 1] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0)t + \mathbf{V}_0$$

- ovaj oblik vrijedi i u 2D prostoru
- linearna interpolacija

<http://www.cs.technion.ac.il/~cs234325/Applets/NewApplets/experiments/interpolation.html>



– RAVNINA

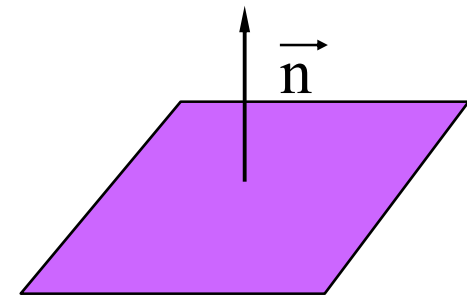
- Jednadžba ravnine u implicitnom obliku

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \quad (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \mathbf{VR} = 0$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ normala na ravninu određena je vektorom } \vec{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

- po dogovoru uvodimo:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \begin{cases} > 0, \mathbf{V} \text{ je "iznad" ravnine } \mathbf{R} \\ = 0, \mathbf{V} \text{ je na ravnini } \mathbf{R} \\ < 0, \mathbf{V} \text{ je "ispod" ravnine } \mathbf{R} \end{cases}$$



– RAVNINA

- Jednadžba ravnine u parametarskom obliku

$$x_1 = u a_1 + v b_1 + c_1$$

$$x_2 = u a_2 + v b_2 + c_2$$

$$x_3 = u a_3 + v b_3 + c_3$$

$$x_4 = u a_4 + v b_4 + c_4$$

$$\mathbf{V} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4) = [u \quad v \quad 1] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = [u \quad v \quad 1] \mathbf{R}$$

- \mathbf{R} je karakteristična matrica ravnine
- u, v su parametri koji određuju točku u ravnini

♣ ravnina je određena s tri točke (koje nisu kolinearne)

$$\mathbf{V}_0 = (x_0 \quad y_0 \quad z_0 \quad h_0), \quad u_0 = 0, v_0 = 0,$$

$$\mathbf{V}_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad h_1), \quad u_1 = 1, v_1 = 0,$$

$$\mathbf{V}_2 = (x_2 \quad y_2 \quad z_2 \quad h_2), \quad u_2 = 0, v_2 = 1.$$

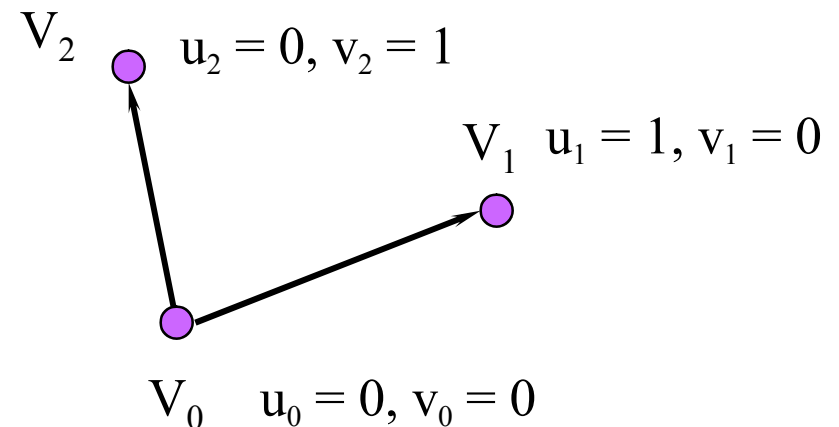
tri točke uvrstimo u parametarsku
jednadžbu ravnine:

$$\mathbf{V} = [u \quad v \quad 1] \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = [u \quad v \quad 1] \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0 \\ \mathbf{V}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) u + (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0) v + \mathbf{V}_0$$

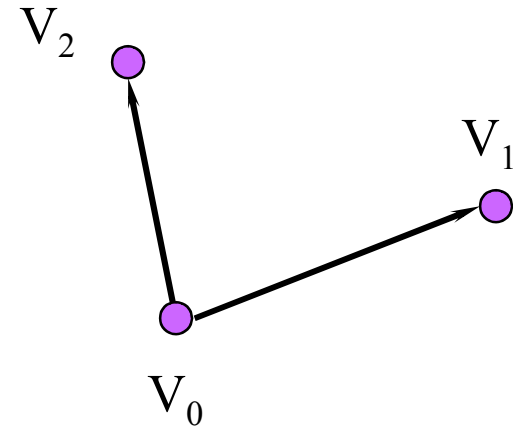


- ♣ normala na ravninu

$$\mathbf{n} = (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)$$

- ♣ površina trokuta

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \|(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)\|$$



Npr. $\mathbf{V}_0 = (2, 0, 0)$ $\mathbf{V}_1 = (0, 4, 0)$ $\mathbf{V}_2 = (0, 0, 3) \implies \mathbf{V}_0\mathbf{V}_1 = (-2, 4, 0)$, $\mathbf{V}_0\mathbf{V}_2 = (-2, 0, 3)$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \|(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \|12\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\| = \|6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}\| = \sqrt{61}$$

- ♣ jedinična normala na ravninu

$$\mathbf{n}_1 = \frac{(\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0) \times (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_0)}{2P_{\Delta}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

<http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html>

<http://www.slu.edu/classes/maymk/SketchpadApplets/ProjectionDotCrossProduct.html>

♣ presjek tri ravnine je točka (koje nisu koplanarne)

$$\mathbf{V} \mathbf{R}_0 = 0,$$

$$\mathbf{V} \mathbf{R}_1 = 0,$$

$$\mathbf{V} \mathbf{R}_2 = 0.$$

točke leži u sve tri ravnine.

$$\mathbf{V} \begin{bmatrix} [\mathbf{R}_0] & [\mathbf{R}_1] & [\mathbf{R}_2] & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & d \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad d]$$

$$\mathbf{V} \mathbf{Q} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad d] \Rightarrow \mathbf{V} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad d] \mathbf{Q}^{-1}$$

♣ presjek dvije ravnine je pravac (koje nisu koplanarne)

3D TRANSFORMACIJE

- TRANSLACIJA (POMAK) T- matrica translacija

$$x' = x + \Delta x$$

$$y' = y + \Delta y$$

$$z' = z + \Delta z$$

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{T}$$

- ROTACIJA

- oko x osi za kut α suprotno smjeru kazaljke na satu

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- oko y osi za kut β suprotno smjeru kazaljke na satu

$$\mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- oko z osi za kut γ suprotno smjeru kazaljke na satu

$$\mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- SKALIRANJE (promjena mjerila)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}$$

- SMIK (uzdužne deformacije) [TRANSFORMATION](#)

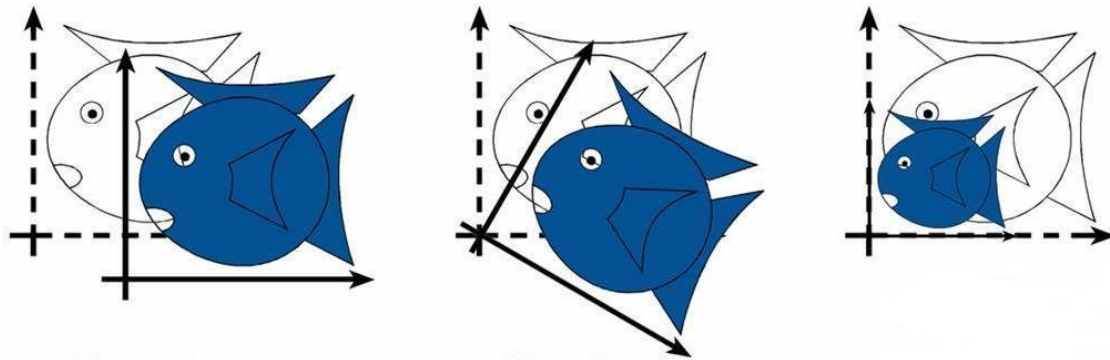
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & tg\alpha & tg\alpha & 0 \\ tg\beta & 1 & tg\beta & 0 \\ tg\chi & tg\chi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}' = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D}$$

- INVERZNE TRANSFORMACIJE

- translacija - inverzna matrice translacije odgovara inverznoj transformaciji tj. pomaku u suprotnom smjeru, odnosno mijenja se **predznak pomaka** duž pojedinih osi
- rotacija – inverzna matrice rotacije odgovara inverznoj transformaciji tj. rotaciji u suprotnom smjeru, odnosno mijenja se **predznak kuta** rotacije
- skaliranje - inverzna matrice skaliranja odgovara inverznoj transformaciji tj. povećavanje odgovara smanjivanju, odnosno mijenja se faktor skaliranja u **recipročnu** vrijednost

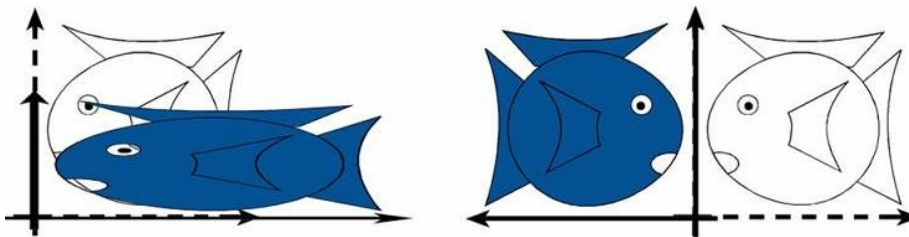
PODJELA TRANSFORMACIJA

- transformacije čvrstog tijela (engl. rigid body) - čuva *udaljenosti*
 - translacija, rotacija
- transformacije sličnosti (engl. similarity) - čuva *kutove*
 - jednoliko skaliranje,

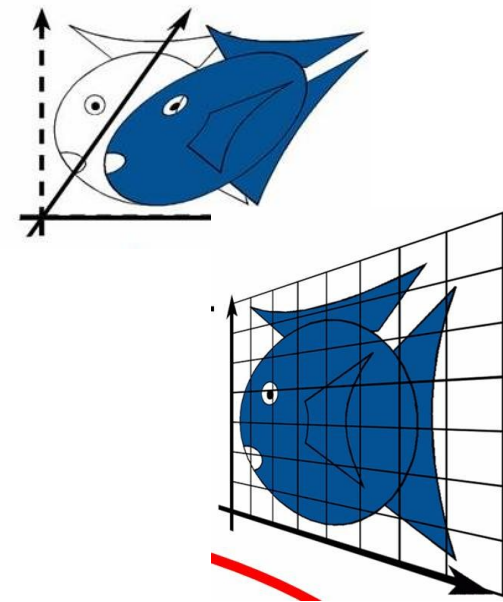


PODJELA TRANSFORMACIJA

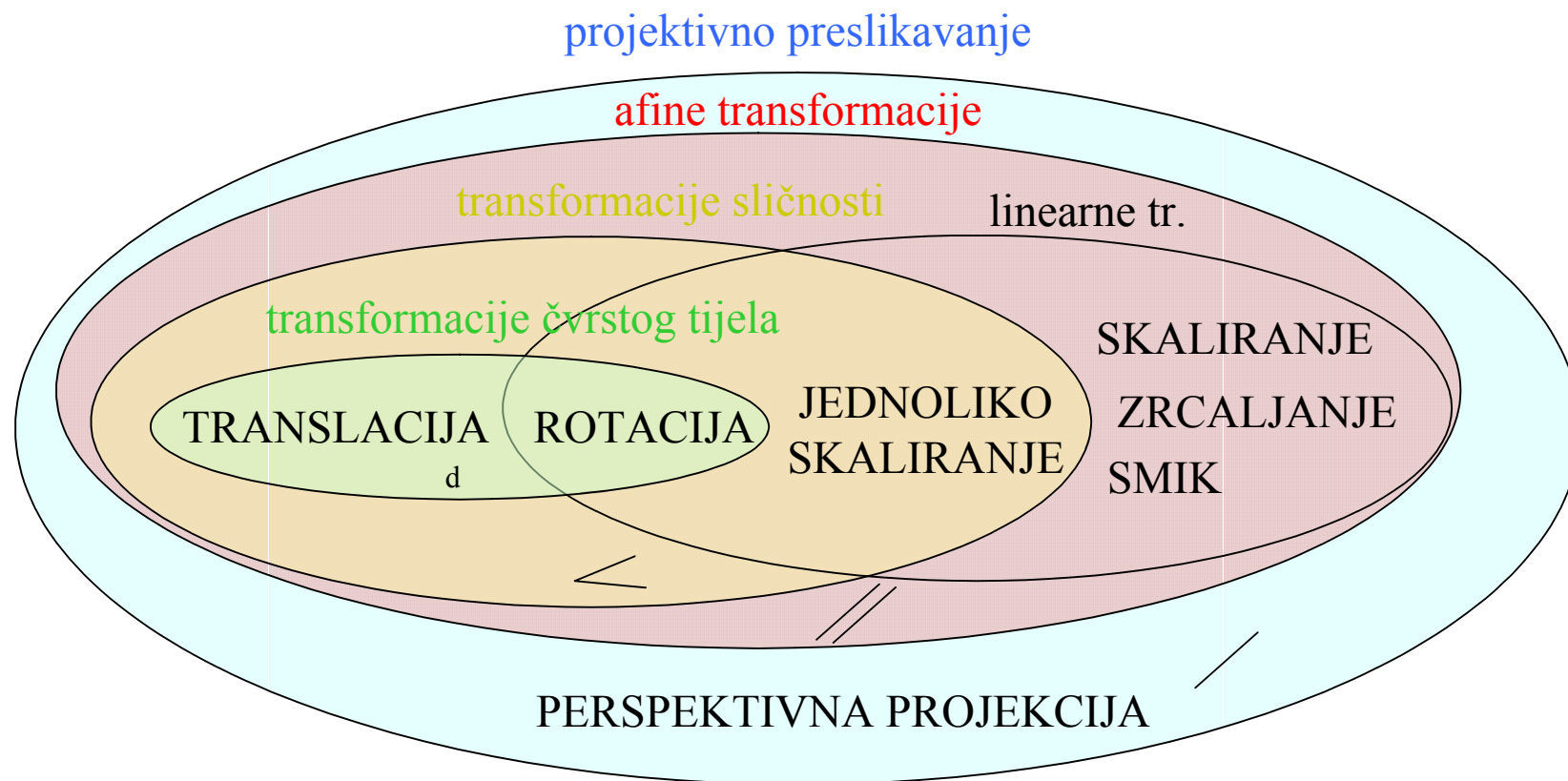
- Afine - čuva *paralelnost* pravaca
 - nejednoliko skaliranje $s_x \neq s_y$,
 - zrcaljenje
 - smik – uzdužne transformacije



- projektivne - *linije* ostaju linije
 - perspektivna projekcija
- nelinearne - linije postaju krivulje
 - uvijanje



http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/repository/edu/brown/cs/exploratories/applets/coordinateTransformations/coordinate_transformations_java_browser.html

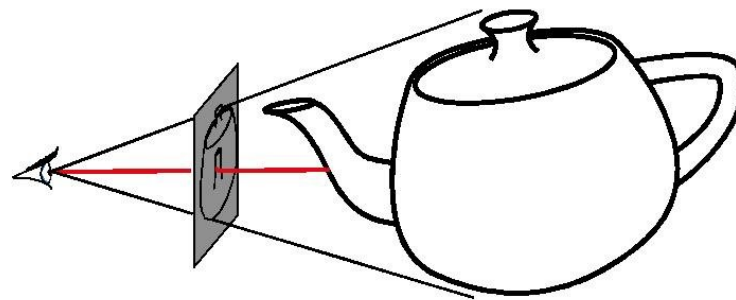
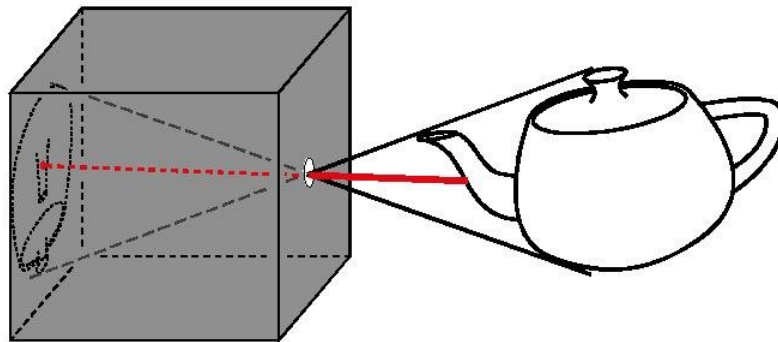


$$L(P + Q) = L(P) + L(Q)$$

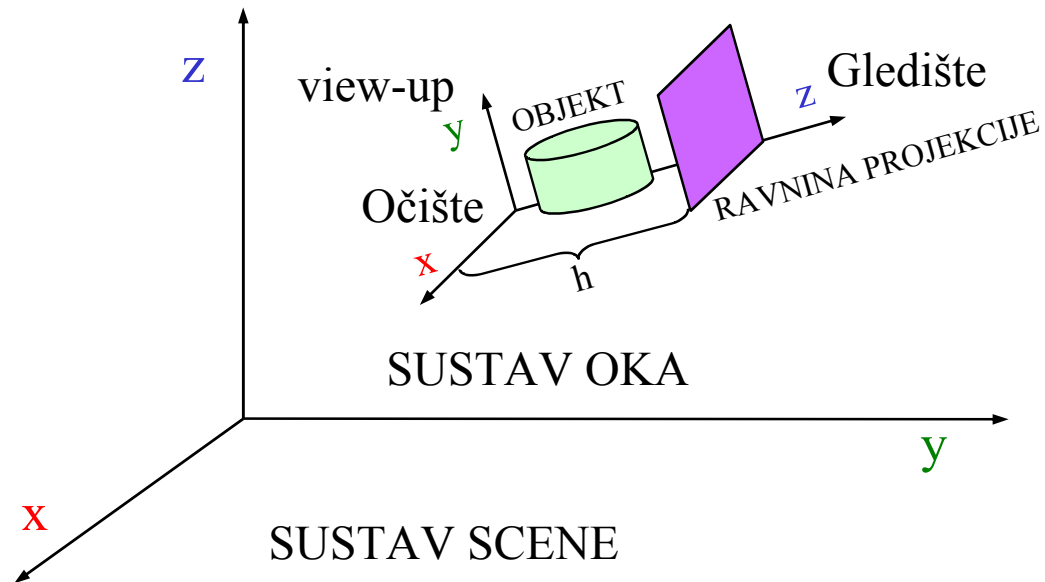
$$L(\alpha P) = \alpha L(P)$$

3.3 TRANSFORMACIJA POGLEDA I PROJEKCIJE

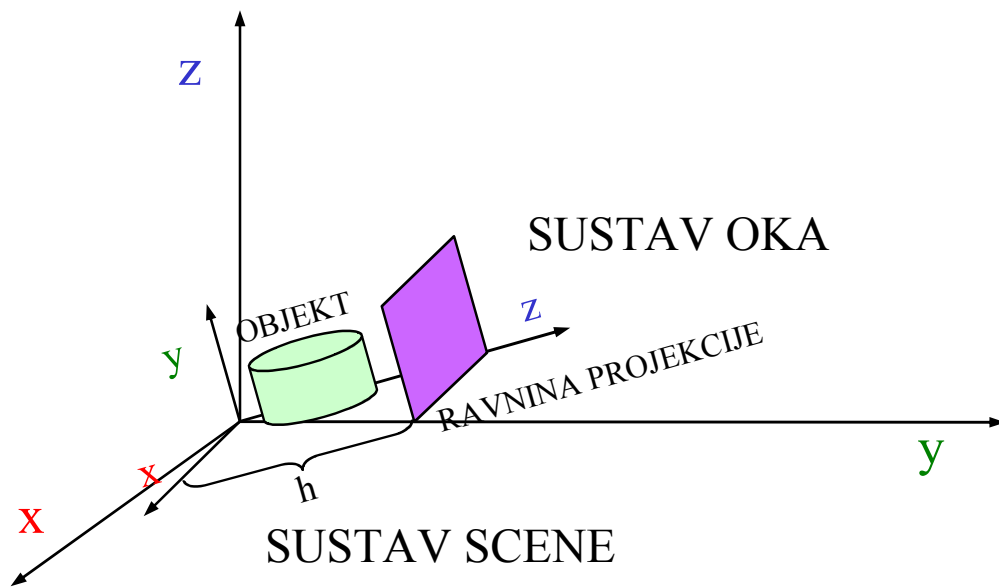
– projekcija - kamera



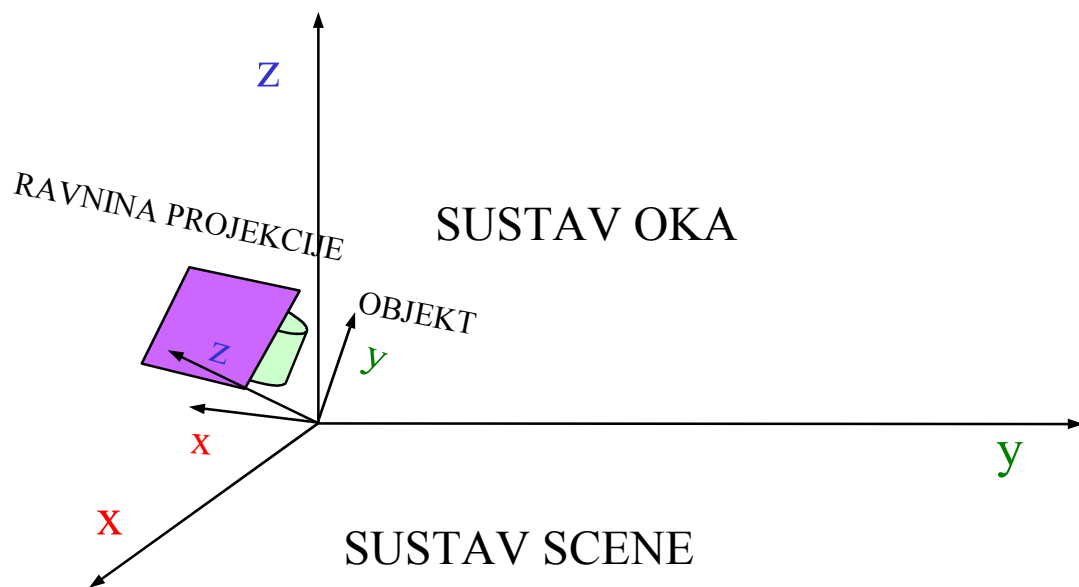
TRANSFORMACIJA POGLEDA



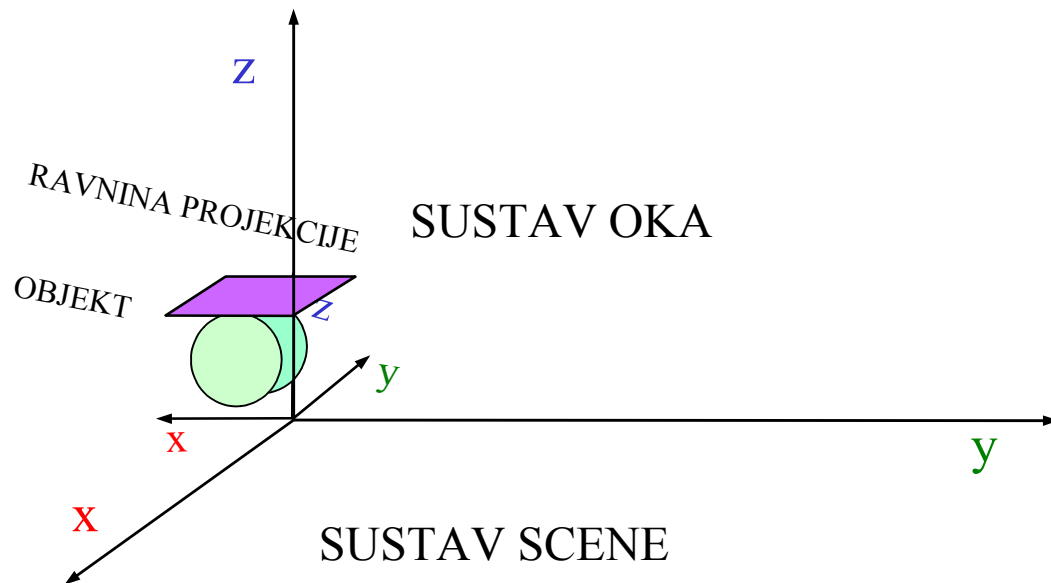
TRANSLACIJA
ROTACIJA OKO Z-osi
ROTACIJA OKO Y-osi
ZRCALJENJE



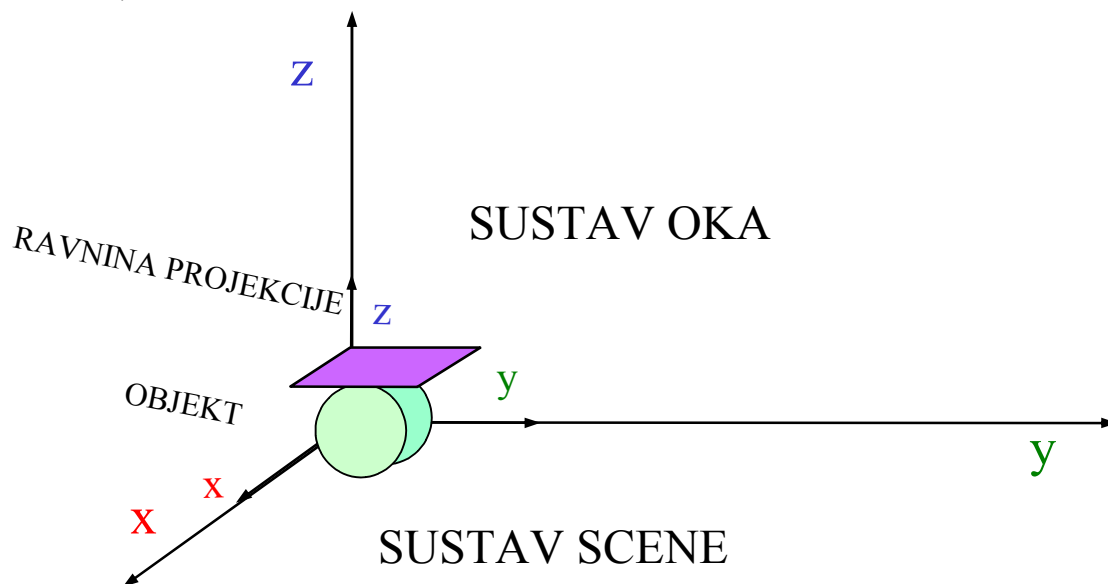
TRANSLACIJA



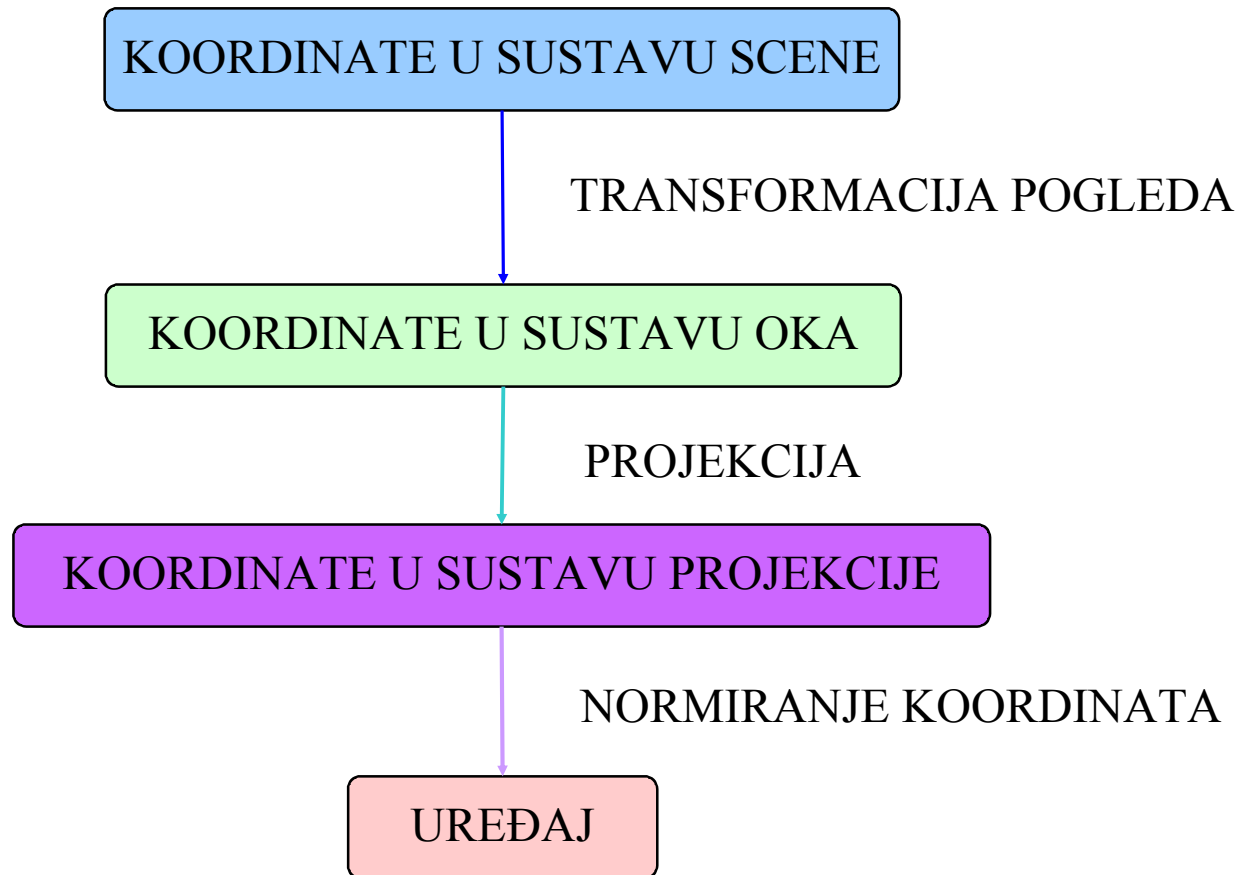
ROTACIJA OKO Z-osi



ROTACIJA OKO Y-osi



POKLAPANJE osi

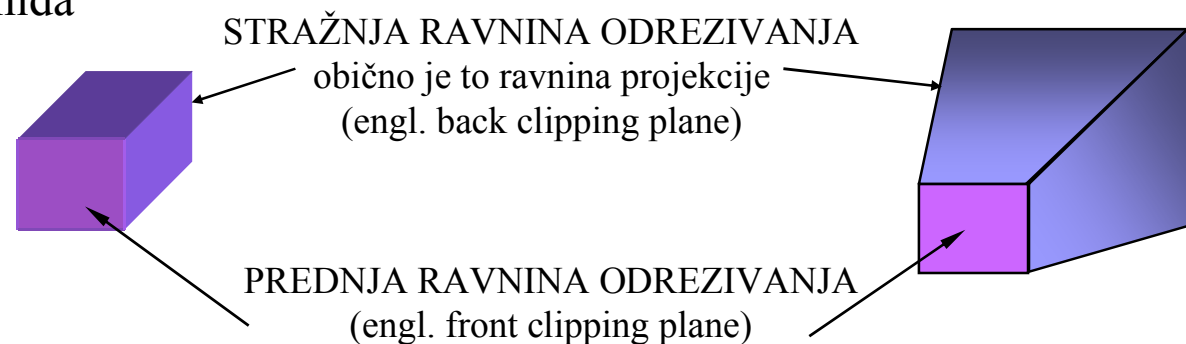


- TRANSFORMACIJA POGLEDA

- postupak kojim koordinatni sustav očišta transformiramo u koordinatni sustav scene kako bi mogli primijeniti transformaciju projekcije
- ishodište koordinatnog sustava oka - može biti centar projekcije
- h - udaljenost očišta od ravnine projekcije
- VIEW UP vektor je vektor okomit na z-os i određuje rotaciju oko vlastite osi promatrača

- ODREZIVANJE OBZIROM NA VOLUMEN POGLEDA (frustum)

- kvadar
- piramida



- PROJEKCIJA

- paralelna

- ortografska (3 ortogonalne)

- kosa

- perspektivna

- http://oli.informatik.uni-oldenburg.de/Grafiti3/grafitiNav/flow9/page3.html#Ref_ID215

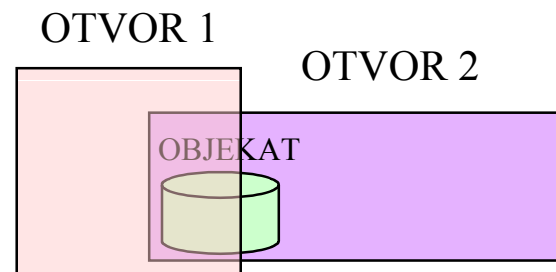
- <http://www.cs.princeton.edu/~min/cs426/jar/threed.html>

- NORMIRANJE KOORDINATA U SUSTAVU PROJEKCIJE

- koordinate u sustavu otvora (engl. viewport)

- koordinate obzirom na granice prozora

- normirane koordinate u sustavu uređaja NCD



- PROJEKCIJE

projektorji - zrake kojima se obavlja projekcija

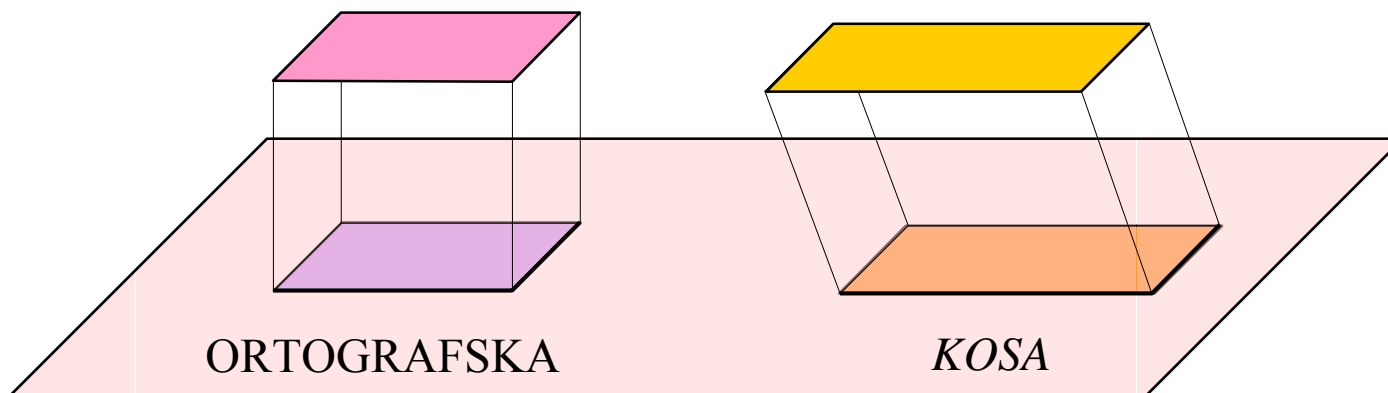
– PARALELNA PROJEKCIJA - projektorji su paralelni

- ortografska - projektorji su okomiti na podlogu

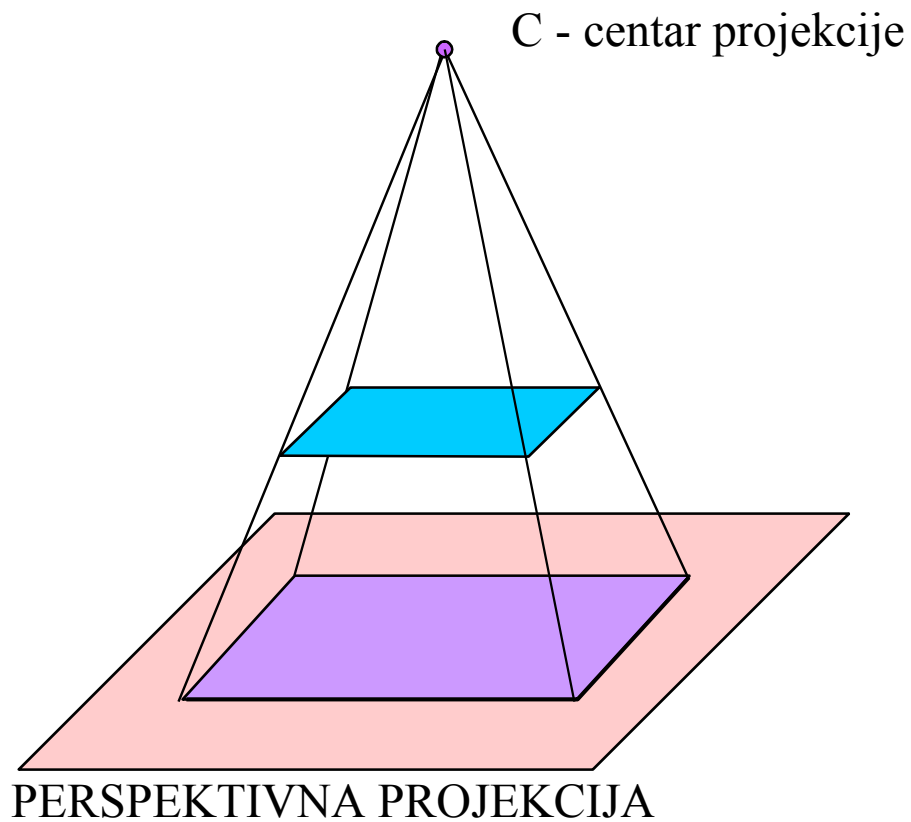
- 3 ortogonalne projekcije na ravnine xy, xz, yz. Npr. xy ravnina.

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- kose - projektorji su koso prema podlozi

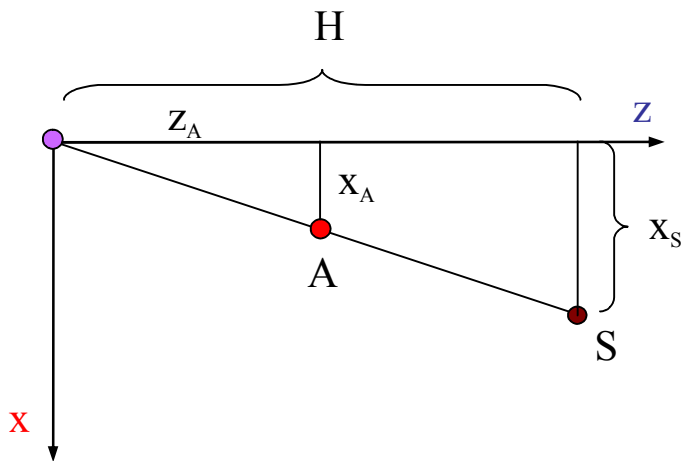
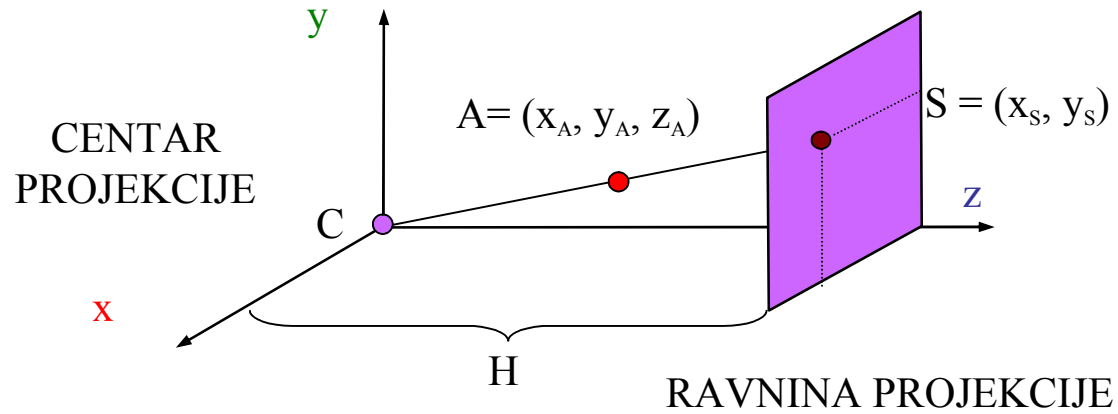


- PERSPEKTIVNA PROJEKCIJA - projektori idu iz centra projekcije kroz vrhove objekta



tijela koja su bliže promatraču
veća su u projekciji

- CENTAR PROJEKCIJE JE U ISHODIŠTU



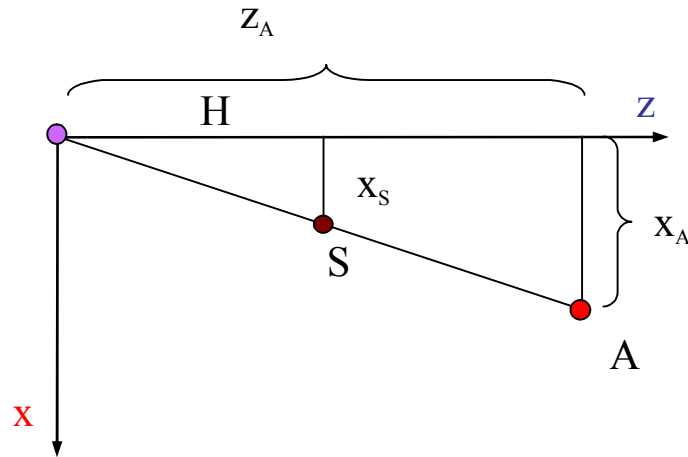
$$\frac{x_S}{H} = \frac{x_A}{z_A} \Rightarrow x_S = \frac{x_A}{z_A} H$$

slično

$$\frac{y_S}{H} = \frac{y_A}{z_A} \Rightarrow y_S = \frac{y_A}{z_A} H$$

$$z_S = H$$

- ako je tijelo iza ravnine projekcije



$$\frac{x_S}{H} = \frac{x_A}{z_A} \Rightarrow x_S = \frac{x_A}{\left(\frac{z_A}{H}\right)} \quad \begin{array}{l} x_S = x_A \\ y_S = y_A \\ z_S = z_A \\ h_S = \frac{z_A}{H} \end{array}$$

$$y_S = \frac{y_A}{\left(\frac{z_A}{H}\right)}$$

$$z_S = \frac{z_A}{\left(\frac{z_A}{H}\right)}$$

$$x_1' = x_1$$

$$x_2' = x_2$$

$$x_3' = x_3$$

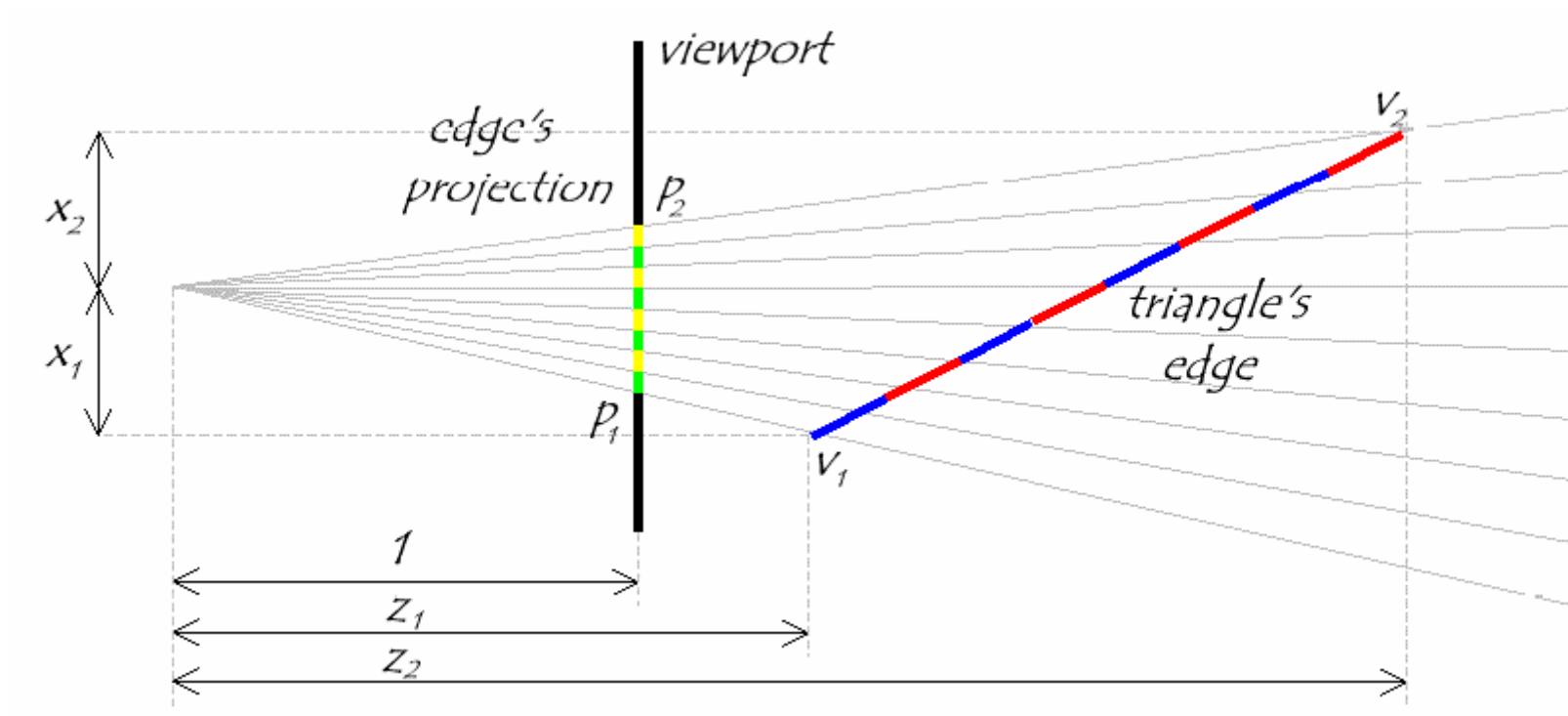
$$x_4' = \frac{x_3}{H}$$

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad x_4'] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{1} & \frac{1}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

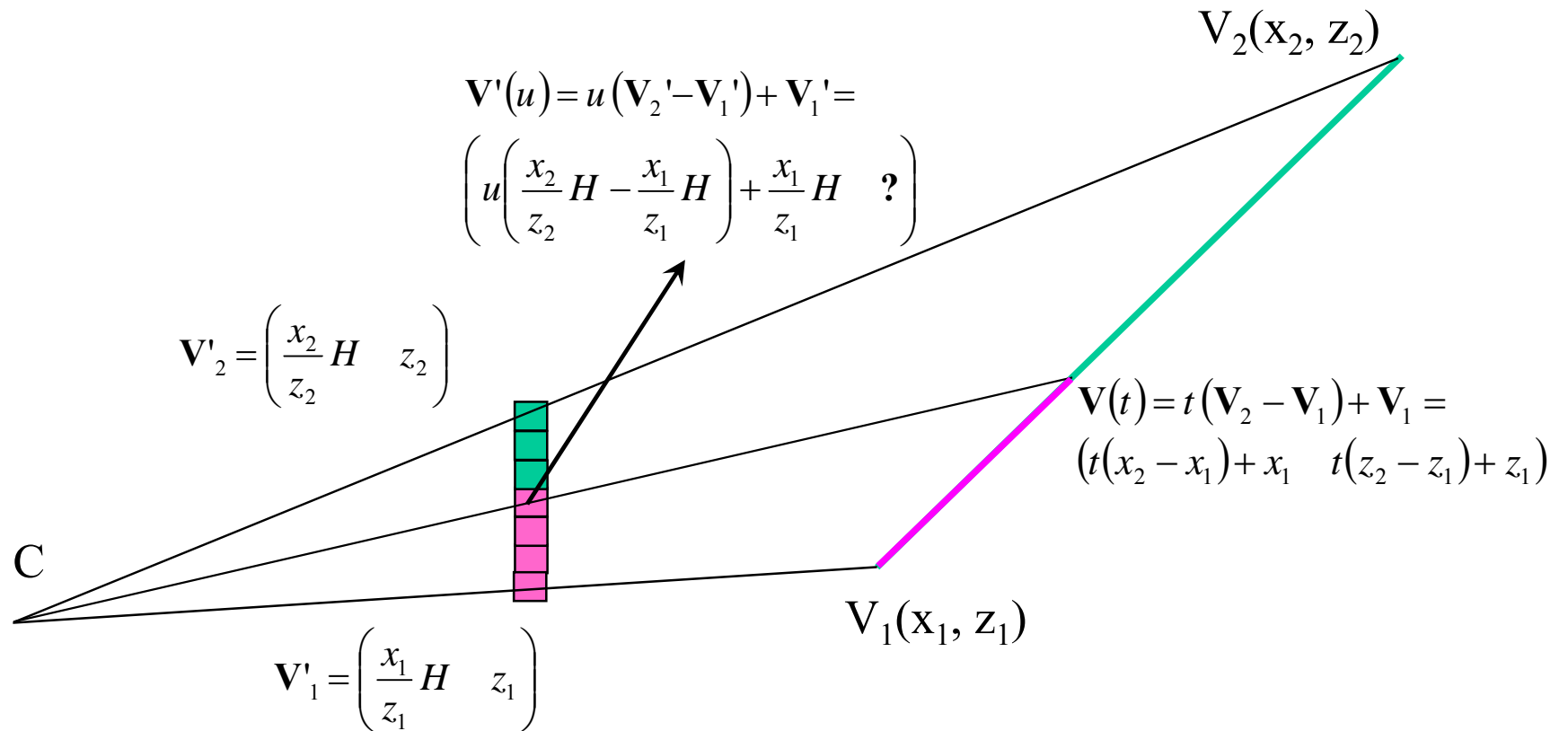
$\tilde{1} \rightarrow z$ – koordinatu objekta želimo sačuvati jer daje udaljenost od očista (trebat će nam kasnije za uklanjanje skrivenih linija i površina)

- CENTAR PROJEKCIJE MOŽE BITI NA OSI A RAVNINA PROJEKCIJE U ISHODIŠTU

Perspektivno ispravna interpolacija z-koordinate



Perspektivno ispravna interpolacija z-koordinate



za neki parametar t , izjednačit ćemo perspektivno projiciranu točku $\mathbf{V}(t)$ sa linearno interpoliranom $\mathbf{V}'(u)$ točkom u prostoru projekcije između točaka \mathbf{V}_1' i \mathbf{V}_2' po x koordinati i odrediti t za koji to vrijedi.

$$\frac{t(x_2 - x_1) + x_1}{t(z_2 - z_1) + z_1} H = u \left(\frac{x_2}{z_2} H - \frac{x_1}{z_1} H \right) + \frac{x_1}{z_1} H$$

$$t = \frac{z_1 u}{z_2 - (z_2 - z_1)u}$$

uvrštavanje dobivenog t u izraz $t(z_2 - z_1) + z_1$, daje nelinearnu ovisnost $z(u)$

$$z(u) = \frac{z_1 z_2}{z_2 - (z_2 - z_1)u}$$

provjera za $u = 0$ i $u = 1$

- <http://www.neilwallis.com/3d/index2.htm>
- <http://groups.csail.mit.edu/graphics/classes/6.837/F01/Lecture18/Subdivision-Applet.html>
- <http://www.cs.unc.edu/~andrewz/comp236/hw6/>

- NORMIRANJE KOORDINATA – ortografska projekcija

Volumen pogleda određuju

l - lijeva ravnina odsijecanja (min. x koordinata) -1

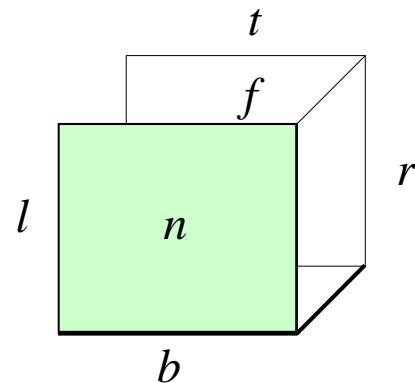
r - desna ravnina odsijecanja (max. x koordinata) 1

t - gornja ravnina odsijecanja (min. y koordinata) -1

b - donja ravnina odsijecanja (max. y koordinata) 1

n - prednja ravnina odsijecanja (min. z koordinata) 1

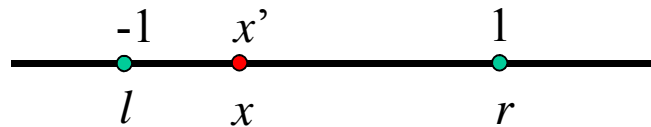
f - stražnja ravnina odsijecanja (max. z koordinata) -1



ORTOGRAFSKA PROJEKCIJA

l - lijeva ravnina odsijecanja (min. x koordinata)

r - desna ravnina odsijecanja (max. x koordinata)



$$\frac{x' - (-1)}{x - l} = \frac{1 - (-1)}{r - l} \Rightarrow x' = x \frac{2}{r - l} - \frac{r + l}{r - l}$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & 0 \\ -\frac{r+l}{r-l} & -\frac{t+b}{t-b} & -\frac{f+n}{f-n} & 1 \end{bmatrix}$$

PROJECTION