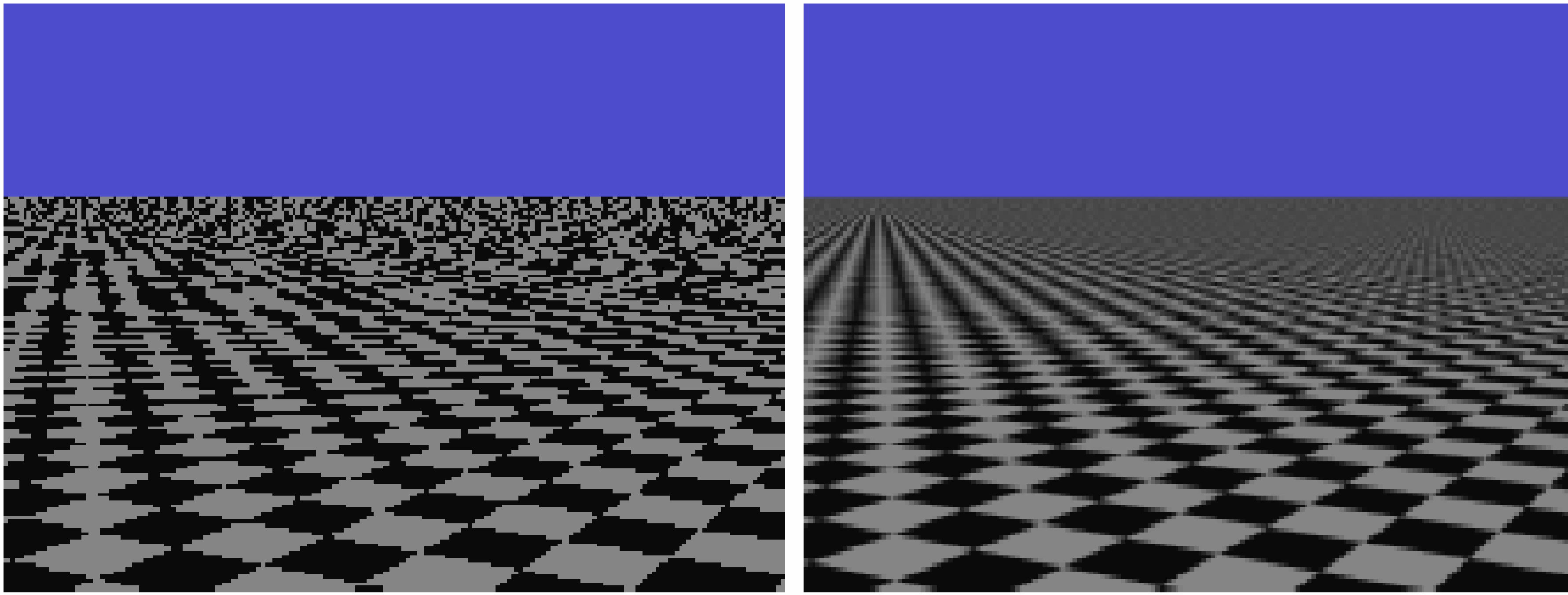
3. INTERPOLACIJA I REKONSTRUKCIA

Pretvorba iz kontinuirane reprezentacije u diskretnu i obrnuto

- neželjeni vizualni učinci - artefakti, alias
- 1D, 2D, 3D, vrijeme
- ideja je da diskretnu reprezentaciju čuvamo u tom obliku samo zbog diskretnog načina zapisa na računalu
  - u svakom trenutku možemo dobiti kontinuirani oblik
  - poznavanje pogreške (odstupanja) između izvornog i rekonstruiranog oblika
- ponovljeno uzorkovanje (*resampling*)
- objekti koji nas okružuju često sadrže diskontinuitete

- niz točaka – krivulja, površine, objekti (kompresija)
- svojstva krivulja u području obrade signala (frekvencijska domena), npr. lokalni nadzor



Primjer slike ostvarene postupkom praćenja zrake.
Lijevo – jako izraženi vizualni učinci uslijed preklapanja spektra (alias).
Desno – umanjeni alias.

reprezentacije objekta u računalu – diskretna, kvantizirana

- termin u matematici i računarskoj grafici - interpolacija
- području obrade signala, sličan problem - rekonstrukcija

računarska grafika

- prikaz krivulja, površina – aproksimacijske, interpolacijske
- kontrolne točke predstavljaju uzorke koji određuju kontinuiranu funkciju (uzorci)

B-krivulja

- parametarske krivulje, funkcije $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - signal
- prikaz krivulja s višestrukim vrijednostima
- t je veza funkcijskog prikaza pojedine koordinate i konačnog oblika krivulje
- uniformni/neuniformni uzorci
- 2D – površina http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/surf.html#tensorproduct
- 3D, 4D proširenje

Uzorkovanje

- periodično uzorkovanje analognog signala - vremenski diskretan signal

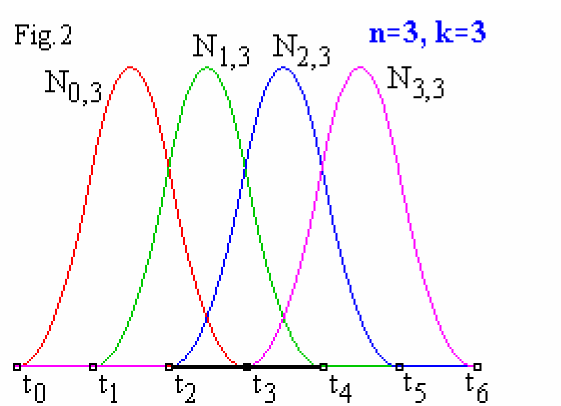
$$x_a(t) \qquad nT \qquad x[n],\ n \in N$$

http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/repository/edu/brown/cs/exploratories/applets/sampling/introduction_to_sampling_java_browser.html

- niz poznatih vrijednosti, zadanih
- T - perioda uzorkovanja, recipročna vrijednost je frekvencija uzorkovanja
- B-krivulje - uniformna parametrizacija - uniformna B-krivulja

$$\Delta_i = u_{i+1} - u_i = const$$

- početak i kraj krivulje - dodatna pažnja - višestruke vrijednosti uzlova - različite bazne funkcije $\Rightarrow$ periodične krivulje



B - KRIVULJA

B - elastična krivulja ima svojstvo elastične letvice ("spline")

- kontinuitet je postignut dijeljenjem kontrolnih točaka između više segmenata
- prirodni splajn se može prikazati kao težinska suma baznih funkcija

APROKSIMACIJSKA B-KRIVULJA

- k stupanj krivulje (broj kontrolnih točaka ne utječe na stupanj)
- r_i kontrolne točke - ukupno ih ima $n+1$
- $N_{i,k}$ bazne (težinske) funkcije - polinomi stupnja k
- u_i vrijednosti uzlova (engl. knot values)
- $UKNOT = \{u_i\}$ vektor uzlova
- http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/curves.html

$$\vec{p}(u) = \sum_{i=0}^{n} \vec{r}_i \, N_{i,k}(u)$$

Određivanje baznih funkcija

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & za \;\; u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & ina\check{c}\, e \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,\,k-1}(u) + \frac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,\,k-1}(u)$$

- Ako je nazivnik jednak nuli vrijednost razlomka je nula.
- Uzlovi mogu biti višestruki.
- u_{i+1} - u_i = konst. Krivulja se naziva UNIFORMNA krivulja.
  Inače krivulja je NEUNIFORMNA.

http://www.people.nnov.ru/fractal/Splines/None.htm
http://www.cs.technion.ac.il/~cs234325/Applets/applets/bspline/GermanApplet.html

dvije dimenzije - slike

- rubne točke - dodatno razmatranje
- razlike prema zahtjevima koji su važni kod krivulja
- uniformne periodične B-krivulje s jediničnim razmakom uzlova

$$\Delta_i = u_{i+1} - u_i = 1.$$

$f(x)$, $f(x,y)$ želimo uzorkovati

- niz impulsa (engl. Impulse train, *comb*):

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

- uzorkovanje kontinuiranog signala konstantnom frekvencijom uzorkovanja

Važne funkcije

Heaviside-ova step funkcija $H(x)$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{za } x > 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 0 & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

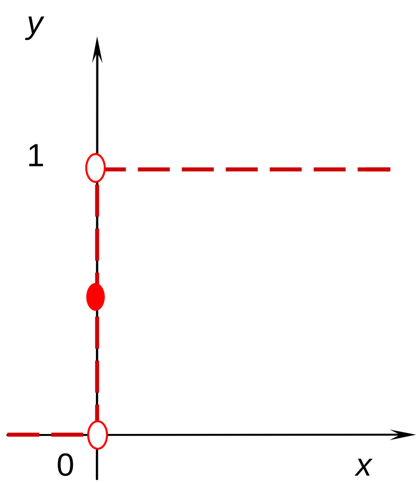
Funkcija rampe:

$$ramp(x, w) = \begin{cases} 1 & \text{za } x \geq w \\ x / w & \text{za } 0 \leq x < w \\ 0 & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

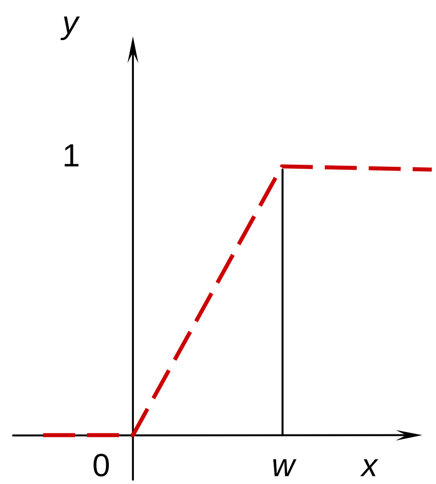
box funkcija:

$$box\ (x, w) = \begin{cases} 0 & \text{za } x \geq w \\ 1 / w & \text{za } 0 \leq x < w \\ 0 & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

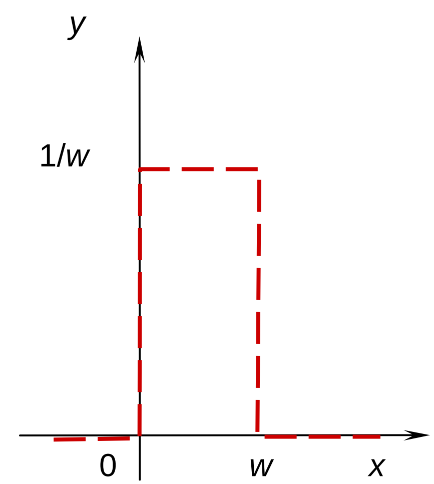
- funkcija step ima diskontinuitet
- promatramo limes kada *w* teži ka nuli u *box* funkciji dobivamo impulsnu funkciju,
- što *w* postaje manji 1/*w* postaje viši, no integral ostaje isti



Step funkcija



funkcija rampe



box funkcija

- Impulsna funkcija, poznata kao delta funkcija Dirac-a:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{za } x = 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

- Derivacija step funkcije $H(x)$ je delta funkcija:

$$\frac{d}{dx} H(x) = \delta(x).$$

- integral delta funkcije delta funkcije je jedan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \mathrm{d}x = step(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 - 0 = 1$$

- integral umnoška proizvoljne funkcije $f(x)$ i posmaknute delta funkcije je jednaka vrijednosti funkcije u t

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \delta(x - t) = f(t).$$

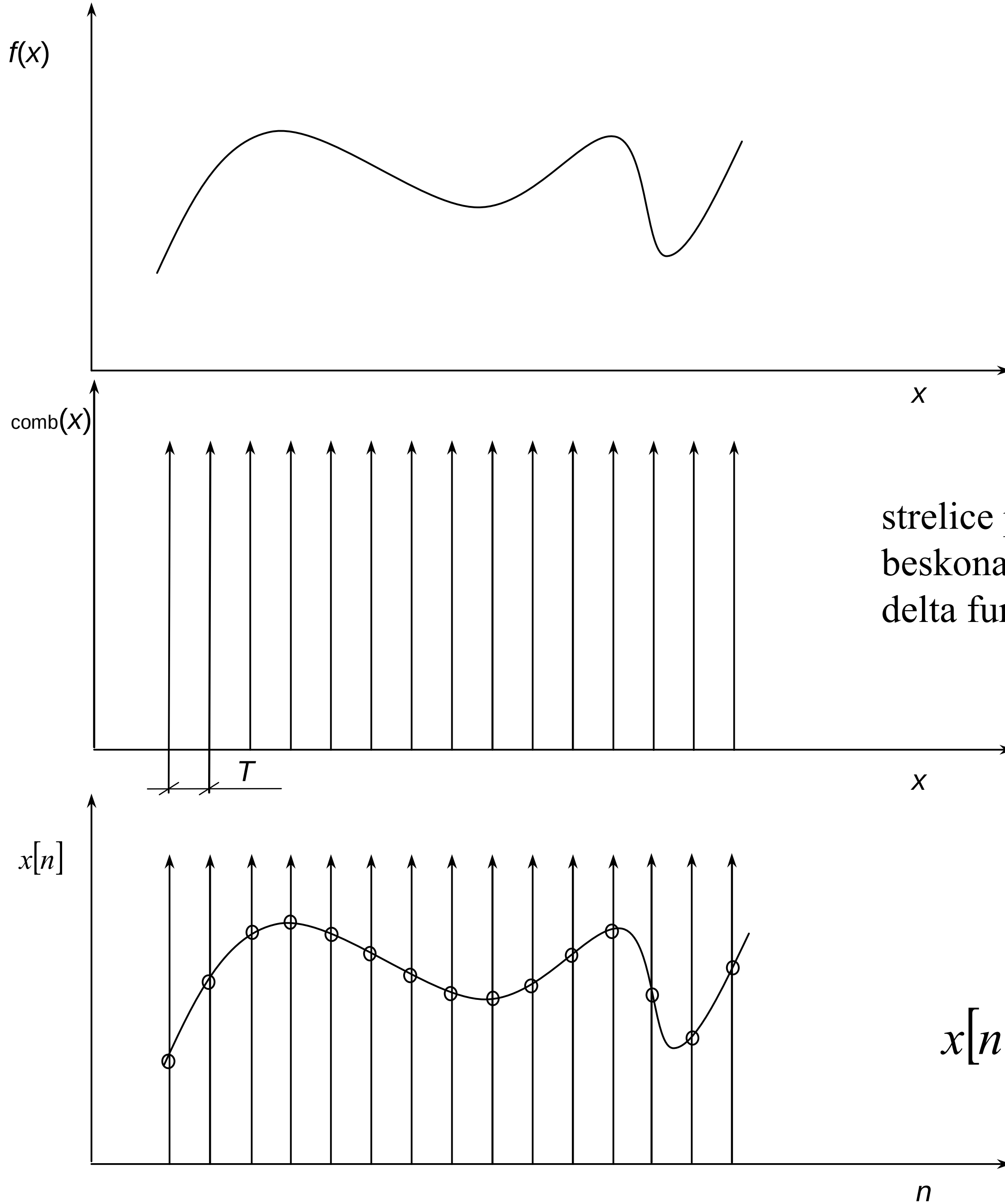
- Niz impulsa (engl. Impulse train), *comb*(*x*)
- beskonačni broj jednoliko raspoređenih impulsa:

$$comb_T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT),$$

T razmak između impulsa

- diskretna (označeno uglatim zagradama) reprezentacija kontinuiranog signala:

$$x[n] = f(nT)$$



strelice prema gore označavaju beskonačnu vrijednost pojedinih delta funkcija.

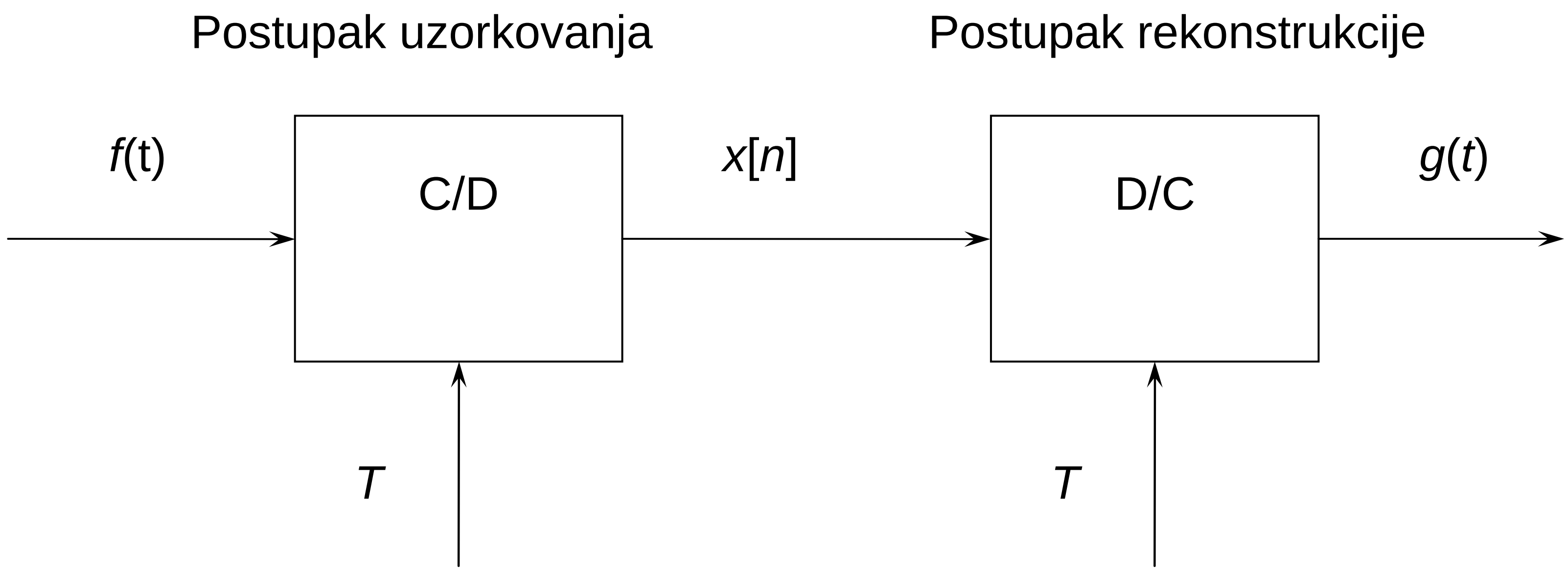
$$x[n] = f(nT)$$

rekonstrukcija kontinuiranog signala iz uzoraka

- koliku grešku ćemo načiniti
- zašto
- kao umanjiti neželjene vizualne učinke

moramo odabrati

- frekvenciju kojom ćemo uzorkovati
- filtriranja koje prethodi uzorkovanju
- način rekonstrukcije
- http://www.cs.brown.edu/exploratories/freeSoftware/repository/edu/brown/cs/exploratories/applets/nyquist/nyquist_limit_java_browser.html
- kako načiniti operator koji je u definiran u kontinuiranoj domeni (npr. rotacija slike, traženje rubova korištenjem gradijenta)



postupak uzorkovanja i rekonstrukcije kontinuirane funkcije

Fourier-ova transformacija (FT)

predstavljanje funkcije $f(x)$ (iz prostorne/vremenske domene) sumom funkcija sinusa i kosinusa različitih amplituda i faza http://colos.fri.uni-lj.si/Colos/EXAMPLES/FOURRIER_TRANSFORM/ftd.html

frekvencijski odziv (frekvencijski spektar) funkcije - prikaz funkcije u frekvencijskoj domeni $F(\omega)$

Fourierov transformacijski par:

direktna Fourier-ova transformacija: $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi j\,\omega x}\, dx$$

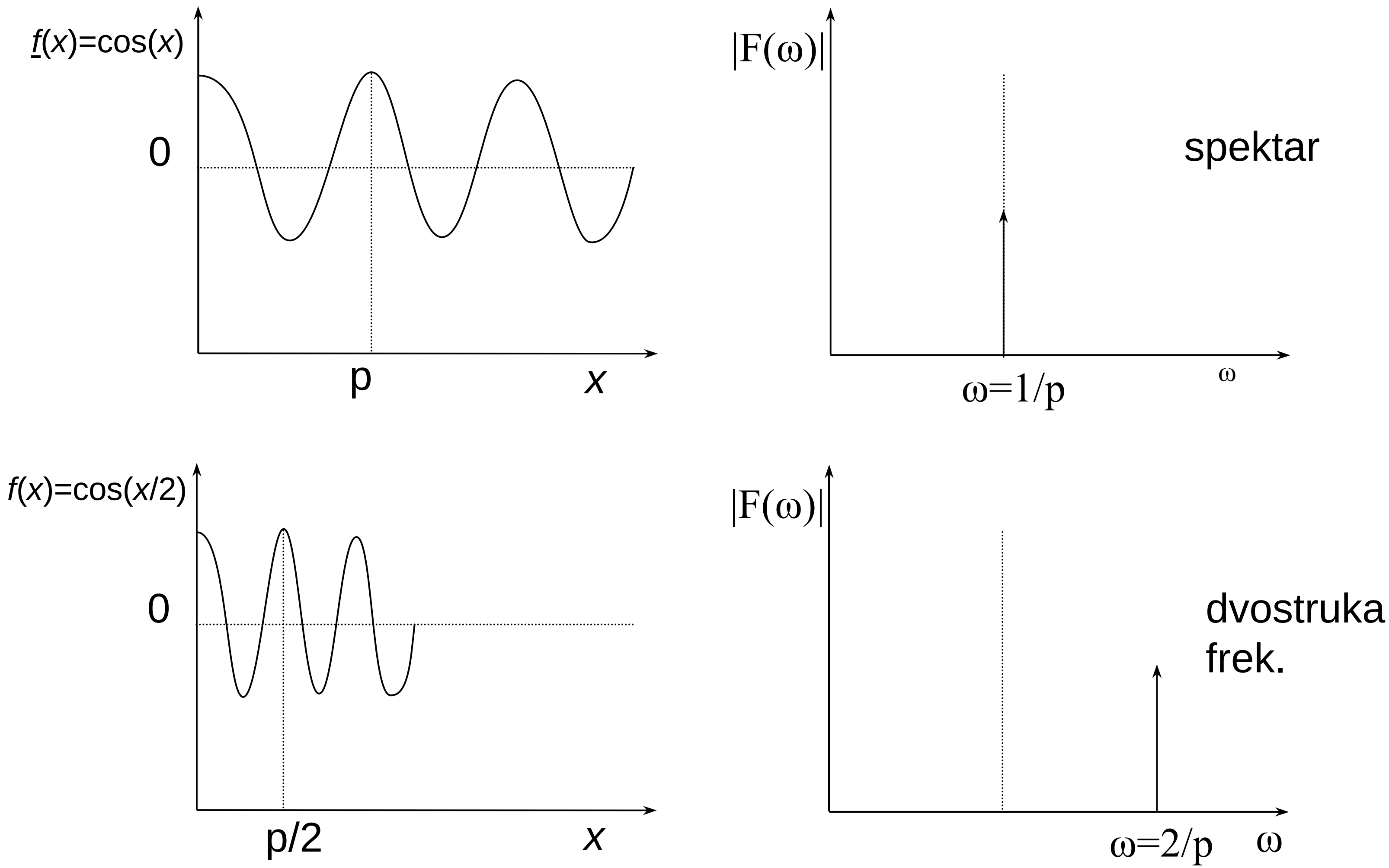
inverzna Fourier-ova transformacija: $$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{2\pi j\,\omega x}\, d\omega$$

Realni i imaginarni dio funkcije određuju amplitudu i fazu

Amplituda (magnituda) - impulsni odziv : $$|F(\omega)|=\sqrt{[\mathrm{Re}(F(\omega))]^2+[\mathrm{Im}(F(\omega))]^2}$$

Spektar faze: $$\Phi(u)=\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}(F(\omega))}{\mathrm{Re}(F(\omega))}\right)$$

http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/fftdemo.htm



Signal kosinusa odgovara jednom impulsu u frekvencijskoj domeni.