

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave

Diplomski rad br. 1396

Uporaba višeslojnog perceptrona za raspoznavanje brojčano-slovčanih znakova na registarskim tablicama

Autor: Kristijan Kraupner

Predmet: Raspoznavanje uzoraka
Mentor: prof. dr. sc. Slobodan Ribarić
Ak. god. 2002./2003.

Zagreb, 12. rujna 2003.

Sadržaj

0.0. Opis diplomskog zadatka	2
0.1. Prikaz sustava automatske klasifikacije registarskih tablica [4]	3
1. Uvod	9
1.1. Perceptron – jednoslojna neuronska mreža	10
1.2. Višeslojna neuronska mreža s unaprijednom propagacijom - MFN	12
2. Struktura i svojstva višeslojnog perceptrona	14
2.1. Organizacija MLP-a	14
2.2. Notacija	16
3. Postupak učenja višeslojnog perceptrona	17
3.1. LMS algoritam	17
3.2. Algoritam učenja propagacijom greške unatrag	18
3.2.1. Slučaj 1. Neuron j je izlazni čvor	21
3.2.2. Slučaj 2. Neuron j je skriveni čvor	21
3.2.3. Dva prolaska izračunavanja	24
3.2.4. Aktivacijska funkcija	25
3.2.5. Brzina učenja	26
3.2.6. Sekvencijalni i grupni način učenja	28
3.2.7. Uvjeti zaustavljanja	30
3.3. Generalizacija	31
3.4. Sažetak algoritma propagacije unatrag	32
3.5. Primjer algoritma propagacije unatrag za funkciju EKSKLUZIVNO-ILI	33
4. Pregled postupaka raspoznavanja broičano-slovčanih znakova koji se temelje na uporabi MLP-a	36
4.1. Automatski sustav za lokalizaciju i raspoznavanje znakova tablica vozila [5]	36
4.2. Korištenje višeslojnog perceptrona za raspoznavanje rukom pisanih slovničkih znakova [6] ..	39
4.3. Neizraziti višeslojni perceptron [7]	41
5. Opis programskog sustava za raspoznavanje i klasifikaciju registarskih tablica	42
5.1. Slikovna baza registarskih tablica	42
5.2. Predobrada slika	48
5.3. Programska izvedba višeslojnog perceptrona	53
5.3.1. Struktura perceptrona	54
5.3.2. Postupak klasifikacije	55
5.3.3. Skup uzoraka za učenje i skup uzoraka za testiranje	56
6. Ocjena rezultata klasifikacije na velikom broju uzoraka	58
7. Sintaksna analiza registarskih pločica	67
7.1. Registarske oznake država Europe [8]	67
7.2. Formati registarskih tablica država Europe [8]	70
7.3. Rezultati poboljšanja postupka klasifikacije korištenjem sintaksne analize	92
8. Eksperiment – korištenje horizontalne i vertikalne projekcije uzorka kao metode pretprocesiranja	95
9. Zaključak	99
10. Reference	101
11. Literatura	103
12. Dodatak – popis priložene literature u digitalnom obliku	104

0.0. Opis diplomskog zadatka

Opisati strukturu višeslojnog perceptrona MLP (MultiLayer Perceptron), njegova svojstva i postupak učenja. Dati pregled postupaka raspoznavanja brojčano-slovčanih znakova koji se temelje na uporabi MLP-a.

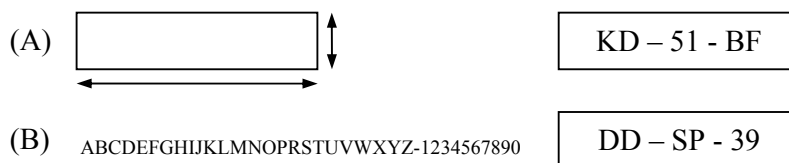
Oblikovati slikovnu bazu registarskih tablica. Definirati strukturu MLP-a i postupak učenja. Izraditi programsku opremu klasifikatora. Ocijeniti rezultate klasifikacije na velikom broju uzoraka. Uporabom sintaktičke analize sadržaja registarskih pločica poboljšati rezultate klasifikacije.

0.1. Prikaz sustava automatske klasifikacije registarskih tablica [4]

Jedan od primjera postupaka raspoznavanja broičano-slovačanih znakova je raspoznavanje temeljeno na osobinama – *feature-based recognition* – korišteno u Sustavu za raspoznavanje automobilskih tablica (*Car License Plate Recognition – CLPR* [4]). CLPR sustav automatske klasifikacije i raspoznavanja registarskih tablica razvijen je u sklopu Matematičkog i računarskog zavoda Sveučilišta Rijksuniversiteit, Groningen – Nizozemska, kao dio VIPUR sustava za identifikaciju vozila na javnim cestama (*Vehicle Identification on Public Roads*).

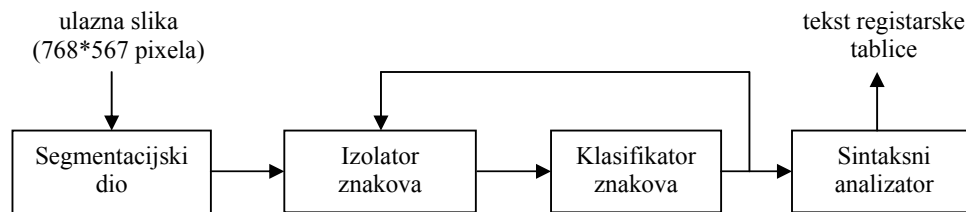
Automatska identifikacija vozila pomoću sadržaja registarskih pločica (tablica) vrlo je bitna u privatnim transportnim primjenama poput mjerenja vremena putovanja, upravljanja parkiralištima, naplaćivanja cestarina, provođenja ograničenja brzine vožnje, identifikacija otuđenih vozila i sl.

Dizajn CLPR sustava temelji se na zakonskoj regulaciji nizozemskih registarskih tablica koja propisuje strogi skup pravila o položaju registarske tablice na vozilu, obliku, veličini, boji tablice (slova i pozadine), vrsti i obliku znakova, i dr (slika 1.).



Slika 1. Registarske tablice sa crnim znakovima na žutoj reflektivnoj pozadini (A) sa znakovima (B). Visina znakova varira od 75 mm do 77 mm. Širina, uključujući margine, varira između 32 mm i 87 mm. Znakovi su smješteni simetrično na registarskoj tablici [4].

CLPR sustav (slika 2.) sastoji se od 4 glavna dijela [4]: segmentacijski dio, izolacijski dio, klasifikator znakova i sintakсни analizator. Segmentacijski dio određuje lokaciju registarske tablice na slici na temelju strukturnih svojstava i određenih ograničenja. Izolirana tablica prosljeđuje se izolatoru znakova koji pokušava odrediti položaj znakova na tablici. Izolirani znakovi tablice dalje se obrađuju u klasifikatoru znakova. Ovaj dio CLPR sustava koristi višeslojne perceptrone (MLP) i poklapanje predložaka (*template matching*). Sintakсни analizator provjerava zadovoljavaju li potencijalno prepoznati znakovi određeni broj sintakčnih pravila koja opisuju nizozemske registarske tablice. Ako pravila nisu zadovoljena, ili jedan ili više znakova nije moguće raspoznati, slika tablice se ne prihvaća.



Slika 2. CLPR sustav za raspoznavanje registarskih automobilskih tablica [4]

Modul od većeg interesa je klasifikator znakova koji se temelji na uporabi višeslojnih perceptrona i raspoznavanju temeljenom na osobinama.

Kako bi se znakovi klasificirali, zahtijeva se da su izolirane slike kvantificirane tako da klasifikator vidi razliku. Direktno predstavljanje slike modulu za raspoznavanje čini težim raspoznavanje transformiranih slika (uslijed rotacije, promjene veličine, translacije i sl.). Stoga je definiran skup osobina invarijantnih na takove transformacije, i to uz tri pristupa:

- ◆ momenti koji predstavljaju kompoziciju (strukturu i raspored pojedinih elemenata slike),
- ◆ glavne komponente koje reflektiraju kompoziciju slike, i
- ◆ bočne projekcije kompozicije

Momenti

Momenti [4] su numeričke karakteristike distribuiranog skupa objekata, mjerene relativno u odnosu od referentne točke. Kod slike sa sivim razinama, momenti se temelje na n slikovnih elemenata (piksela) P_i sa sivom razinom m_i i udaljenošću r_i od referentne točke:

$$moment = \sum_{i=0}^n (m_i \times r_i)$$

Drugim riječima, moment predstavlja mjeru unutarnje strukture objekta. Ako je referentna točka (ishodište) odabrana kao središte slike, mjera se naziva centralnim momentom. Na ovaj način moment postaje invarijantan s obzirom na rotaciju i promjenu veličine segmentiranog dijela. Utjecaj različitih dijelova znaka na moment može se diferencirati potenciranjem doprinosa mase i udaljenosti na p i q :

$$u_{pq} = \sum_{i=0}^n (m_i^p \times r_i^q)$$

Dužom analizom definirano je 16 momenata $I_1 \div I_{16}$ kojima se može učiti višeslojni perceptron. 16 osobina predstavlja se 16 ulaznih neurona. Mreža je najbolje naučena sa 30 skrivenih neurona, sa 90%-tnim raspoznavanjem [4].

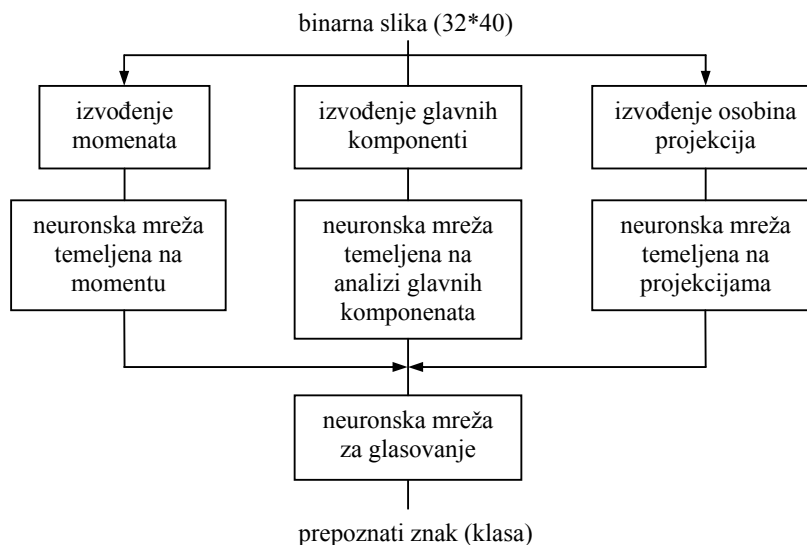
Analiza glavnih komponenata

Analiza glavnih komponenata (*Principal Component Analysis – PCA*) statistička je metoda kojom se određuje optimalna linearna transformacija $y = Wx$ danog ulaznog vektora x stacionarnog stohastičkog procesa i određene dimenzije m izlaznog vektora y , gdje je W željena transformacijska matrica. U teoriji raspoznavanja uzoraka, PCA je poznata i kao Karhunen-Loève transformacija. PCA transformira korelirane ulazne podatke u skup od m statistički nepovezanih (neovisnih) osobina (ili komponenti), najčešće uređenih prema smanjenju količine informacija koje sadrže.

Projekcije

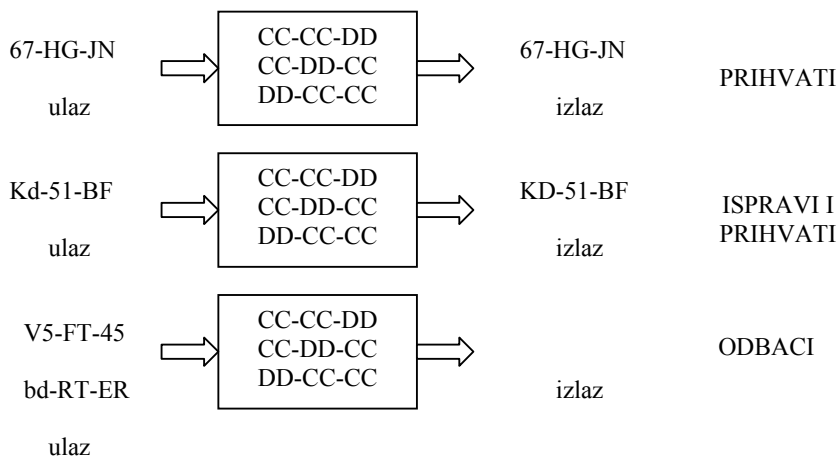
Treći način kvantifikacije znakova je korištenje bočnih projekcija. To je najjednostavnije postići jednodimenzionalnim brojanjem crnih piksela. Uz to, koristi se i brojanje povezanih komponenti (*connected component count*) prilikom kojeg se broji koliko je promjena iz crnog u bijeli piksel duž jedne skenirane linije. Generiraju se četiri projekcije: horizontalna, vertikalna, brojanje horizontalnih povezanih komponenti, i brojanje vertikalnih povezanih komponenti.

Kombinacijom navedena tri pristupa izveden je klasifikator znakova registarskih tablica – modul za raspoznavanje (slika 3.).



Slika 3. Shematski prikaz modula za raspoznavanje. Višestruki neuronski klasifikatori rade paralelno, svaki nad svojim različitim skupom ulaznih osobina. [4]

Zadnji dio CLPR sustava predstavljaju sintaksna pravila (slika 4.). Rezultati modula za raspoznavanje uspoređuju se sa određenim sintaksnim pravilima podjeljenima u dva skupa. Prvi skup pravila uzima u obzir dimenzijske zahtjeve (razmaka između znakova) propisane službenim naputcima. Drugi skup pravila otkriva nedozvoljene kombinacije broječanih i broječano-slovčanih znakova. Važeće nizozemske registarske tablice sadržavaju samo parove znamenki i slova, primjerice, GD-85-DF, 56-FG-PR ili KL-54-68. Nadalje, neki su parovi slova nedozvoljeni kao npr. SS i SD. Potencijalni registarski broj treba zadovoljiti i jedan i drugi skup pravila kako bi bio označen kao prepoznat. U slučaju ikakvih neslaganja, slika (tj. broj registarske tablice) se ne prihvaća.



Slika 4. Sintaksni modul provjerava sintaksu nadenih znakova i nastoji provesti konačno raspoznavanje sumnjivo raspoznatih znakova prikazanih malim slovima. Nizozemske registarske tablice sadrže tri skupine od po dva znaka - dvije znamenke ili dva slova [4].

Evaluacija uspješnosti CLPR sustava pri automatskom raspoznavanju registarskih tablica opisana je postotkom raspoznavanja, postotkom greške i postotkom odbijanja, na nivou raspoznavanja znakova.

$$\text{postotak raspoznavanja} = \frac{(\text{broj ispravno raspoznatih znakova})}{(\text{broj svih izoliranih znakova})}$$

$$\text{postotak greške} = \frac{(\text{broj krivo raspoznatih znakova})}{(\text{broj svih izoliranih znakova})}$$

$$\text{postotak odbijanja} = \frac{(\text{broj odbijenih znakova})}{(\text{broj svih izoliranih znakova})}$$

Broj točno raspoznatih znakova zajedno sa brojem krivo raspoznatih i odbijenih (neraspoznatih) znakova jednak je ukupnom broju izoliranih znakova.

CPLR sustav testiran je na gotovo 600 000 različitih slika. Za čitljive tablice i izolirane znakove, postignut je postotak raspoznavanja od 99.1% i postotak odbijanja od 0.9% po znaku. Ovi iznosi daju poprilično "ružičast" pogled na performanse sustava, no realističnija mjera može se postići uzimanjem u obzir postotka raspoznavanja cijelih registarskih tablica (svih znakova).

$$\text{postotak raspoznavanja} = \frac{(\text{broj ispravno raspoznatih tablica})}{(\text{broj svih izoliranih tablica})}$$

$$\text{postotak greške} = \frac{(\text{broj krivo raspoznatih tablica})}{(\text{broj svih izoliranih tablica})}$$

$$\text{postotak odbijanja} = \frac{(\text{broj odbijenih tablica})}{(\text{broj svih izoliranih tablica})}$$

Referenca	postotak raspoznavanja / postotak greške	osobine sustava
sustav ¹	95.5% / 0.9%	ulaz: 20x30 crno-bijelih piksela za svaki znak, MLP neuronska mreža; postotak odbijanja 3.6%
sustav ²	98.2% / 1.8%	segmentacija i raspoznavanje pomoću MLP mreža sa pikselima na ulazu
sustav ³	95% / 5%	znakovi između 16x23 i 38x47 piksela; MLP mreža sa osobinama na ulazu
sustav ⁴	98.2% / ? (znamenke) 96.1% / ? (kin. zn.)	ulaz: 512x480 slike sa sivim razinama; raspored znakova radi popunjavanja slabije vidljivih znamenki
sustav ⁵	96.8% / 3.2%	klasifikacija temeljena na neuronskoj mreži sa 12 ulaznih osobina; bez detalja
sustav ⁶	90% / ? (danju) 65% / ? (noću)	postoci se temelje na registarskim tablicama; temeljeno na podudaranju predložaka
sustav ⁷	97% / 1%	768x493 slike sa sivim razinama; segmentacija neizravitom logikom; klasifikacija MLP mrežom sa pikselima na ulazu (14x14) sa dodatnim gornjim i donjim ulaznim pikselima (14x9)
sustav ⁸	94% / ?	klasifikacija sa 12x16 piksela na ulazu MLP-a
ovaj pristup	99.1% / 0%	klasifikacija korištenjem višestrukih neuronskih mreža sa ulaznim osobinama i/ili podudaranjem predložaka (<i>template matching</i>); postotak odbijanja 0.9%

Tablica 1. Pregled CLPR sustava na razini znaka [4]

-
- ¹ Lisa, F., Carrabina, J., Pérez-Vincente, C., Avellana, N., i Valderrama, E., 1993. "Two-bit Weights Are Enough To Solve Vehicle License Plate Recognition Problem", *Proceedings of the International Conference on Neural Networks*, Vol. 3
- ² Föhr, R., i Raus, M., 1994. "Automatisches Lesen amtlicher Kfz-Kennzeichen", *Elektronik*, No. 1
- ³ Yoo, J., Chun, B., i Shin, D., 1994. "A Neural Network for Recognizing Characters Extracted from Moving Vehicles", *Proceedings of World Congress on Neural Networks*, Vol. 3
- ⁴ Tanabe, K., Marubayashi, E., Kawashima, H., Nakanishi, T., i Shio, 1994. "PC-based Car License Plate Reading", *Image and Video Processing*, Vol. SPIE-2182
- ⁵ Abe, S., i Lan, M., 1993. "A Classifier Using Fuzzy Rules Extracted Directly From Numerical Data", *Proceedings of the Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vol. 2
- ⁶ Kanayama, K., Fujikawa, Y., Fujimoto, K., i Horino, M., 1991. "Development of Vehicle-License Number Recognition System using Real-Time Image Processing and its Application to Travel-Time Measurement", *Proceedings of the 41st IEEE Vehicular Technology Conference*, St. Louis
- ⁷ Hwang, C., Shu, S., Chen, W., Chen, Y., i Wen, K., 1992. "A PC-based License Plate Reader", *Proceedings Machine Vision Application, Architectures and Systems Integration*, Vol. SPIE-1823
- ⁸ Kertész, A., Kertész, V., i Müller, T., 1994. "An On-line Image Processing System for Registration Number Identification", *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Vol. 6
-

Referenca	postotak raspoznavanja / postotak greške	osobine sustava
sustav ⁹	61.7% / 11.2% (mala brzina) 33.6% / 6.6% (velika brzina)	evaluacija 3M RIA-300 CLPR sustava; postotci se temelje na registarskim tablicama; postotak odbijanja od 27.1% pri malim brzinama i 59.8% pri velikim
sustav ¹⁰	63% / 37%	rezultati dobiveni provođenjem sintaksne analize; postotci se temelje na registarskim tablicama
sustav ¹¹	76% / ?	postotak temeljen na registarskim tablicama (7 znakova); ulaz: 512x512 slika sa sivim razinama; klasifikacija temeljena na osobinama
ovaj pristup	85.6% / 0.001%	segmentacija pomoću DT-CNN neuronskih mreža; klasifikacija višestrukim neuronskim mrežama sa ulaznim osobinama i/ili podudaranjem predložaka (<i>template matching</i>); postotak odbijanja 14.4%

Tablica 2. Usporedba kompletnih CLPR sustava [4]

⁹ Davies, P., Emmott, N., i Ayland, N., 1990. "License Plate Recognition Technology for Toll Violation Enforcement", *Proceedings of IEEE Colloquium on Image analysis for Transport Applications*, Vol. 35

¹⁰ Williams, P., Kirby, H., Montgomery, F., i Boyle, R., 1989. "Evaluation of Video-Recognition Equipment for Number-Plate Matching", *Proceedings of the 2nd International Conference on Road Traffic Monitoring*

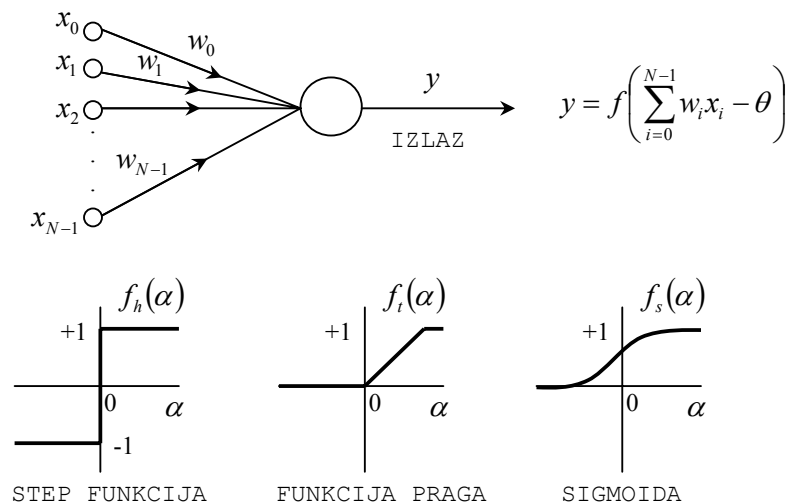
¹¹ Lotufo, R.A., Morgan, A.D., i Johnson, A.S., 1994. "Automatic Number-Plate Recognition", *Proceedings of the IEE Colloquium on Image Analysis for Transport Applications*, Vol. 35

1. Uvod

Osnovni predmet proučavanja ovog diplomskog rada čini posebna vrsta neuronskih mreža – višeslojni perceptron. Uloga perceptrona kao jednog od modela neuronskih mreža očituje se u klasifikaciji i raspoznavanju uzoraka, u ovom slučaju brojčano-slovčanih znakova na registarskim tablicama.

Umjetne neuronske mreže ("*artificial neural networks – ANN*" [1]) poznate su i kao konektivistički modeli, paralelni distribuirani procesni elementi i neuromorfni sustavi. Osnovna zadaća neuronskih mreža je postići dobre performanse pomoću gusto isprepletenih veza (sinapsi) između pojedinih procesnih elemenata. S ovog je stajališta struktura neuronske mreže bazirana na našem trenutnom shvaćanju biološkog živčanog sustava. Modeli neuronskih mreža pokazuju najveći potencijal na području raspoznavanja govora i slike gdje se mnoge pretpostavke ispituju istodobno. Upravo u paralelnoj i brznoj obradi informacija, te velikom broju procesnih elemenata mreže leži računalna moć takovog modela. Dobre performanse omogućene su gustim međuvezama jednostavnih procesnih elemenata.

Procesni elementi (*neuroni* ili *čvorovi*) korišteni u neuronskoj mreži tipično su nelinearni. Najjednostavniji neuron zbraja N ulaza modificiranih pripadnim težinskim faktorima i šalje rezultat kroz nelinearnost, kao što je prikazano na slici 5. Čvor je karakteriziran unutarnjim pragom ili pomakom ("*offset*" ili "*bias*") θ i tipom nelinearnosti. Slika 5. prikazuje tri najčešće vrste nelinearnosti; *step* funkciju, funkciju praga i sigmoidalnu nelinearnost.



Slika 5. Procesni element (čvor) oblikuje zbroj N težinskih ulaza i prosljeđuje rezultat kroz nelinearnost. Prikazane su tri vrste nelinearnosti.

Modeli neuronskih mreža definirani su topologijom mreže, karakteristikama procesnog elementa i pravilima učenja i treniranja koja određuju početni skup težinskih faktora i način na koji se težine prilagođavaju tijekom upotrebe, u svrhu poboljšanja performansi.

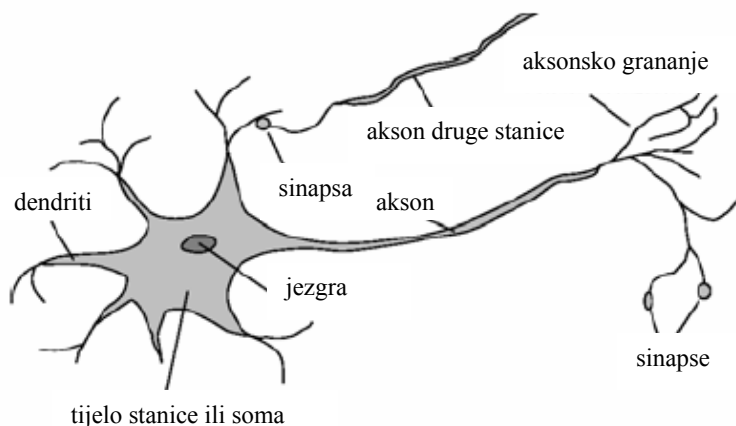
Potencijalna korist neuronskih mreža proteže se dalje od visoke računalne moći masivnog paralelizma. Mogućnost adaptacije i nastavka učenja ključna je u područjima poput raspoznavanja

znakova i govora, gdje se stalno susreću nova okruženja. Adaptacija posebice omogućuje određeni stupanj robusnosti kompenzacijom manjih variranja osobina procesnih elemenata.

1.1. Perceptron – jednoslojna neuronska mreža

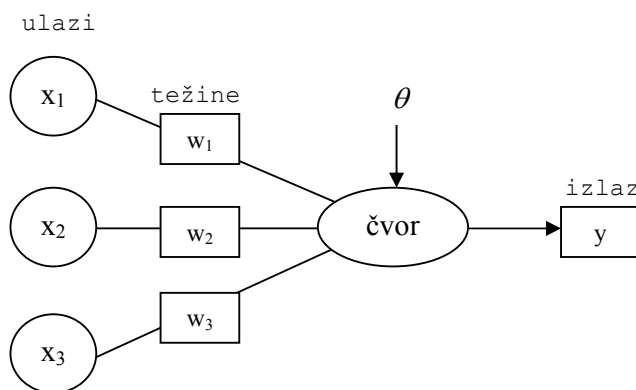
Perceptroni su jedna od najkorištenijih i najpoznatijih neuronskih mreža. Sam je pojam prvi upotrijebio Frank Rosenblatt (Rosenblatt, 1958)¹² kako bi opisao različite modele neuronskih mreža. Od njega je potekla ideja da se funkcijski opis rada neurona implementira u obliku programskog algoritma umjesto da se pokušava izgraditi fizički model neurona.

Perceptron [2] predstavlja jednostavni model osnovne stanice mozga, model neurona (slika 6.).



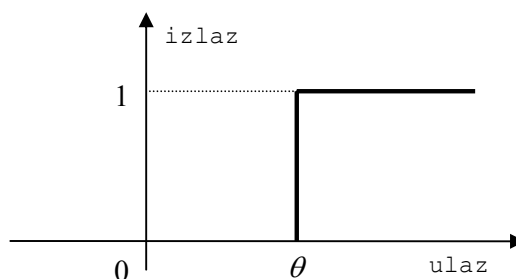
Slika 6. Osnovna struktura neurona - stanice mozga

Najjednostavnija neuronska mreža sastoji se od jednog perceptrona kao što je prikazano na slici 7. Jednoslojnu neuronsku mrežu može činiti više perceptrona kao osnovnih mrežnih čvorova.



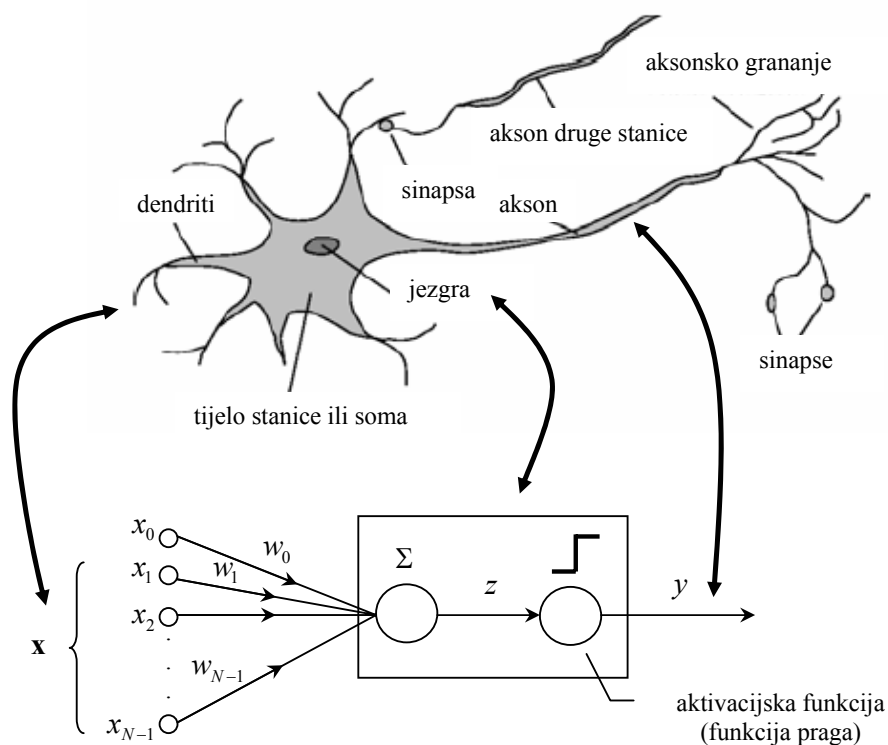
Slika 7. Perceptron s tri ulaza, pragom θ i jednim izlazom [2]

Svaki ulaz je množen težinskim faktorom i zajedno čine zbroj umnožaka. Na tu vrijednost primjenjuje se "aktivacijska funkcija" čiji rezultat predstavlja izlaz, aktivacijsku vrijednost čvora. Jedna takva funkcija je i *step* funkcija prikazana na slici 8.



Slika 8. Aktivacijska *step* funkcija

Za svaki dani ulaz, perceptron proizvodi određeni izlaz, ovisno o ulaznoj vrijednosti i težinskim faktorima. Težine se mogu podesiti tako da se postigne željeni izlaz za određeni ulaz.



Slika 9. Usporedba modela biološkog neurona i osnovnog procesnog elementa (čvora, perceptrona)

Kao što je vidljivo na slici 9. ulazi u perceptron analogni su sinapsama, same težinske veze ulaza i čvora analogne su dendritima, dok je čvor (zbroj svih težinskih ulaza i aktivacijska funkcija) analogija jezgri odnosno tijelu živčane stanice (neurona). Izlaz y perceptrona istovjetan je aksonu koji je sinapsama spojen s drugim neuronima, baš kao što je izlaz jednog perceptrona spojen sa ulazima drugih.

1.2. Višeslojna neuronska mreža s unaprijednom propagacijom - MFN

Višeslojne neuronske mreže s unaprijednom propagacijom (*multilayer feedforward networks* [3]) predstavljaju važnu klasu neuronskih mreža. Tipično, mreža se sastoji od skupa senzornih elemenata (ulazni čvorovi – *source nodes*) koji čine **ulazni sloj**, jednog ili više **skrivenih slojeva** procesnih elemenata, i **izlaznog sloja** procesnih elemenata. Ulazni signal širi se mrežom unaprijed, sloj po sloj. Ove se neuronske mreže obično nazivaju višeslojni perceptroni (*multilayer perceptrons* – *MLPs*).

Višeslojni perceptroni uspješno su primijenjeni na rješavanje nekih teških i raznolikih problema i to kroz postupke nadgledanog učenja (učenje s učiteljem) algoritmom propagacije greške unatrag kroz mrežu (*error back-propagation algorithm*). Algoritam se temelji na pravilu učenja korekcijom greške.

U osnovi, učenje propagacijom greške unazad sastoji se od dva prolaza kroz različite slojeve mreže: prolazak unaprijed i prolazak unatrag. U *prolasku unaprijed*, aktivni uzorak (ulazni vektor) postavlja se na ulazne čvorove mreže, i njegov učinak širi se dalje kroz svaki sloj mreže. Konačno, generira se skup izlaza kao konkretan odziv mreže. Tijekom prolaska unaprijed sve sinaptičke težine mreže su fiksne, nepromjenjive. Tijekom prolaska unatrag, sinaptičke težine se podešavaju u skladu s pravilom učenja korekcijom greške. Detaljnije, razlika željenog (ciljanog) odziva i trenutnog konkretnog odziva mreže predstavlja signal greške. Taj se signal greške dalje širi unatrag kroz mrežu, u suprotnom smjeru od sinaptičkih veza – otuda i ime "propagacija greške unatrag". Sinaptičke težine podešavaju se tako da realni odziv mreže bude bliže željenom odzivu u statističkom smislu. Proces učenja koji se izvodi u algoritmu naziva se učenje propagacijom unatrag (*back-propagation learning*).

Višeslojni perceptron odlikuju tri distinktno karakteristike:

1. Model svakog neurona u mreži uključuje *nelinearnu aktivacijsku funkciju*. Bitno je ovdje naglasiti da je nelinearna funkcija *glatka* (derivabilna), u suprotnosti sa *step* funkcijom kod Rosenblatt-ovog (jednoslojnog) perceptrona. Učestali oblik nelinearnosti koji zadovoljava ovaj uvjet jest *sigmoidalna nelinearnost* definirana *logističkom funkcijom*:

$$y_j = \frac{1}{1 + \exp(-v_j)}$$

- gdje je v_j inducirano lokalno polje (npr. težinska suma svih sinaptičkih ulaza i pomak) neurona j , a y_j je izlaz neurona. Prisutnost nelinearnosti je bitna jer bi u suprotnom ulazno-izlazni odnos mreže mogao biti reduciran na jednoslojni perceptron. Štoviše, upotreba logističke funkcije je biološki motivirana, jer pokušava opisati rad pravog neurona mozga.
2. Mreža sadrži jedan ili više slojeva *skrivenih neurona* koji nisu dio ulaza ni izlaza mreže. Ovi skriveni neuroni omogućuju mreži učenje kompleksnih zadataka pomoću ekstrakcije progresivno sve značajnijih osobina ulaznih uzoraka (vektora).
 3. Mreža pokazuje visoki stupanj povezanosti, određen sinapsama mreže. Promjena u povezanosti mreže uzrokuje promjenu u populaciji sinaptičkih veza ili njihovim težinama.

Upravo kroz zajedničku kombinaciju ovih karakteristika i sposobnosti za učenje iz iskustva kroz treniranje, višeslojni perceptron crpi svoju računalnu moć. No iste ove karakteristike odgovorne su i za nedostatke našeg trenutnog znanja o ponašanju mreže. Prvo, prisutnost distribuiranog oblika nelinearnosti i visoki stupanj povezanosti mreže čine teoretsku analizu višeslojnog perceptrona teškom. Drugo, upotreba skrivenih neurona čini proces učenja težim za

vizualizaciju. U implicitnom smislu, proces učenja mora odlučiti koje osobine i značajke ulaznog uzorka trebaju biti reprezentirane skrivenim neuronima. Proces učenja je time učinjen težim jer pretraživanje mora biti provedeno u puno širem prostoru mogućih funkcija, i mora se odabrati između alternativnih reprezentacija ulaznog uzorka.

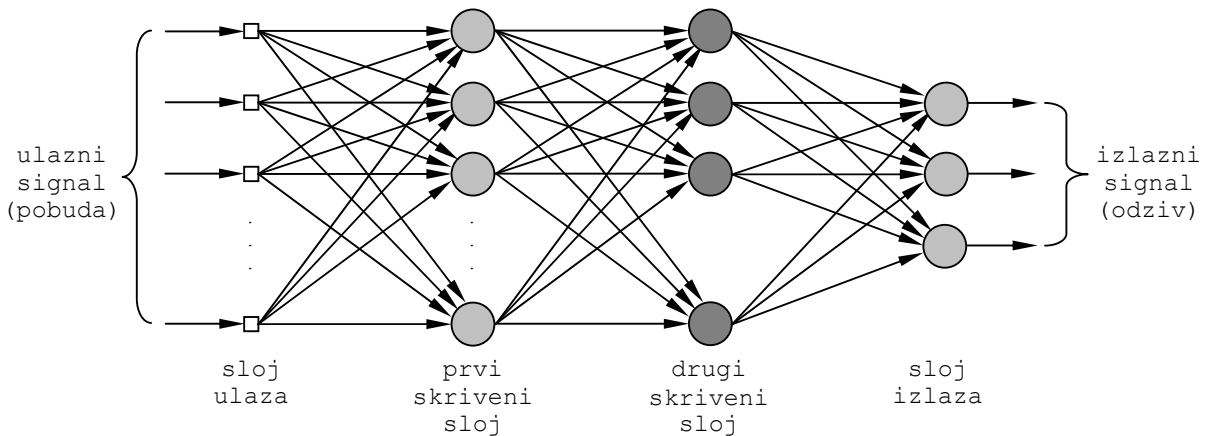
Upotreba termina "propagacija unatrag" (*back-propagation*) postaje izraženija nakon 1985. kada je populariziran kroz izdavanje semestralne knjige nazvane *Paralelni distribuirani procesi* (Rumelhart and McClelland, 1986)¹³.

Razvoj algoritma propagacije unatrag predstavlja napredak u razvoju neuronskih mreža utoliko da čini *proračunski učinkovitu* metodu treniranja višeslojnih perceptrona. Iako ne možemo tvrditi da navedeni algoritam predstavlja optimalno rješenje za sve rješive probleme, otklonio je pesimizam u pogledu učenja kod višeslojnih perceptrona na koji su u svojoj knjizi ukazali Minsky i Papert (1969)¹⁴.

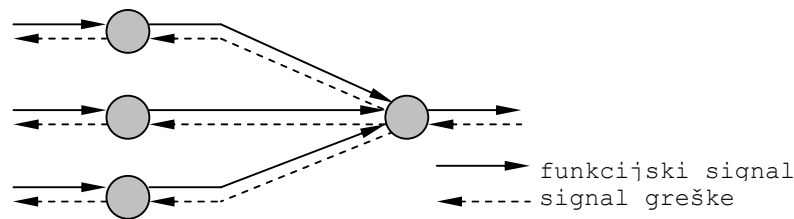
2. Struktura i svojstva višeslojnog perceptrona

2.1. Organizacija MLP-a

Višeslojni perceptron – MLP (*MultiLayer Perceptron*) – sastoji se od više slojeva međusobno povezanih procesnih elemenata – čvorova ili neurona. Općenito, svi su čvorovi MLP-a *potpuno povezani*, svaki sa svakim (slika 10.) što znači da je svaki neuron u svakom sloju povezan sa svim čvorovima/neuronima prethodnog sloja. Signal prolazi kroz mrežu unaprijed, s lijeva na desno i sloj po sloj.



Slika 10. Strukturalni graf višeslojnog perceptrona sa dva skrivena sloja



Slika 11. Prikaz smjera prostiranja signala kroz dio višeslojnog perceptrona: unaprijedna propagacija funkcijskog signala i propagacija unatrag signala greške

Dvije su vrste signala prisutne u mreži (Parker, 1987)¹⁵ (slika 11.):

1. Funkcijski signali

Funkcijski signal je ulazni signal (pobuda) koji počinje na ulaznom dijelu mreže, širi se dalje unaprijed (neuron po neuron) i javlja na izlaznom dijelu mreže kao izlazni signal. Ovakav signal nazivamo "funkcijskim" iz dva razloga. Prvo, podrazumijeva se da obavlja korisnu funkciju na izlazu iz mreže. Drugo, u svakom neuronu kroz koji funkcijski signal prolazi, signal se računa kao funkcija ulaza i pripadnih težina pridruženih tom neuronu. Funkcijski signal često se naziva i ulazni signal.

2. *Signali greške*

Signal greške javlja se kod izlaznog čvora mreže i propagira se unatrag (sloj po sloj) kroz mrežu. Nazivamo ga "signal greške" jer se njegov izračun u svakom neuronu mreže temelji na nekom od oblika funkcije greške.

Izlazni neuroni (procesni elementi, čvorovi) čine ***izlazni sloj mreže***. Preostali neuroni čine jedan ili više ***skrivenih slojeva***. Tako, skriveni čvorovi nisu dio ni ulaza ni izlaza mreže – otuda njihov naziv "*skriveni*". Prvi se skriveni sloj puni podacima iz ulaznog sloja kojeg čine senzorni elementi (ulazni čvorovi): rezultirajući izlazi prvog sloja predstavljaju ulaze u sljedeći skriveni sloj; i tako dalje za ostatak mreže.

Svaki skriveni ili izlazni neuron višeslojnog perceptrona dizajniran je za obavljanje dva izračuna:

1. Izračun funkcijskog signala koji se pojavljuje na izlazu neurona, izražen u obliku kontinuirane nelinearne funkcije ulaznog signala i sinaptičkih težina pridruženih tom neuronu.
2. Izračun procjene gradijenta (npr., gradijenti pogreške u odnosu na težine povezane s ulazima neurona) koji je potreban pri prolasku unatrag kroz mrežu.

Mogućnosti višeslojnih perceptrona proizlaze iz nelinearnosti koje se koriste u čvorovima mreže. Jednoslojni perceptron stvara poluravnine kao decizijska područja tj. decizijska funkcija dijeli ravninu na dvije poluravnine.

Ulazne varijable (vektor ulaza od n komponenti) određuju n -dimenzionalni prostor značajki u kojemu složena decizijska funkcija grupira uzorke u decijska područja koja pripadaju pojedinim klasama (izlazima iz mreže). Tako, dvoslojni perceptron može oblikovati bilo koje konveksno decizijsko područje u prostoru određenom ulaznim varijablama. Takova područja uključuju konveksne poligone i neugniježđena konveksna područja. Konveksna područja oblikuju se križanjem poluravnina koje stvara svaki čvor prvog sloja višeslojnog perceptrona.

Kada je potrebno da složena decizijska funkcija opisuje konveksna područja koja su ujedno i ugniježđena, kao što je to slučaj sa kompleksnim raspoznavanjem uzoraka koji se sastoje od većeg broja značajki (npr. $30 \cdot 20 = 640$ slikovnih elemenata pojedinog alfanumeričkog znaka) tada je potrebno koristiti višeslojni perceptron koji oblikuje proizvoljno kompleksna decizijska područja i može razdvajati ugniježđene klase [1].

2.2. Notacija [3]

Kako bi se olakšalo shvaćanje daljnjeg matematičkog objašnjenja postupka učenja višeslojnog perceptrona potrebno je usvojiti određenu notaciju:

- Slova i, j i k odnose se na različite neurone u mreži; uz širenje signala s lijeva na desno, neuron j nalazi se u sloju desno od neurona i , a neuron k se nalazi u sloju desno od neurona j kao skrivenog čvora.
- U iteraciji (koraku) n , n -ti uzorak (primjer) za učenje predstavlja se mreži.
- Simbol $E(n)$ odnosi se na trenutni zbroj kvadrata greške u iteraciji n . Prosjek $E(n)$ nad svim vrijednostima n (tj. nad cijelim skupom za učenje) predstavlja prosječnu grešku E_{av} .
- Simbol $e_j(n)$ odnosi se na signal greške na izlazu neurona j u iteraciji n .
- Simbol $d_j(n)$ odnosi se na željeni odziv neurona j i koristi se za izračunavanje $e_j(n)$.
- Simbol $y_j(n)$ odnosi se na funkcijski signal na izlazu neurona j u n -toj iteraciji.
- Simbol $w_{ji}(n)$ predstavlja sinaptičku težinu (težinski faktor) veze između izlaza neurona i i ulaza neurona j u n -toj iteraciji. Korekcija ove težine u n -toj iteraciji označena je s $\Delta w_{ji}(n)$.
- Inducirano lokalno polje (tj. težinska suma svih sinaptičkih ulaza i početnog pomaka – "bias") neurona j u iteraciji n označeno je s $v_j(n)$ i predstavlja ulazni signal aktivacijskoj funkciji pridruženoj neuronu j .
- Aktivacijska funkcija koja opisuje ulazno-izlazni funkcijski odnos nelinearnosti pridružene neuronu j označena je s $\varphi_j(\dots)$.
- Početni pomak (*bias*) neurona j označen je s θ_j a njegov učinak prikazan je sinapsom težine $w_{j0} = \theta_j$ povezane s konstantnom ulaznom vrijednosti +1.
- i -ti element ulaznog vektora (uzorka) označen je s $x_i(n)$.
- k -ti element kompletnog izlaznog vektora (uzorka) označen je s $o_k(n)$.
- Parametar koji predstavlja brzinu učenja označen je s η .
- Simbol m_l označava veličinu (tj. broj čvorova) sloja l višeslojnog perceptrona; $l = 0, 1, \dots, L$ gdje je L "dubina" mreže. Tako m_0 označava veličinu ulaznog sloja, m_1 veličinu prvog skrivenog sloja, m_L veličinu izlaznog sloja. Koristi se i notacija $m_L = M$.

3. Postupak učenja višeslojnog perceptrona

Postupak učenja i adaptacije težinskih faktora višeslojnog perceptrona temelji se na *algoritmu propagacije unatrag* (*back-propagation algorithm*). Kako bi se shvatilo algoritam propagacije unatrag, potrebno je proučiti LMS algoritam najmanje kvadratne pogreške (*least-mean-square algorithm*).

3.1. LMS algoritam [3]

LMS algoritam predložili su Widrow i Hoff (1960)¹⁶ kao učinkovitu metodu učenja *jednoslojnog* perceptrona. Algoritam se temelji na upotrebi trenutnih vrijednosti funkcije cijene (srednje kvadratne greške) definirane izrazom

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} e^2(n)$$

gdje je \mathbf{w} vektor težinskih faktora, a $e(n)$ signal greške u trenutku n . Diferenciranjem $E(\mathbf{w})$ po vektoru težina \mathbf{w} daje

$$\frac{\partial E(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = e(n) \frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}}$$

LMS algoritam odnosi se na neuron s linearnom aktivacijskom funkcijom, te se tako signal greške može izraziti kao

$$e(n) = d(n) - \mathbf{x}^T(n) \mathbf{w}(n)$$

gdje je $d(n)$ izlaz sustava u trenutku n , a $\mathbf{x}(n)$ ulazni vektor sustava u trenutku n . Otuda

$$\frac{\partial e(n)}{\partial \mathbf{w}(n)} = -\mathbf{x}(n) \quad \text{i} \quad \frac{\partial E(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = -\mathbf{x}(n) e(n)$$

Zadnji izraz predstavlja procjenu gradijenta $\mathbf{g}(n) = -\mathbf{x}(n) e(n)$, koji upotrijebljen u izrazu za promjenu težinskog vektora

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \eta \mathbf{g}(n)$$

oblikuje LMS algoritam:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) + \underbrace{\eta \mathbf{x}(n) e(n)}_{\Delta \mathbf{w}} \quad (3.1)$$

Upravo iz LMS algoritma promjene težinskih faktora vidljivo je da se sinaptičke težine mijenjaju proporcionalno diferenciji srednje kvadratne greške po vektoru težina, odnosno

$$\Delta \mathbf{w} \propto \frac{\partial E(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \quad (3.2)$$

3.2. Algoritam učenja propagacijom greške unatrag [3]

Signal greške na izlazu neurona j u n -toj iteraciji (predstavljanju n -tog uzorka mreži) definiran je kao razlika

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n), \quad \text{neuron } j \text{ je čvor izlaznog sloja mreže} \quad (3.3)$$

Trenutna vrijednost greške neurona j definirana je kao $\frac{1}{2}e_j^2(n)$ [3]. Slijedi da je trenutna vrijednost $E(n)$ ukupne greške jednaka zbroju $\frac{1}{2}e_j^2(n)$ svih *neurona izlaznog sloja* višeslojnog perceptrona; to su jedini "vidljivi" neuroni za koje se može direktno izračunati signal greške.

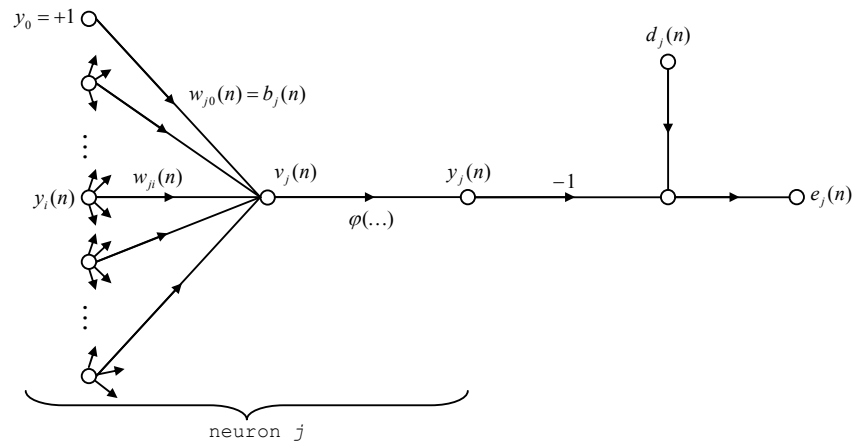
Tako se za ukupnu grešku na izlazu mreže može pisati

$$E(n) = \frac{1}{2} \sum_{j \in C} e_j^2(n) \quad (3.4)$$

gdje skup C uključuje sve neurone izlaznog sloja mreže. Neka N predstavlja ukupni broj uzoraka (primjera) u skupu za učenje. Prosječna kvadratna greška E_{av} jednaka je zbroju $E(n)$ po svim n , i zatim normalizirana u odnosu na veličinu N skupa uzoraka za učenje:

$$E_{av} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E(n) \quad (3.5)$$

Trenutna vrijednost greške $E(n)$ i prosječna greška E_{av} predstavljaju funkciju svih slobodnih parametara mreže (tj. sinaptičkih težina i početnih pomaka). Za određeni skup za učenje, E_{av} predstavlja funkciju cijene (*cost function*) kao mjeru performansi postupka učenja. **Zadatak postupka učenja je prilagoditi slobodne parametre mreže kako bi se postigla minimalna prosječna pogreška E_{av} .** Kako bi se postigla ova minimizacija, koristi se metoda učenja u kojoj se težine prilagođavaju uzorak po uzorak, sve u jednoj *epohi*, tj. dok mreži nisu predstavljeni svi uzorci iz skupa za učenje. Ovakav oblik učenja naziva se **metoda učenja on-line**. Težinski faktori prilagođavaju se ovisno o greški izračunatoj za *svaki* uzorak predstavljen mreži.



Slika 12. Graf toka signala s naglaskom na detalje izlaza neurona j [3]

Aritmetička sredina pojedinih promjena težina skupa uzoraka za učenje predstavlja procjenu točne promjene koja bi rezultirala modificiranjem težina na temelju minimiziranja funkcije cijene E_{av} preko cijelog skupa za učenje.

Slika 12. prikazuje neuron j punjen funkcijskim signalima neurona u sloju lijevo (prethodni sloj neurona). Inducirano lokalno polje $v_j(n)$ na ulazu u aktivacijsku funkciju pridruženu neuronu j definirano je izrazom

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^m w_{ji}(n) y_i(n) \quad (3.6)$$

gdje je $y_i(n)$ funkcijski signal na izlazu neurona i prethodnog sloja, te m ukupni broj ulaza (isključujući početni pomak) predstavljen neuronu j . Sinaptička težina w_{j0} (povezana s konstantnim ulazom $y_0 = +1$) jednaka je početnom pomaku θ_j pridruženom neuronu j . Tako je funkcijski signal $y_j(n)$ na izlazu neurona j u iteraciji n jednak

$$y_j(n) = \varphi_j(v_j(n)) \quad (3.7)$$

Slično kao kod LMS algoritma (3.1), algoritam propagacije unatrag mijenja sinaptičku težinu $w_{ji}(n)$ za iznos korekcije $\Delta w_{ji}(n)$ koja je proporcionalna parcijalnoj derivaciji $\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)}$ (3.2).

Prema pravilu ulančavanja, gradijent možemo prikazati u obliku

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} = \frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)} \quad (3.8)$$

Parcijalna derivacija $\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)}$ predstavlja faktor osjetljivosti koji određuje smjer pretraživanja u prostoru težina za sinaptičku težinu $w_{ji}(n)$.

Diferenciranjem po $e_j(n)$ izraza za $E(n)$ (3.4) dobiva se

$$E(n) = \frac{1}{2} \sum_{j \in C} e_j^2(n) \left/ \frac{\partial}{\partial e_j(n)} \right. \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} = e_j(n)$$

Diferenciranjem po $y_j(n)$ izraza za signal greške (3.3) dobiva se

$$e_j(n) = d_j(n) - y_j(n) \left/ \frac{\partial}{\partial y_j(n)} \right. \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} = -1$$

Diferenciranjem po $v_j(n)$ izlaznog funkcijskog signala (3.7) dobiva se

$$y_j(n) = \varphi_j(v_j(n)) \left/ \frac{\partial}{\partial v_j(n)} \right. \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = \varphi'_j(v_j(n))$$

Konačno, diferenciranjem po $w_{ji}(n)$ induciranog lokalnog polja (3.6) dobiva se

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^m w_{ji}(n) y_i(n) \left/ \frac{\partial}{\partial w_{ji}(n)} \right.$$

$$\frac{\partial v_j(n)}{\partial w_{ji}(n)} = y_i(n) \quad (3.12)$$

Dobivene jednakosti (3.9), (3.10), (3.11) i (3.12) primijenjene na izraz za $\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)}$ (3.8) rezultiraju

s

$$\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} = -e_j(n) \phi'_j(v_j(n)) y_i(n) \quad (3.13)$$

Korekcija $\Delta w_{ji}(n)$ primijenjena na težinski faktor $w_{ji}(n)$ definirana je **delta pravilom**:

$$\Delta w_{ji}(n) = -\eta \frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)} \quad (3.14)$$

gdje je η parametar brzine učenja algoritma propagacije greške unatrag. Upotreba znaka (-) u prethodnoj jednakosti upućuje na *gradijentni spust* u prostoru težina (tj. traži se smjer promjene težine koja smanjuje vrijednost $E(n)$). Sukladno slijedi

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \delta_j(n) y_i(n) \quad (3.15)$$

gdje je *lokalni gradijent* $\delta_j(n)$ definiran sa

$$\delta_j(n) = -\frac{\partial E(n)}{\partial v_j(n)} = -\frac{\partial E(n)}{\partial e_j(n)} \frac{\partial e_j(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} = e_j(n) \phi'_j(v_j(n)) \quad (3.16)$$

Lokalni gradijent upućuje na potrebne promjene u sinaptičkim težinama. Prema zadnjoj jednakosti, lokalni gradijent $\delta_j(n)$ izlaza neurona j jednak je umnošku odgovarajućeg signala greške $e_j(n)$ tog neurona i derivacije $\phi'_j(v_j(n))$ pridružene aktivacijske funkcije.

Ključni element u izračunavanju promjena težina $\Delta w_{ji}(n)$ je **signal greške** $e_j(n)$ na izlazu neurona j . U ovom kontekstu mogu se prepoznati dva posebna slučaja, ovisno o položaju neurona j u mreži:

- U prvom slučaju, neuron j je izlazni čvor. Ovaj je slučaj jednostavan jer se za svaki izlazni čvor definira željeni odziv te je lako izračunati odgovarajući signal greške.
- U drugom slučaju, neuron j je skriveni čvor. Iako skrivenim čvorovima nije moguće pristupiti direktno, oni dijele odgovornost u stvaranju greške na izlazu mreže. Pitanje je, naime, kako znati koliko i kako "kazniti" ili "nagraditi" skrivene neurone za njihov udio odgovornosti. Ovaj se problem još naziva i *problem pridjeljivanja zasluga* ("*credit-assignment problem*") čije elegantno rješenje je upravo širenje signala greške unatrag kroz mrežu.

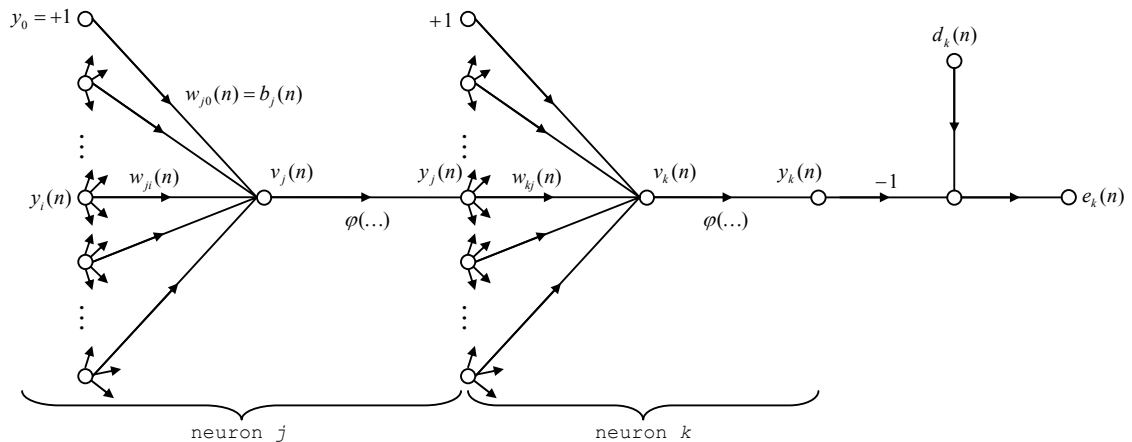
3.2.1. Slučaj 1. Neuron j je izlazni čvor

Kada se neuron j nalazi u izlaznom sloju mreže, definira se željeni odziv samoga čvora te se izrazom (3.3) može jednostavno izračunati signal greške $e_j(n)$ pridružen tom neuronu; vidi izraz (3.5). Kada se odredi $e_j(n)$, moguće je lako izračunati lokalni gradijent $\delta_j(n)$ korištenjem izraza (3.16):

$$\delta_j(n) = e_j(n)\varphi'_j(v_j(n))$$

3.2.2. Slučaj 2. Neuron j je skriveni čvor

Kada se neuron j nalazi u skrivenom sloju višeslojnog perceptrona, ne postoji definirani željeni odziv toga neurona. Sukladno tome, signal greške skrivenog neurona mora se odrediti rekursivno pomoću signala greški svih neurona s kojima je dotični skriveni neuron direktno povezan; ovo je mjesto gdje razvoj algoritma propagacije unatrag postaje složeniji.



Slika 13. Graf toka signala s naglaskom na detalje izlaza neurona k povezanog sa skrivenim neuronom j [3]

U situaciji koju prikazuje slika 13. neuron j predstavlja skriveni čvor mreže. Prema izrazu (3.16) lokalni gradijent $\delta_j(n)$ za skriveni neuron može se redefinirati izrazom

$$\begin{aligned} \delta_j(n) &= -\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} \frac{\partial y_j(n)}{\partial v_j(n)} \\ &= -\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} \varphi'_j(v_j(n)), \quad \text{neuron } j \text{ je skriven} \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdje je u drugom redu upotrijebljen izraz (3.11). Parcijalnu derivaciju $\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)}$ možemo izračunati na slijedeći način. Iz slike 13. slijedi da je

$$E(n) = \frac{1}{2} \sum_{k \in C} e_k^2(n), \quad \text{neuron } k \text{ je izlazni čvor} \quad (3.18)$$

Dobiveni izraz (3.18) zapravo je jednak izrazu (3.4) uz upotrebu indeksa k na mjestu indeksa j . Indeks j u ovom slučaju predstavlja skriveni neuron. Diferenciranjem izraza (3.18) po funkcijskom signalu $y_j(n)$ dobiva se

$$\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_k e_k(n) \frac{\partial e_k(n)}{\partial y_j(n)} \quad (3.19)$$

Upotrebom pravila ulančavanja za parcijalnu derivaciju $\frac{\partial e_k(n)}{\partial y_j(n)}$ prethodni izraz jednak je

$$\frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} = \sum_k e_k(n) \frac{\partial e_k(n)}{\partial v_k(n)} \frac{\partial v_k(n)}{\partial y_j(n)} \quad (3.20)$$

Iz slike 13. slijedi da je signal greške sada jednak

$$\begin{aligned} e_k(n) &= d_k(n) - y_k(n) \\ &= d_k(n) - \varphi_k(v_k(n)), \text{ neuron } k \text{ je izlazni čvor} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Slijedi da je

$$\frac{\partial e_k(n)}{\partial v_k(n)} = -\varphi'_k(v_k(n)) \quad (3.22)$$

Za neuron k , inducirano lokalno polje jednako je

$$v_k(n) = \sum_{j=0}^m w_{kj}(n) y_j(n) \quad (3.23)$$

gdje je m ukupni broj ulaza (isključujući početni pomak) pridružen neuronu k . I ovdje je sinaptička težina $w_{k0}(n)$ jednaka pomaku $b_k(n)$ neurona k , i odgovarajući ulaz je konstantne vrijednosti +1.

Diferenciranjem izraza (3.23) po $y_j(n)$ dobiva se

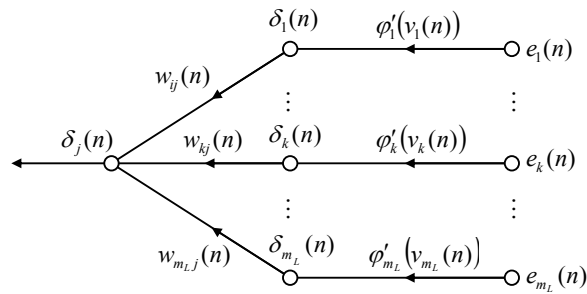
$$\frac{\partial v_k(n)}{\partial y_j(n)} = w_{kj}(n) \quad (3.24)$$

Upotrebom izraza (3.22) i (3.24) u izrazu (3.20) dobiva se tražena parcijalna derivacija:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(n)}{\partial y_j(n)} &= -\sum_k e_k(n) \varphi'_k(v_k(n)) w_{kj}(n) \\ &= -\sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Konačno, uporabom izraza (3.25) u izrazu (3.17) dobiva se pravilo računanja lokalnog gradijenta $\delta_j(n)$ **skrivenog neurona j**:

$$\boxed{\delta_j(n) = \varphi'_j(v_j(n)) \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n)} \quad (3.26)$$



Slika 14. Graf toka signala dijela sustava s naglaskom na propagaciju unatrag signala greške [3]

Slika 14. prikaz je izraza (3.26) u obliku grafa toka signala, pod pretpostavkom da se izlazni sloj sastoji od ukupno m_L neurona.

Faktor $\varphi'_j(v_j(n))$ potreban pri izračunu lokalnog gradijenta $\delta_j(n)$ u izrazu (3.26) ovisi isključivo o aktivacijskoj funkciji pridruženoj skrivenom neuronu j . Preostali faktori potrebni za ovaj izračun, ponajprije zbroj po k , ovise o dva skupa uvjeta. Prvi skup uvjeta, $\delta_k(n)$, zahtijeva znanje o signalima greške $e_k(n)$ za sve neurone koji leže u sloju neposredno desno od skrivenog neurona j , i koji su direktno vezani na neuron j (slika 13.). Drugi skup uvjeta, $w_{kj}(n)$, čine sinaptičke težine pridružene ovim vezama.

Sumirajmo definirane odnose među pojedinim iznosima i faktorima u algoritmu učenja propagacijom greške unatrag. Prvo, promjena $\Delta w_{ji}(n)$ težine koja povezuje neuron i i neuron j definirana je **delta pravilom**:

$$\begin{pmatrix} \text{korekcija} \\ \text{težina} \\ \Delta w_{ji}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{parametar} \\ \text{brzine ucenja} \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{lokalni} \\ \text{gradijent} \\ \delta_j(n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{ulazni signal} \\ \text{neurona } j \\ y_i(n) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Drugo, lokalni gradijent $\delta_j(n)$ ovisi o tome je li neuron j izlazni ili skriveni čvor:

1. Ako je neuron j izlazni čvor, $\delta_j(n)$ je jednak umnošku derivacije $\varphi'_j(v_j(n))$ i signala greške $e_j(n)$, od kojih su oba pridružena neuronu j (izraz (3.16)).
2. Ako je neuron j skriveni čvor, $\delta_j(n)$ je jednak umnošku derivacije $\varphi'_j(v_j(n))$ i težinske sume faktora δ neurona u slijedećem skrivenom ili izlaznom sloju koji je povezan s neuronom j (izraz (3.26)).

3.2.3. Dva prolaska izračunavanja

U primjeni algoritma učenja propagacijom greške unatrag razlikujemo dva prolaska (ciklusa) izračunavanja. Prvi prolazak naziva se i **prolaz unaprijed** (*forward pass*), dok se drugi naziva još i **prolaz unatrag** (*backward pass*).

U *prolasku unaprijed* kroz mrežu, sinaptičke težine se ne mijenjaju i funkcijski signali mreže se računaju za svaki pojedini neuron (neuron po neuron). Funkcijski signal koji se pojavljuje na izlazu neurona j računa se kao

$$y_j(n) = \varphi(v_j(n)) \quad (3.28)$$

gdje je $v_j(n)$ inducirano lokalno polje neurona j , definirano sa

$$v_j(n) = \sum_{i=0}^m w_{ji}(n) y_i(n) \quad (3.29)$$

gdje je m ukupni broj ulaza (ne uključujući početni pomak – *bias*) u neuron j ; $w_{ji}(n)$ sinaptička težina veze neurona i i neurona j , i $y_i(n)$ ulazni signal neurona j odnosno funkcijski signal na izlazu neurona i . Ako se neuron j nalazi u prvom skrivenom sloju mreže, tada je $m = m_0$ i indeks i se odnosi na i -ti ulazni element mreže, za koji pišemo

$$y_i(n) = x_i(n) \quad (3.30)$$

gdje je $x_i(n)$ i -ti element ulaznog vektora (uzorka). Ako je, pak, neuron j u izlaznom sloju mreže, tada je $m = m_L$ i indeks j se odnosi na j -ti izlazni element mreže, za koji pišemo

$$y_j(n) = o_j(n) \quad (3.31)$$

gdje je $o_j(n)$ j -ti element izlaznog vektora (uzorka). Ovaj se izlaz uspoređuje sa željenim odzivom $d_j(n)$, pri čemu se odredi signal greške $e_j(n)$ za j -ti izlazni neuron. Tako faza izračunavanja prolaskom unaprijed započinje u prvom skrivenom sloju prezentiranjem ulaznog vektora, a završava u izlaznom sloju izračunom signala greške za svaki neuron ovoga sloja.

Prolazak unatrag kroz mrežu započinje u izlaznom sloju propuštanjem signala greške ulijevo kroz mrežu, sloj po sloj, i rekursivnim izračunavanjem lokalnog gradijenta δ svakog neurona. Ovaj rekursivni proces omogućuje promjene sinaptičkih težina u skladu s delta pravilom (izraz 3.27). Za neuron u izlaznom sloju, δ je jednostavno jednak umnošku signala greške tog neurona i prve derivacije njegove nelinearnosti. Tako se upotrebom izraza (3.27) mogu izračunati promjene težina svih veza prema neuronima izlaznog sloja. Uz izračunate δ za neurone izlaznog sloja, korištenjem izraza (3.26) mogu se odrediti δ za neurone u svim ostalim slojevima, a time i promjene odgovarajućih težina. Rekursivno izračunavanje nastavlja se sloj po sloj, uz propagiranje promjena svih sinaptičkih težina mreže.

Bitno je istaknuti da je prilikom predstavljanja mreži pojedinog primjera za učenje, ulazni uzorak fiksiran ("pritegnut") tijekom oba prolaska izračunavanja – prolaska unaprijed i prolaska unatrag.

3.2.4. Aktivacijska funkcija

Izračun δ za svaki neuron višeslojnog perceptrona zahtijeva poznavanje derivacije aktivacijske funkcije $\varphi(\dots)$ pridružene tom neuronu. Kako bi ona postojala, funkcija $\varphi(\dots)$ mora biti kontinuirana. Drugim riječima, *diferencijabilnost* je jedini zahtjev koji aktivacijska funkcija mora ispuniti. Primjer kontinuirane diferencijabilne nelinearne aktivacijske funkcije uobičajeno korištene u višeslojnom perceptronu je *sigmoidalna nelinearnost*; opisana su dva oblika:

1. Logistička funkcija.

Ovaj je oblik sigmoidalne nelinearnosti u svom općenitom obliku definiran sa

$$\varphi_j(v_j(n)) = \frac{1}{1 + \exp(-av_j(n))}, \quad a > 0 \text{ i } -\infty < v_j(n) < \infty \quad (3.32)$$

gdje je $v_j(n)$ inducirano lokalno polje neurona j . Prema ovoj nelinearnosti, amplituda izlaza je iz intervala $0 \leq y_j \leq 1$. Diferenciranjem izraza (3.32) po $v_j(n)$ dobiva se

$$\varphi'_j(v_j(n)) = \frac{a \exp(-av_j(n))}{(1 + \exp(-av_j(n)))^2} \quad (3.33)$$

Uz $y_j(n) = \varphi_j(v_j(n))$ može se eliminirati eksponencijalni izraz $\exp(-av_j(n))$ iz (3.33) i tako izraziti derivaciju $\varphi'_j(v_j(n))$ u obliku

$$\varphi'_j(v_j(n)) = ay_j(n)[1 - y_j(n)] \quad (3.34)$$

Za neuron j u izlaznom sloju, $y_j(n) = o_j(n)$. Tako lokalni gradijent neurona j možemo izraziti kao

$$\begin{aligned} \delta_j(n) &= e_j(n)\varphi'_j(v_j(n)) \\ &= a[d_j(n) - o_j(n)]o_j(n)[1 - o_j(n)], \quad \text{neuron } j \text{ je izlazni čvor} \end{aligned} \quad (3.35)$$

gdje je $o_j(n)$ funkcijski signal na izlazu neurona j , a $d_j(n)$ željeni odziv. S druge strane, za proizvoljni skriveni neuron j , lokalni gradijent može se izraziti sa

$$\begin{aligned} \delta_j(n) &= \varphi'_j(v_j(n)) \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \\ &= ay_j(n)[1 - y_j(n)] \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n), \quad \text{neuron } j \text{ je skriveni čvor} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Iz izraza (3.34) vidljivo je da derivacija $\varphi'_j(v_j(n))$ ima maksimalnu vrijednost pri $y_j(n) = 0.5$, a minimalnu vrijednost (nula) pri $y_j(n) = 0$ ili $y_j(n) = 1.0$. Kako je iznos promjene sinaptičkih težina mreže proporcionalan derivaciji $\varphi'_j(v_j(n))$, slijedi da se kod sigmoidalne aktivacijske funkcije sinaptičke težine mijenjaju najviše kod onih neurona u mreži kod kojih je funkcijski signal negdje pri sredini njihova intervala. Prema (Rumelhart *et al.*, 1986a¹⁷), upravo ova osobina algoritma propagacije greške unatrag pridonosi njegovoj stabilnosti kao algoritmu učenja.

2. Hiperbolična tangens funkcija.

Drugi uobičajeno korišteni oblik sigmoidalne nelinearnosti je hiperbolična tangens funkcija općenitog oblika

$$\varphi_j(v_j(n)) = a \tanh(bv_j(n)), \quad (a, b) > 0 \quad (3.37)$$

gdje su a i b konstante. Derivacija po $v_j(n)$ daje

$$\begin{aligned} \varphi'_j(v_j(n)) &= ab \operatorname{sech}^2(bv_j(n)) \\ &= ab(1 - \tanh^2(bv_j(n))) \\ &= \frac{b}{a} [a - y_j(n)][a + y_j(n)] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Za neuron j u izlaznom sloju, lokalni gradijent jednak je

$$\begin{aligned} \delta_j(n) &= e_j(n) \varphi'_j(v_j(n)) \\ &= \frac{b}{a} [d_j(n) - o_j(n)][a - o_j(n)][a + o_j(n)] \end{aligned} \quad (3.39)$$

Za neuron j u skrivenom sloju vrijedi

$$\begin{aligned} \delta_j(n) &= \varphi'_j(v_j(n)) \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n) \\ &= \frac{b}{a} [a - y_j(n)][a + y_j(n)] \sum_k \delta_k(n) w_{kj}(n), \text{ neuron } j \text{ je skriven} \end{aligned} \quad (3.40)$$

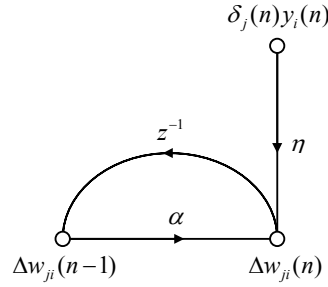
Korištenjem izraza (3.35) i (3.36) za logističku funkciju, te izraza (3.39) i (3.40) za hiperboličnu tangens funkciju, možemo izračunati lokalni gradijent δ_j bez potrebe za eksplicitnim znanjem aktivacijske funkcije.

3.2.5. Brzina učenja

Algoritam učenja propagacijom greške unatrag daje "aproksimaciju" putanje u prostoru težina (*weight space*) određenu metodom strmog spusta. Što je parametar brzine učenja η manji, to su iz iteracije u iteraciju manje promjene sinaptičkih težina mreže, i krivulja u prostoru težina je glatkija. Ovo je poboljšanje postignuto nauštrb sporije brzine učenja. Ako, pak, odaberemo prevelik parametar η u svrhu ubrzanja procesa učenja, rezultirajuće velike promjene u sinaptičkim težinama poprimaju takav oblik da mreža postaje nestabilna (tj. oscilira). Jednostavna metoda povećanja brzine učenja uz istodobno izbjegavanje opasnosti od nestabilnosti mreže temelji se na modificiranom delta pravilu (izraz 3.15) s uključenim momentom, kao što je pokazao (Rumelhart et al., 1986a¹⁷):

$$\Delta w_{ji}(n) = \alpha \Delta w_{ji}(n-1) + \eta \delta_j(n) y_i(n) \quad (3.41)$$

gdje je α najčešće pozitivan broj – *konstanta momenta (momentum constant)*. Ovaj moment kontrolira povratnu petlju oko $\Delta w_{ji}(n)$, kao što je ilustrirano na slici 15. gdje je z^{-1} operator kašnjenja (*unit delay operator*). Izraz (3.41) zove se *generalizirano delta pravilo* koje uključuje delta pravilo (izraz 3.15) kao poseban slučaj (tj. za $\alpha = 0$).



Slika 15. Graf toka signala koji prikazuje utjecaj konstante momenta [3]

Kako bi se mogao vidjeti utjecaj prezentiranja niza uzoraka na sinaptičke težine zbog momenta α , potrebno je izraz (3.41) napisati kao vremensku seriju s indeksom t . Indeks t počinje s inicijalnim vremenom 0 a završava s trenutnim vremenom n . Izraz (3.41) može se promatrati kao diferencijalna jednadžba prvoga reda korekcije pogreške $\Delta w_{ji}(n)$ čijim se rješavanjem po $\Delta w_{ji}(n)$ dobiva izraz

$$\Delta w_{ji}(n) = \eta \sum_{t=0}^n \alpha^{n-t} \delta_j(t) y_i(t) \quad (3.42)$$

koji predstavlja vremensku seriju duljine $n+1$. Iz izraza (3.13) i (3.16) može se uočiti da je umnožak $\delta_j(n) y_i(n)$ jednak $-\frac{\partial E(n)}{\partial w_{ji}(n)}$. Sukladno tomu, izraz (3.42) može se napisati u ekvivalentnom obliku

$$\Delta w_{ji}(n) = -\eta \sum_{t=0}^n \alpha^{n-t} \frac{\partial E(t)}{\partial w_{ji}(t)} \quad (3.43)$$

Na temelju ove relacije može se primijetiti nekoliko interesantnih svojstava (Watrous, 1987¹⁸; Jacobs, 1988¹⁹):

1. Trenutni iznos promjene $\Delta w_{ji}(n)$ predstavlja zbroj eksponencijalnih težina vremenskih serija. Kako bi vremenske serije bile *konvergentne*, konstanta momenta mora se ograničiti na vrijednosti iz intervala $0 \leq |\alpha| \leq 1$. Kada je α nula, algoritam propagacije greške unatrag radi bez momenta. Također, konstanta momenta α može biti pozitivna i negativna iako je malo vjerojatno da se negativni α koristi u praksi.
2. Kada parcijalna derivacija $\frac{\partial E(t)}{\partial w_{ji}(t)}$ ima isti predznak pri uzastopnim iteracijama, eksponencijalna težinska suma $\Delta w_{ji}(n)$ sve više raste, te se težina $w_{ji}(n)$ prilagođava za veliki iznos. Upotreba momenta u algoritmu propagacije unatrag nastoji *ubrzati spust* u monotonom smjeru nizbrdo.
3. Kada parcijalna derivacija $\frac{\partial E(t)}{\partial w_{ji}(t)}$ ima različit predznak pri uzastopnim iteracijama, eksponencijalna težinska suma $\Delta w_{ji}(n)$ se smanjuje, te se tako težina $w_{ji}(n)$ prilagođava za manji iznos. Upotreba momenta u algoritmu propagacije unatrag ima *stabilizirajući učinak* u smjerovima koji osciliraju po predznaku.

Integracija momenta u algoritam propagacije unatrag predstavlja manju modifikaciju u postupku prilagođavanja težina, no ima i određeni koristan utjecaj na ponašanje algoritma pri učenju. Izraz za moment također omogućuje nastavljavanje procesa učenja pri nailasku na plitki lokalni minimum na površini greške.

Pri izvođenju algoritma propagacije unatrag, pretpostavljeno je da je parametar brzine učenja označen konstantom η . U stvarnosti, pak, trebao bi se označiti s η_{ji} ; drugim riječima, parametar brzine učenja trebao bi biti *pridružen pojedinoj vezi*, a ne postupku učenja kao cjelini. Doista, mnoge se interesantne stvari mogu učiniti definiranjem različitih η za različite dijelove mreže.

Također je vrijedno spomenuti da prilikom primjene algoritma propagacije unatrag možemo odabrati da su sve sinaptičke težine u mreži podesive, ili možemo ograničiti bilo koji broj težina na vrijednosti nepromjenjive tijekom procesa prilagođavanja. U zadnje navedenom slučaju, signali greške se uobičajeno propagiraju mrežom unatrag; no ipak, sinaptičke težine ostaju nepromijenjene. To se može postići postavljanjem parametra brzine učenja η_{ji} (za sinaptičku težinu w_{ji}) jednakim nuli.

3.2.6. Sekvencijalni i grupni način učenja

U praktičnoj primjeni algoritma propagacije unatrag, učenje nastaje iz brojnih predstavljanja propisanog skupa primjeraka za učenje višeslojnom perceptronu. Jedno potpuno predstavljanje cijelog skupa za učenje tijekom procesa učenja naziva se *epohom*. Proces učenja prolazi epohu po epohu, sve dok se ne stabiliziraju sinaptičke težine i pomaci čvorova mreže, te sve dok prosječna kvadratna pogreška cijelog skupa za učenje ne konvergira ka nekoj minimalnoj vrijednosti. Dobra je praksa, od jedne epohe do druge, *predstavljati primjerke za učenje slučajnim redoslijedom*. Slučajni redoslijed čini pretraživanje u prostoru težina stohastičkim procesom tijekom ciklusa učenja.

Za dani skup uzoraka za učenje, učenje propagacijom unatrag može se tako nastaviti na jedan od dva osnovna načina:

1. *Sekvencijalni način* učenja propagacijom unatrag također se naziva i **on-line** ili *stohastički* način učenja. U ovom obliku učenja, težine se prilagođavaju nakon predstavljanja svakog uzorka za učenje; upravo je ovakav način učenja prikladan za izloženi algoritam propagacije unatrag. Detaljnije, pogledajmo epohu sa N primjeraka za učenje (uzoraka) poredanih u obliku uređenih parova $(\mathbf{x}(1), \mathbf{d}(1)), \dots, (\mathbf{x}(N), \mathbf{d}(N))$. Prvi primjerak $(\mathbf{x}(1), \mathbf{d}(1))$ u epohi predstavlja se mreži, te se obavlja niz izračunavanja prolaskom unaprijed i unatrag koji rezultiraju određenim promjenama sinaptičkih težina i početnih pomaka čvorova mreže. Drugi primjerak $(\mathbf{x}(2), \mathbf{d}(2))$ u epohi predstavlja se mreži, te se ponavljaju potrebna izračunavanja koja dalje prilagođavaju sinaptičke težine i pomake. Proces se nastavlja sve dok se mreži ne predstavi i zadnji primjerak $(\mathbf{x}(N), \mathbf{d}(N))$.
2. *Grupni način učenja – batch mode* – naziv je za učenje prilikom kojeg se težine prilagođavaju *nakon* predstavljanja *svih* primjeraka za učenje koji čine jednu epohu. Za određenu epohu, funkcija cijene (*cost function*) definirana je kao prosječna kvadratna greška izraza (3.4) i (3.5), ponovljena u obliku

$$E_{av} = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N \sum_{j \in C} e_j^2(n) \quad (3.44)$$

gdje se signal greške $e_j(n)$ odnosi na izlaz neurona j za uzorak n a definiran je izrazom (3.3). Greška $e_j(n)$ jednaka je razlici između $d_j(n)$ i $y_j(n)$ koji predstavljaju j -ti element vektora željenog odziva $\mathbf{d}(n)$ i odgovarajuće vrijednosti vektora izlaza mreže $\mathbf{y}(n)$, respektivno. U izrazu (3.44) unutarnji zbroj po j vrši se po svim neuronima izlaznog sloja mreže, dok se vanjski zbroj po n vrši za cijeli skup za učenje u trenutnoj epohi. Za parametar brzine učenja η , prilagodba sinaptičke težine w_{ji} , koja povezuje neuron i s neuronom j , definirana je delta pravilom

$$\begin{aligned} \Delta w_{ji} &= -\eta \frac{\partial E_{av}}{\partial w_{ji}} \\ &= -\frac{\eta}{N} \sum_{n=1}^N e_j(n) \frac{\partial e_j(n)}{\partial w_{ji}} \end{aligned}$$

Prema gornjem izrazu, prilikom grupnog učenja prilagodba težine Δw_{ji} vrši se samo nakon što je cijeli skup za učenje predstavljen mreži.

Iz perspektive "on-line" učenja, sekvencijalni način učenja se preferira nad grupnim učenjem jer zahtijeva manje lokalnog prostora za pohranu svake sinaptičke veze. Štoviše, uz slučajni redoslijed predstavljanja uzoraka mreži, upotreba prilagodbi težina uzorak po uzorak čini pretraživanje prostora težina stohastičkim po prirodi. Time se smanjuje vjerojatnost da će algoritam propagacije unatrag biti zaglavljen u lokalnom minimumu.

Na isti način, stohastička priroda sekvencijalnog načina učenja čini težim definiranje teoretskih uvjeta za konvergenciju algoritma. Suprotno tome, upotreba grupnog načina učenja pruža točnu procjenu gradijentnog vektora; konvergencija u lokalni minimum je time zajamčena uz jednostavne uvjete. Također, sama kompozicija grupnog učenja pogodnija je paralelnom radu nego sekvencijalni način učenja.

Kada su podaci za učenje *redundantni* (tj. skup za učenje sadrži nekoliko kopija istog uzorka za učenje), tada sekvencijalno učenje može iskoristiti ovu redundantnost jer su primjerci prezentirani jedan po jedan. Ovo je posebice izraženo kod velikih i vrlo redundantnih skupova podataka.

Da zaključimo, unatoč činjenici da sekvencijalni, "on-line" način učenja ima određene nedostatke, vrlo je popularan (posebice pri rješavanju problema klasifikacije) iz dva praktična razloga:

- algoritam je relativno jednostavno implementirati
- pruža učinkovita rješenja velikih i teško rješivih problema

3.2.7. Uvjeti zaustavljanja

Općenito gledano, ne može se pokazati da algoritam propagacije unatrag konvergira, i ne postoje dobro definirani uvjeti zaustavljanja njegova rada. Ipak, postoje određeni razumni uvjeti, svaki sa svojim vlastitim praktičnim doprinosom, koji se mogu iskoristiti za zaustavljanje procesa prilagođavanja težina. Kako bi formulirali takav uvjet, logično je razmišljati u terminima jedinstvenih svojstava *lokalnog* i *globalnog minimuma* površine greške. Neka vektor težina \mathbf{w}^* označava minimum, lokalni ili globalni. Nužni uvjet za minimum \mathbf{w}^* je da gradijentni vektor $\mathbf{g}(\mathbf{w})$ (tj. parcijalna derivacija prvog reda) površine greške u odnosu na vektor težina \mathbf{w} bude jednak nuli pri $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$. Sukladno tome, može se oblikovati razumni uvjet konvergencije algoritma propagacije greške unatrag (Kramer i Sangiovanni-Vincentelli, 1989²⁰):

Smatra se da algoritam propagacije unatrag konvergira kada euklidska norma gradijentnog vektora dostigne dovoljno mali gradijentni prag.

Nedostatak ovog uvjeta konvergencije je taj da pri uspješnom treniranju mreže, vrijeme učenja može biti dosta dugo. Također, potrebno je izračunavati gradijentni vektor $\mathbf{g}(\mathbf{w})$.

Drugo jedinstveno svojstvo minimuma koje se može iskoristiti je činjenica da se funkcija cijene ili mjera greške $E_{av}(\mathbf{w})$ ne mijenja u točki $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$. Može se tako predložiti drukčiji uvjet konvergencije:

Smatra se da algoritam propagacije unatrag konvergira kada je apsolutni iznos promjene prosječne kvadratne greške po epohi dovoljno malen.

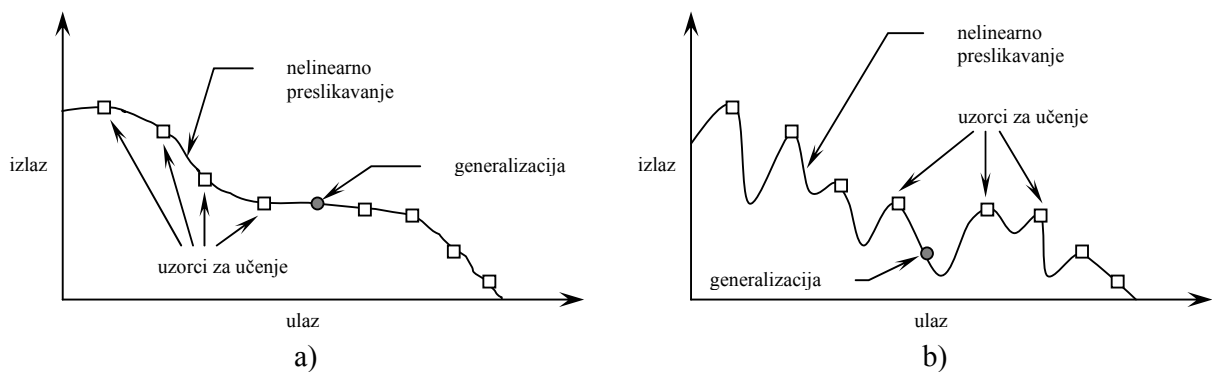
Iznos promjene prosječne kvadratne greške tipično se smatra dovoljno malenim ako je unutar intervala od 0.1% do 1% po epohi. Ponekad se koristi i iznos od 0.01% po epohi. Nažalost, ovaj uvjet može rezultirati u preranom zaustavljanju procesa učenja.

Postoji i drugi koristan i teorijski utemeljen uvjet konvergencije. Nakon svake iteracije učenja, mreža se testira s obzirom na performanse u generalizaciji. Proces učenja se zaustavlja kada je generalizacija mreže zadovoljavajuća.

3.3. Generalizacija

Pri učenju algoritmom propagacije unatrag, tipično započinjemo uzorkom za učenje te algoritmom propagacije greške unatrag izračunamo sinaptičke težine višeslojnog perceptrona, puneći mrežu ostalim uzorcima za učenje. Kaže se da mreža dobro *generalizira* kada je ulazno-izlazno preslikavanje dobiveno mrežom točno za testne uzorke koji nisu korišteni u procesu učenja mreže; pojam "generalizacija" posuđen je iz psihologije.

Proces učenja (treniranje neuronske mreže) može se promotriti kao proces ulazno-izlaznog preslikavanja. Mreža provodi korisnu interpolaciju stoga što višeslojni perceptroni s kontinuiranom aktivacijskom funkcijom daju i izlaz kao kontinuiranu funkciju.



Slika 16. a) Dobra generalizacija; b) slaba generalizacija (mreža je pretrenirana) [3]

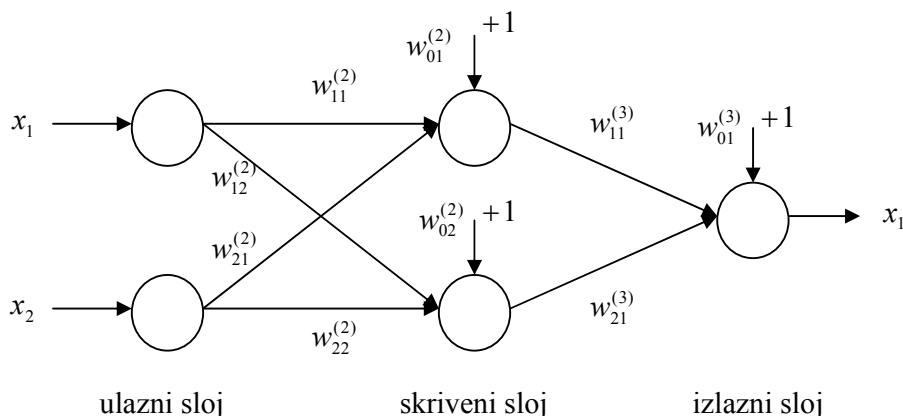
Slika 16. prikazuje dvije generalizacije hipotetske mreže. Nelinearno ulazno-izlazno preslikavanje prikazano krivuljom rezultat je uzoraka za učenje. Uzorak označen sa "generalizacija" predstavlja interpolaciju mreže. Neuronska mreža koja dobro generalizira proizvest će točno ulazno-izlazno preslikavanje i u slučaju kada je ulaz mreže nešto drukčiji od uzoraka za učenje, kao što je prikazano na slici. No kada mreža nauči previše ulazno-izlaznih primjera, događa se da su neki uzorci za učenje zapamćeni (memorizirani). Ova se pojava naziva pretreniranjem (*overtraining*) mreže. Kada je mreža pretrenirana gubi mogućnost generaliziranja između sličnih ulazno-izlaznih uzoraka.

3.4. Sažetak algoritma propagacije unatrag

1. Definiraj arhitekturu mreže i postavi težine na inicijalnu vrijednost. Često se koriste slučajne vrijednosti iz intervala od -0.3 do $+0.3$.
2. Predstavi (prezentiraj) ulazni vektor i odgovarajući željeni odziv.
Za svaki čvor u svakom skrivenom sloju i u izlaznom sloju, odredi zbroj umnožaka težina i ulaza u svaki čvor, te izlaz svakog čvora. Tako je za čvor j u sloju s zbroj umnožaka težina i ulaza jednak $I_j^{(s)} = \sum w_{ji}^{(s)} x_i^{(s)}$ gdje je zbroj po svim ulazima u j -ti čvor. Izlaz j -tog čvora je $y_j = \text{sig}(I_j^{(s)})$, tj. sigmoidalna funkcija zbroja $I_j^{(s)}$.
3. Prilagodi težine počevši od izlaznog sloja unatrag prema ulaznom sloju.
Težine veza prema sloju s mijenjaju se prema:
$$w_{ji}^{(s)} = w_{ji}^{(s)} + \Delta w_{ji}^{(s)}, \text{ uz } \Delta w_{ji}^{(s)} = \eta e_j^{(s)} x_i^{(s-1)}$$
(uz upotrebu momenta u svrhu izbjegavanja lokalnog minimuma vrijedi
$$\Delta w_{ji}^{(s)}(n) = \eta e_j^{(s)}(n) x_i^{(s)}(n) + \alpha \Delta w_{ji}^{(s)}(n-1)$$
Pritom je:
 - za izlazne čvorove: $e_j^{(s)} = y_j^{(s)}(1 - y_j^{(s)})(d_j^{(s)} - y_j^{(s)})$ gdje je d_j željeni odziv,
 y_j dobiveni odziv
 - za skrivene čvorove: $e_j^{(s)} = y_j^{(s)}(1 - y_j^{(s)})\left(\sum e_k^{(s+1)} w_{kj}^{(s+1)}\right)$, gdje je zbroj po čvorovima u $s+1$ sloju.
4. Predstavi mreži svaki uzorak iz skupa za učenje i ponovi 2. i 3. korak.
5. Kada su iskorišteni svi uzorci za učenje, proces se ponavlja od 2. koraka sve dok nije zadovoljen određeni uvjet. To može biti npr. broj ciklusa (epoha) učenja, ili kada promjene težina postanu minimalne, ili kada se postigne maksimalna razlika između bilo kojeg dobivenog izlaza i željenog odziva manja od određene vrijednosti.

3.5. Primjer algoritma propagacije unatrag za funkciju EKSKLUZIVNO-ILI

Za problem implementacije XOR (*exclusive-or*) funkcije, prikladan je troslojni perceptron sa 2x2x1 neurona (slika 17.).



Slika 17. Troslojni perceptron za XOR funkciju

Za određene kombinacije ulaza x_1 i x_2 , mreža treba davati izlaz y prema tablici 3.

x_1	x_2	$y = x_1 \oplus x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tablica 3. Vrijednosti XOR funkcije

Neka su zadani početni, proizvoljni težinski faktori $w_{ij}^{(s)}$:

$$\begin{array}{lll}
 w_{01}^{(2)} = 0.862518 & w_{02}^{(2)} = 0.834986 & w_{01}^{(3)} = 0.036498 \\
 w_{11}^{(2)} = -0.155797 & w_{12}^{(2)} = -0.505997 & w_{11}^{(3)} = -0.430437 \\
 w_{21}^{(2)} = 0.282885 & w_{22}^{(2)} = -0.864449 & w_{21}^{(3)} = 0.481210
 \end{array}$$

Aktivacijska funkcija neurona je sigmoida, tj. izlaz pojedinog neurona jednak je $out = \frac{1}{1 + e^{(-net)}}$

	skriveni sloj		
	ulazi	net	izlaz
neuron 1	+1	0.862518	0.7031864
	0		
	0		

neuron 2	+1	0.834986	0.6974081
	0		
	0		
izlazni sloj			
	ulazi	net	izlaz
neuron 1	+1	0.0694203	0.5173481
	0.7031864		
	0.6974081		

Sa zadanim početnim vrijednostima težina i sa ulazom (0,0) dobivena vrijednost na izlazu je 0.5173481. Zatim se računa gradijent δ za svaki neuron, počevši od izlaznog sloja:

$$\delta_1^{(3)} = out_1^{(3)}(1 - out_1^{(3)})(d - out_1^{(3)}) = -0.1291813$$

$$\delta_1^{(2)} = out_1^{(2)}(1 - out_1^{(2)})w_{11}^{(3)}\delta_1^{(3)} = 0.0116054$$

$$\delta_2^{(2)} = out_2^{(2)}(1 - out_2^{(2)})w_{21}^{(3)}\delta_1^{(3)} = -0.0131183$$

Slijedi da uz $\eta = 0.5$ promjene težina iznose:

$$\Delta w_{01}^{(2)} = \eta \delta_1^{(2)} x_{01}^{(2)} = 0.5 \cdot 0.0116054 \cdot 1 = 0.0058027$$

$$\Delta w_{11}^{(2)} = \eta \delta_1^{(2)} x_{11}^{(2)} = 0.5 \cdot 0.0116054 \cdot 0 = 0$$

$$\Delta w_{21}^{(2)} = \eta \delta_1^{(2)} x_{21}^{(2)} = 0.5 \cdot 0.0116054 \cdot 0 = 0$$

$$\Delta w_{02}^{(2)} = \eta \delta_2^{(2)} x_{02}^{(2)} = 0.5 \cdot (-0.0131183) \cdot 1 = -0.0065592$$

$$\Delta w_{12}^{(2)} = \eta \delta_2^{(2)} x_{12}^{(2)} = 0.5 \cdot (-0.0131183) \cdot 0 = 0$$

$$\Delta w_{22}^{(2)} = \eta \delta_2^{(2)} x_{22}^{(2)} = 0.5 \cdot (-0.0131183) \cdot 0 = 0$$

$$\Delta w_{01}^{(3)} = \eta \delta_1^{(3)} x_{01}^{(3)} = 0.5 \cdot (-0.1291812) \cdot 1 = -0.0645906$$

$$\Delta w_{11}^{(3)} = \eta \delta_1^{(3)} x_{11}^{(3)} = 0.5 \cdot (-0.1291812) \cdot 0.7031864 = -0.0454192$$

$$\Delta w_{21}^{(3)} = \eta \delta_1^{(3)} x_{21}^{(3)} = 0.5 \cdot (-0.1291812) \cdot 0.6974081 = -0.0450460$$

Novo težine sada iznose:

$$w_{01}^{(2)} = 0.868321 \quad w_{02}^{(2)} = 0.828427 \quad w_{01}^{(3)} = -0.028093$$

$$w_{11}^{(2)} = -0.155797 \quad w_{12}^{(2)} = -0.505997 \quad w_{11}^{(3)} = -0.475856$$

$$w_{21}^{(2)} = 0.282885 \quad w_{22}^{(2)} = -0.864449 \quad w_{21}^{(3)} = 0.436164$$

Mreži se sada predstavlja novi uzorak (0,1) i cijeli postupak izračunavanja promjena težina se ponavlja. Učenje se nastavlja sve dok greška između željenog i dobivenog izlaza mreže ne bude manja od neke prethodno određene vrijednosti, kada se postupak učenja zaustavlja.

U ovom primjeru, mreža konvergira ka rješenju. Nakon nekoliko tisuća iteracija težine iznose:

$$w_{01}^{(2)} = -6.062263 \quad w_{02}^{(2)} = -4.893081 \quad w_{01}^{(3)} = -9.792470$$

$$w_{11}^{(2)} = -6.072185 \quad w_{12}^{(2)} = -4.894898 \quad w_{11}^{(3)} = 9.484580$$

$$w_{21}^{(2)} = 2.454509 \quad w_{22}^{(2)} = 7.293063 \quad w_{21}^{(3)} = -4.473972$$

Uz ove vrijednosti težina, mreža za određeni ulaz daje izlaz:

x_1	x_2	y
0	0	0.017622
0	1	0.981504
1	0	0.981491
1	1	0.022782

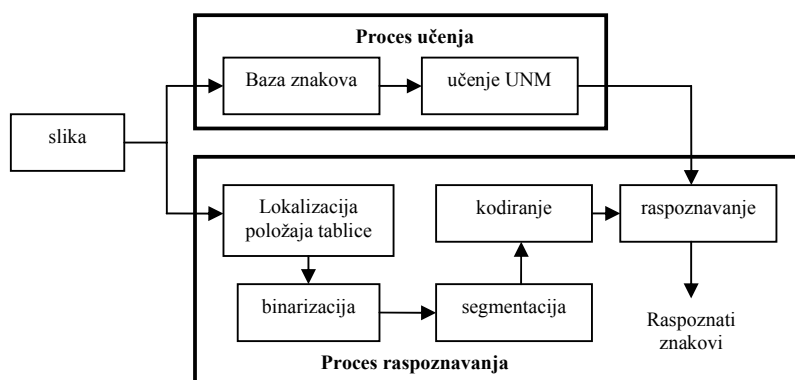
Tablica 4. Izlaz mreže za dane ulaze

Dobiveni izlazi (tablica 4.) dovoljno su blizu idealnim vrijednostima (tablica 3). Primjer zorno pokazuje kako algoritam propagacije greške unatrag pronalazi potrebni skup težina za XOR funkciju, uz dobro definiranu i prikladnu strukturu mreže. Prikladna struktura je ona kod koje je odabran točan broj slojeva i neurona u pojedinom sloju, kojima se može implementirati funkcija *ekskluzivno-ili*.

4. Pregled postupaka raspoznavanja brojčano-slovčanih znakova koji se temelje na uporabi MLP-a

4.1. Automatski sustav za lokalizaciju i raspoznavanje znakova tablica vozila [5]

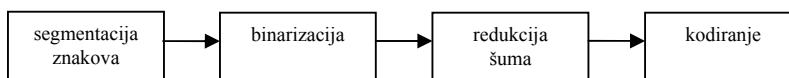
Jedan od postupaka raspoznavanja brojčano-slovčanih znakova registarskih tablica, koji se temelji na uporabi višeslojnog perceptrona primijenjen je na prethodno kodirane znakove koji čine ulaz u MLP modul za raspoznavanje. Raspoznavanje znakova tablica pomoću MLP-a, uz prethodno kodiranje, dio je *Automatskog sustava za lokalizaciju i raspoznavanje znakova tablica vozila* [5].



Slika 18. Sustav za raspoznavanje tablica vozila [5]

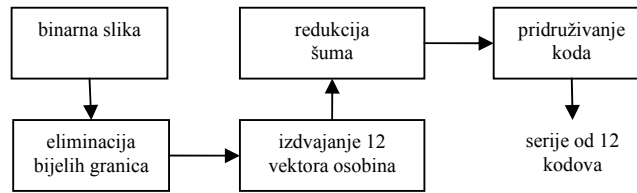
Blok shema sustava (slika 18.) sastoji se od dva osnovna procesa: *procesa učenja* i *procesa raspoznavanja*. Proces učenja sastoji se uglavnom od stvaranja baze kodiranih znakova tablica i učenja višeslojne neuronske mreže korištene za identifikaciju. Proces raspoznavanja sastoji se od lokalizacije tablice vozila unutar slike vozila, binarizacije tablice, segmentacije simbola (brojčano-slovčanih znakova), kodiranja segmentiranih simbola i raspoznavanja znakova korištenjem MLP-a, čiji su parametri definirani u procesu učenja.

Tijekom **procesa učenja** stvorena je baza kodiranih znakova tablica (slika 19.)



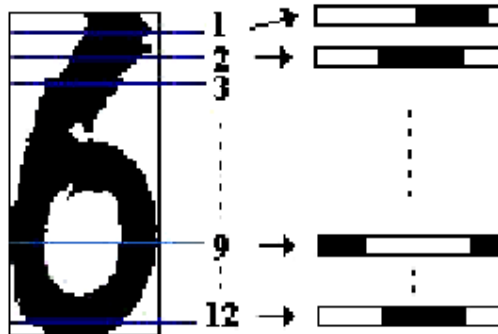
Slika 19. Stvaranje baze znakova [5]

Sam proces kodiranja izoliranih brojčano-slovčanih znakova prikazan je po fazama na slici 20.

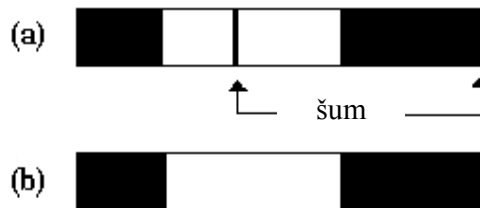


Slika 20. Proces kodiranja segmentiranih znakova [5]

Nakon binarizacije uzorka, i eliminacije bijelih granica, izdvaja se 12 karakterističnih linija (slika 21.) od kojih se svaka sastoji od niza bijelih piksela (vrijednost 1) i niza crnih piksela (vrijednost 0), koji generiraju vektor binarnih vrijednosti. Tako je svaki uzorak opisan sa 12 vektora binarnih vrijednosti. Prije samog pridruživanja kodova, provodi se i redukcija šuma kod koje se eliminiraju slučajne pojave kraćih nizova crnih ili bijelih piksela (slika 22.)

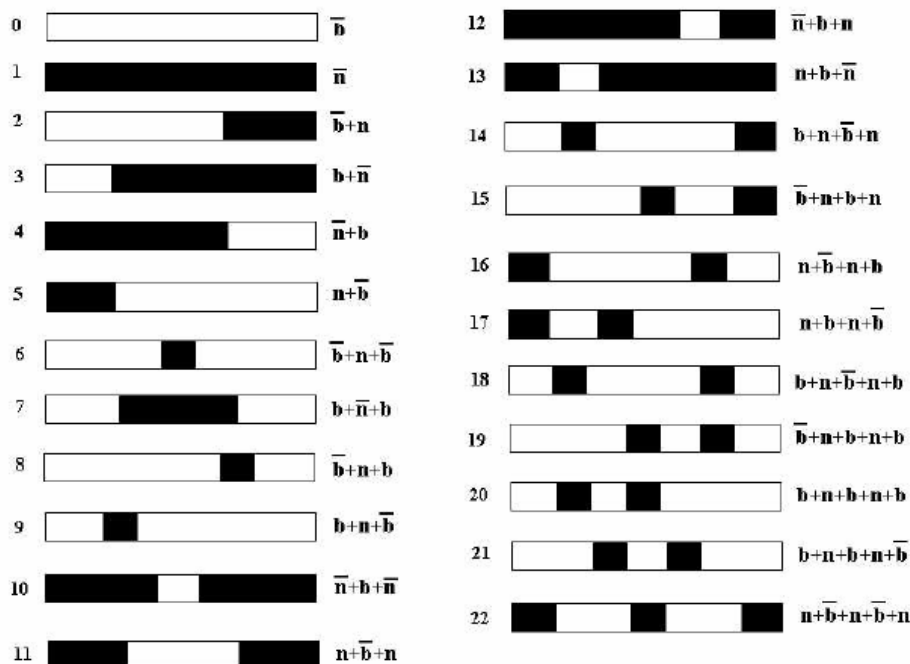


Slika 21. 12 vektora binarnih vrijednosti dobivenih izdvajanjem 12 linija slike znaka [5]



Slika 22. Princip uklanjanja šuma (a) linija sa šumom (b) linija nakon uklanjanja šuma [5]

Nakon uklanjanja šuma, svaki vektor uspoređuje se sa 23 koda (slika 23.) gdje su redovi kodirani ovisno o kombinaciji crno-bijelih nizova. Simboli ' $n+b+n$ ', ' $b+n+d$ ' sa desne strane svakog koda označavaju kombinaciju svakog niza, gdje je ' n ' oznaka za niz crnih, a ' b ' za niz bijelih piksela. Tako npr. ' $n+b+n$ ' označava kombinaciju niza crnih, zatim bijelih, pa opet crnih piksela. Simboli \bar{n} i \bar{b} označavaju da u dotičnoj kombinaciji nizova upravo taj niz ima veću duljinu od ostalih u kombinaciji. Tako npr. kodovi 8 i 9 imaju istu kombinaciju, no u kodu 8 prvi bijeli niz je dulji, dok je u kodu 9 dulji drugi niz bijelih piksela. Ovakova primjena kodiranja omogućuje razlikovanje između znakova sa određenim sličnostima, primjerice 1 i 7 ili U i V.



Slika 23. Kodovi korišteni za kodiranje znaka tablice [5]

Slika 24. prikazuje 4 različita uzorka simbola 7, a tablica 5. pokazuje rezultate kodiranja za prikazana četiri uzorka.



Slika 24. Uzorci broja 7 pribavljeni sa 4 različite tablice [5]

uzorak	kodovi											
1	1	2	8	8	8	8	6	9	9	9	7	9
2	1	1	3	8	8	7	9	9	9	9	9	9
3	1	1	8	8	8	6	9	9	9	9	9	9
4	1	2	8	8	8	6	9	9	9	9	9	9

Tablica 5. Nizovi kodova gore prikazana 4 uzorka broja 7 [5]

Korištenjem kodova generiranih u prethodnim procesima kao uzorcima za učenje, treniraju se dva višeslojna preceptrona, jedan za raspoznavanje 10 znamenaka a drugi za raspoznavanje 23 slova abecede korištene na registarskim tablicama [5].

Struktura prvog MLP-a je: 12 neurona u ulaznom sloju, 10 u skrivenom sloju i 10 neurona u izlaznom sloju. Drugi MLP sastoji se od 12 neurona ulaznog sloja, 15 neurona u skrivenom sloju i 23 u izlaznom sloju. Ovdje 12 neurona u prvim slojevima višeslojnih perceptrona odgovara 12 elemenata (kodova) korištenih za kodiranje pojedinog uzorka, dok 10 i 23 neurona izlaznog sloja predstavlja 10 brojeva i 23 slova koja mreža raspoznaje.

4.2. Korištenje višeslojnog perceptrona za raspoznavanje rukom pisanih slovnih znakova [6]

Višeslojni perceptron koristi se i u postupku raspoznavanja rukom pisanih znakova (*optical character recognition – OCR*). Cijeli sustav je vrlo složen i obuhvaća razne faze pretprocesiranja i obrade uzoraka, a u svrhu ovoga prikaza od interesa je neposredni prethodni korak izdvajanja osobina uzoraka i sam proces raspoznavanja korištenjem MLP-a.

Nakon digitalizacije dokumenata sa tekstem za raspoznavanje, prethodnog stanjivanja linija pojedinog znaka slijedi izdvajanje značajki (osobina, *features*) [6].

Zadnja faza izdvajanja značajki uključuje njihov odabir. Početni skup podataka uzorkovan za raspoznavanje znakova sastoji se od ukupno 1115 uzoraka za 52 klase [6]. Otprilike je 21 uzorak svake klase ekvivalentan ukupnom broju od 21 različitog pisca (autora pisanog alfanumeričkog znaka). Kvaliteta znakova varira od lošeg i slabo čitljivog rukopisa, sve do vrlo preglednog i jasnog teksta.

Kako bismo razumjeli građu uzorka, potrebno je razjasniti kako se obrađuje slika pojedinog znaka. Za svaku sliku znaka, prvo se pronađu slobodni krajevi. Pokretni okvir fiksne veličine koristi se za prolazak cijelom slikom i pronađeni primitivi (točka prekida, ravna linija, krivulja, i sl.) (slika 25.) u različitim položajima okvira pohranjuju se korištenjem stoga. Kada se nađe jedan od primitiva, sustav slijedno bilježi njegov kod prilikom pomicanja okvira iz jednog položaja u drugi. U nekim položajima prozora gdje nema primitiva, sustav bilježi "prazan" kod. Uzorak je tako u osnovi niz primitiva nađenih slijednim pomicanjem okvira.

linija	—	/		\
otvorena krivulja	∪	∩	∪	∩
zatvorena krivulja	○			

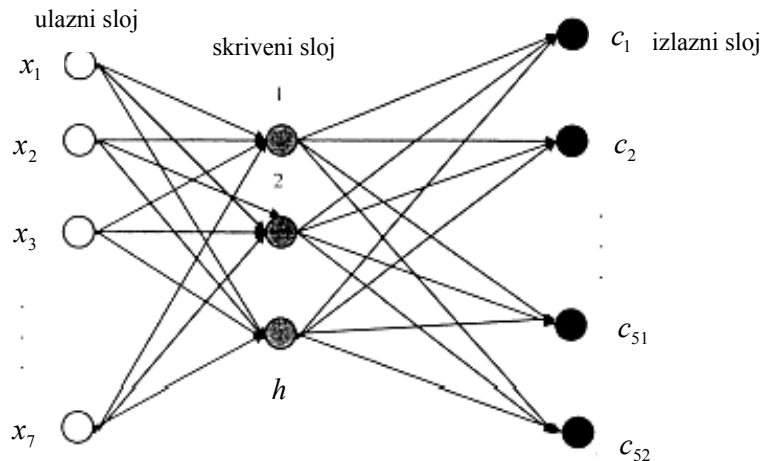
Slika 25. Primitivi osobina korišteni u ovom sustavu [6]

Tako je za učenje neuronske mreže prikupljeno ukupno 7 ulaznih varijabli koje označavaju prisutnost spomenutih primitiva. Za vektor $P = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$, x_i predstavlja kod primitiva nađenog u i -tom položaju pokretnog okvira. Svaka klasa u postupku raspoznavanja znakova predstavlja pojedino slovo abecede sa prvih 26 klasa koje predstavljaju mala slova (a÷z) i drugih 26 klasa koje predstavljaju velika slova (A÷Z) [6].

Podaci su sada pripremljeni za analizu neuronskom mrežom. Varijable su skalirane na vrijednosti u intervalu $[0,1]$ za dobro učenje, čime je osigurano da različite ulazne varijable mjerene na različitim različitostima igraju jednaku ulogu u procesu učenja. Za svaki ulazni vektor $P = \{x_1, x_2, \dots, x_7\}$, željeni izlaz predstavljen je kao vektor $\{t_1, t_2, \dots, t_{52}\}$. Ovdje x_i ($1 \leq i \leq 7$) predstavlja i -to ulazno mjerenje a t_j ($1 \leq j \leq 52$) je željeni izlaz mreže sa učenje s učiteljem (nadgledano učenje). Na primjer, ako je $t_1 = 1$ a svi ostali t_j su 0, tada je ulazni uzorak 'a'. Slično, ako je $t_2 = 2$ i svi ostali t_j su 0, tada ulazni uzorak predstavlja 'b'. Podaci konačno predstavljeni

neuronskoj mreži u procesu učenja sastoje se od 1115 ulaznih uzoraka sa pripadnim željenim odzivima.

Za raspoznavanje znakova korištena je višeslojna neuronska mreža – višeslojni perceptron (MLP) čija je struktura prikazana na slici 26.



Slika 26. Višeslojni perceptron 7 x 120 x 52 arhitekture za rješavanje problema raspoznavanja rukom pisanih znakova [6]

MLP korišten u ovom sustavu može se opisati kao $7 \times h \times 52$ konfiguracija, gdje h predstavlja ukupni broj čvorova (neurona) skrivenog sloja mreže. 7 je broj ulaznih varijabli a 52 predstavlja ukupni broj izlaznih klasa [6].

Eksperimentalnom analizom utvrđeno je da je za ovaj konkretni problem raspoznavanja znakova potrebno 120 čvorova skrivenog sloja ($h=120$), uz najmanju grešku generalizacije. Pri odabiru prikladne arhitekture mreže, korišten je postupak učenja algoritmom propagacije unatrag sa momentom. Ova je metoda odabrana radi svoje jednostavnosti i zato što je uspješno primijenjena na niz prethodnih problema raspoznavanja. Algoritam koristi dva eksperimentalno određena parametra, brzinu učenja η i moment μ . Eksperimentima i smjernicama iz literature odlučeno je da sustav koristi $\eta = 0.77$ i $\mu = 0.9$ [6].

4.3. Neizraziti višeslojni perceptron [7]

Obično, u konvencionalnim višeslojnim perceptronima (Rumelhart *et al.* 1986¹⁷, Haykin 1998 [3]), broj čvorova u ulaznom sloju odgovara broju klasa uzoraka. U takvoj neuronskoj mreži, "metoda pobjednika" ("*winner-take-all*" metoda koja pridružuje 1 *pobjedničkom* neuronu, a 0 svima ostalima) može se koristiti tijekom faze učenja mreže. Za razliku od ovog klasičnog MLP-a, neizraziti MLP pridružuje željene vrijednosti pripadnosti (određene ugradnjom i primjenom koncepata neizrazitog računarstva) izlaznim čvorovima tijekom postupka učenja, umjesto odabiranja binarnih vrijednosti kao u metodi pobjednika (Pal i Mitra 1992)²¹. Zatim se greške propagiraju unatrag mrežom u odnosu na željene vrijednosti pripadnosti kao neizraziti željeni odziv mreže. Ovaj postupak omogućuje mreži da učinkovitije klasificira neizrazite uzorke sa preklapajućim granicama klasa. U neizrazitom modelu MLP-a, predloženom od (Pal i Mitra)²¹, metoda izračunavanja neizrazitog željenog odziva označena je prikladnom za obradu slika sa sivim razinama i slika u boji. S druge strane, alternativni način proračunavanja neizrazitog željenog izlaza za neizraziti MLP opisan je u Canuto *et al.* (1999)²². Za razliku od prethodne metode, ova je metoda prikladna za binarne uzorke.

Neizraziti MLP predložen u Canuto *et al.* (1999)²² dodaje parametar u jednadžbu promjene težinskih faktora veza među neuronima. Ovaj parametar opisuje stupanj neodređenosti, nejasnosti uzorka tijekom procesa učenja i time omogućuje izbjegavanje situacija gdje nejasni uzorci uzrokuju preveliki utjecaj na proces promjene težina. Osnovna je ideja proračunati iznos razlike između vrijednosti pripadnosti najviše klase i vrijednosti pripadnosti druge najviše klase. U Canuto *et al.*²² dolazi se do zaključka da neizraziti MLP postiže bolje performanse od klasičnog, konvencionalnog MLP-a pri raspoznavanju rukom pisanih znamenaka.

5. Opis programskog sustava za raspoznavanje i klasifikaciju registarskih tablica

5.1. Slikovna baza registarskih tablica

Slikovnu bazu registarskih tablica čini 512 snimaka automobila, tj. vozila snimljenih u različitim uvjetima (za suhog vremena, po danu, u sumrak, za kišnog i tmurnog vremena). Sve su fotografije snimljene digitalnim fotoaparatom OLYMPUS C-MEDIA C-2040 ZOOM. Veličina pojedine snimke je 640x480 piksela (slikovnih elemenata), u JPEG formatu. Za potrebe prikaza u ovome radu prikazane slike su smanjene.

Slikovnu bazu čine uglavnom snimke automobila, uz nekoliko snimaka kamiona tj. teretnih vozila te "kombija" odnosno vozila za prijevoz robe, i autobusa.

Primjeri snimaka iz slikovne baze:



dobri uvjeti, suho vrijeme



"neregularne" oznake država, više različitih naljepnica



slabo vidljive registarske tablice (sjena)



slabo vidljive registrarske tablice (sjena)



tablice drugih boja znakova i pozadine



prljave tablice



kiša, lošiji uvjeti snimanja



mrak (slikanje uz uličnu rasvjetu)



kosi snimci



vozila bez oznake države, vozila s reklamama



kamioni, autobusi

5.2. Predobrada slika

Predobrada snimaka (slika 27.) iz slikovne baze započinje primjenom jedne od metoda pretvaranja slike u boji u sliku sa sivim tonovima (sive "razine"). Na slike je primjenjena metoda globalnog rastezanja kontrasta ("End-in search" metoda) što uglavnom daje dosta dobre rezultate u smislu poboljšanja vidljivosti registarskih pločica i naljepnica sa oznakom država. Navedena metoda rastezanja kontrasta radi na principu da se zadani postotak ($k=15$) najtamnijih slikovnih elemenata u slici preslikaju u crno (vrijednost 0), a isti taj postotak najsvjetlijih slikovnih elemenata u bijelo (vrijednost 255). Nad ostalim sivim razinama provodi se klasično rastezanje kontrasta prema formuli:

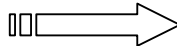
$$\text{nova_siva_razina} = 255 \cdot \frac{\text{siva_razina} - \text{min}}{\text{max} - \text{min}}$$

gdje su *min* i *max* najmanja i najveća siva razina prisutna u slici.

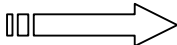
Primjeri snimaka* nakon pretvaranja u sive razine:



ContrastStretch(15)



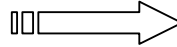
ContrastStretch(15)



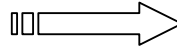
* prikazane slike sa sivim razinama rezultat su rada kolegice Vlaste Srebrić, op.a.



ContrastStretch(15)



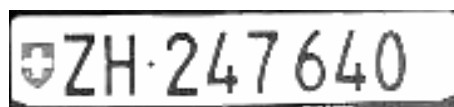
ContrastStretch(15)

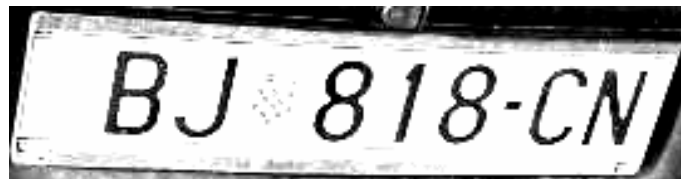


Slijedeću fazu u postupku pretprocesiranja čini ručno izdvajanje ("crop") područja sa slike koje sadrži naljepnicu oznake države (ako takove ima) i samu registarsku tablicu. Izdvajanje željenog područja izvedeno je pomoću programskog sustava za obradu slike *ADOBE Photoshop 7.0*®, korištenjem alata *Crop Tool*.

Postupak je ponovljen za svaku sivu sliku iz slikovne baze.

Primjeri rezultata ručnog izdvajanja područja registarske tablice i naljepnice države (primjeri su originalne veličine te se može uočiti da nisu sve tablice i naljepnice jednakih dimenzija – neka su vozila snimljena izbliza, neka iz malo daljega):



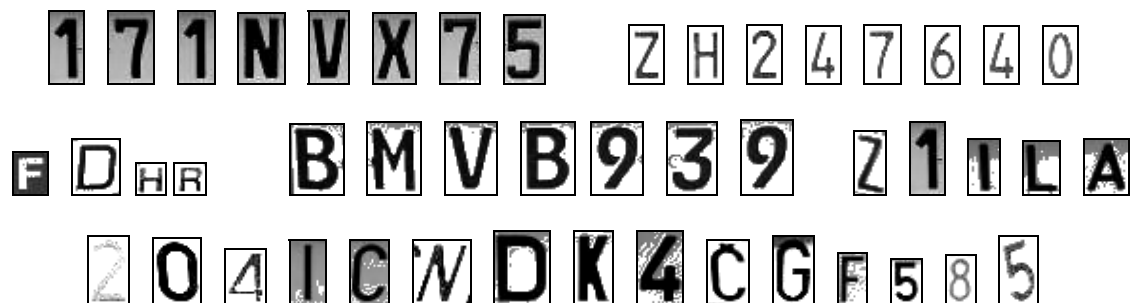


primjeri ručno izdvojenih područja sa registarskim tablicama

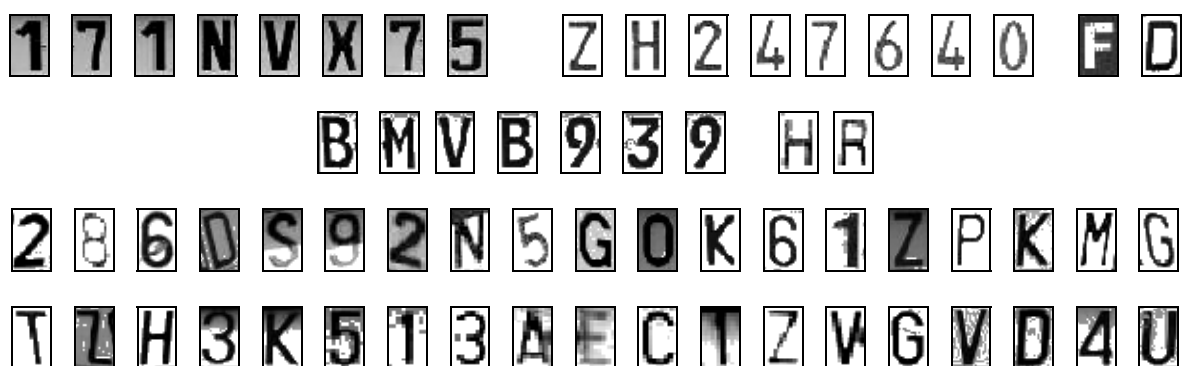


primjeri ručno izdvojenih naljepnica – oznaka države

Zatim je sa svake ovako dobivene slike ručno izoliran svaki (potencijalni) alfanumerički znak originalne veličine (neki su znakovi manji, neki veći), bez rotiranja kosih znakova:

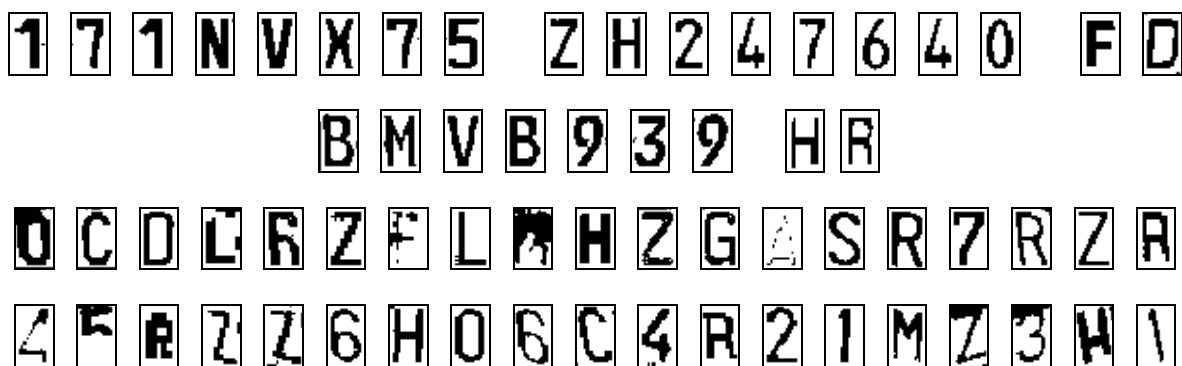


Nakon toga svi su znakovi normalizirani na veličinu 20x32 piksela pomoću već spomenutog programskog sustava.



Sada su svi znakovi jednakih dimenzija.

Zadnju fazu predobrade slika čini, ponovno, ručno (znak po znak) binariziranje svakog pojedinog znaka (poluautomatizirani proces u programskom sustavu *ADOBE PhotoShop 7.0*). Pri binarizaciji tj. pretvaranju znaka u crne i bijele piksele ručno je određen najpogodniji prag (*threshold value*) za sve znakove pojedine tablice odnosno naljepnice zemlje. Time je postignuto da su neki znakovi vidljiviji nakon binarizacije nego na izdvojenoj tablici, no također neki su znakovi, posebno nakon povećanja na 20x32 piksela, postali manje raspoznatljivi.



primjeri uzoraka znakova spremnih za predstavljanje MLP-u



primjeri pripremljenih uzoraka znakova

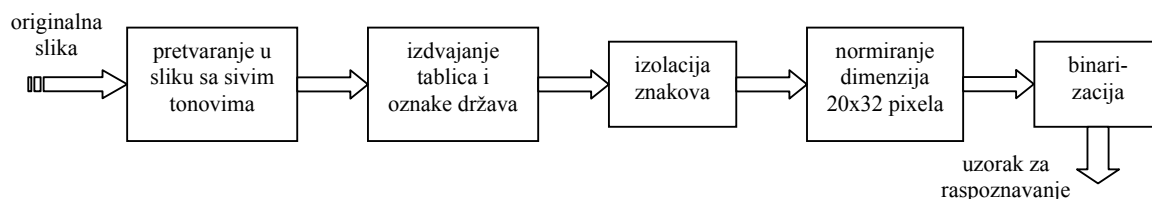
Od primjene jedinstvenog praga binarizacije svih znakova se odustalo jer bi se time uvelike smanjio skup ljudskom oku koliko toliko prepoznatljivih znakova. Na ovaj način dobiven je skup od 4.243 uzorka alfanumeričkih znakova – pretvorenih prethodno opisanim postupcima u crno-bijele slike (*bitmape*) i spremnih za daljnji postupak raspoznavanja i klasifikacije.

Neke uzorke bilo je još potrebno i invertirati (primjerice bijela slova znakova države na tamnoj podlozi – prozirne naljepnice), što je izvedeno alatom *Invert* spomenutog programskog sustava za obradu slike.



primjeri uzoraka prije invertiranja

Nakon inverzije bijelih slikovnih elemenata u crne, i obrnuto, uzorci su sada bili spremni za daljnji proces klasifikacije.



Slika 27. Proces predobrade snimaka slikovne baze

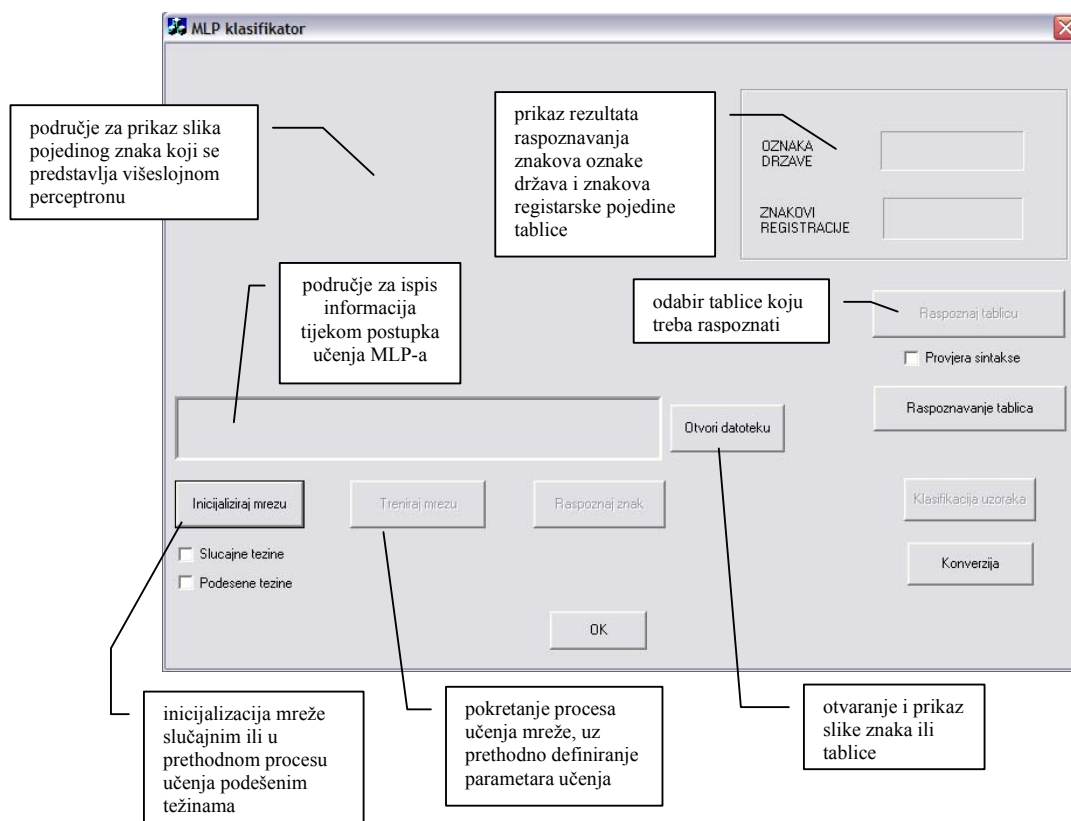
Kao što je vidljivo sa slike 27., predobrada slika vrlo je bitan, opsežan i složen proces u cijelom sustavu automatskog raspoznavanja i klasifikacije brojčano-slovčanih znakova oznaka države i registarskih tablica vozila.

Uspjeh daljnjeg postupka učenja i raspoznavanja podosta ovisi o kvaliteti pripremljenih uzoraka, ali i o njihovoj kvantiteti. Što je više uzoraka uspješno izolirano i predobrađeno, to je veća vjerojatnost ispravnog raspoznavanja različitih uzoraka istih znakova.

5.3. Programska izvedba višeslojnog perceptrona

Višeslojni perceptron implementiran je korištenjem *Microsoft Visual C++ 6.0*™ razvojnog programskog okruženja, na principima i smjernicama objektno orjentiranog programiranja (OOP). Navedeno razvojno programsko okruženje omogućuje uporabu MFC klasa (*Microsoft Foundation Classes*™) kao posebnog skupa objektnih klasa prikladnih za implementaciju različitih problema. Tako su upravo MFC klase poslužile kao programski okvir za implementaciju višeslojnog perceptrona.

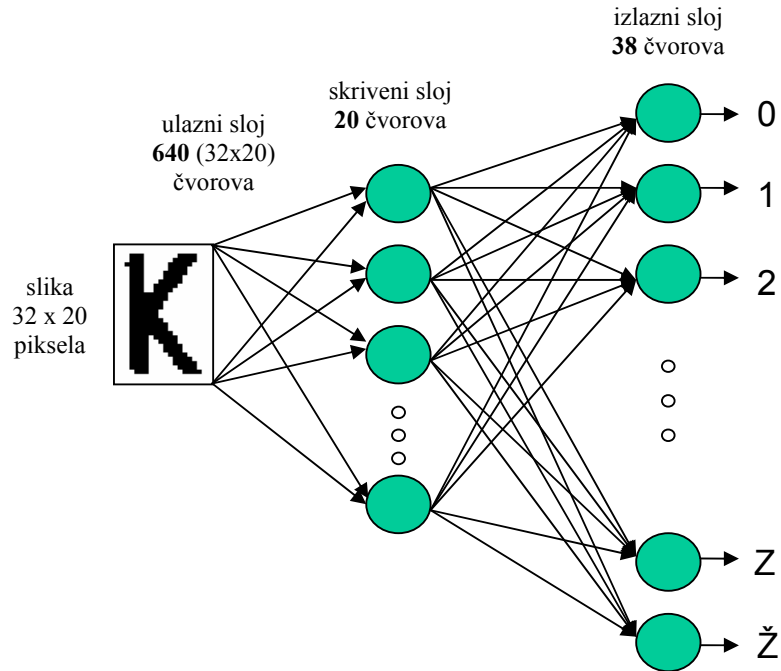
Programski sustav za raspoznavanje i klasifikaciju registarskih tablica uporabom višeslojnog perceptrona izveden je u obliku dijaloških prozora – glavna dijaloška forma (glavni prozor) predstavlja osnovni okvir – kostur - programa (slika 28.). Korištenjem pojedinih aktivnih dijaloških komponenti (gumba, područja za ispis teksta i iscrtavanje slika, *checkboxes* i sl.) izvedena je interakcija između programa i korisnika.



Slika 28. Osnovna dijaloška forma programske izvedbe MLP klasifikatora uz funkcionalni opis nekih elemenata sučelja

5.3.1. Struktura perceptrona

Višeslojna neuronska mreža korištena za raspoznavanje brojčano-slovčanih znakova predstavlja *troslojni perceptron* – acikličku potpuno povezanu troslojnu mrežu konfiguracije $640 \times 20 \times 38$ neurona po pojedinom sloju (slika 29.).



Slika 29. Struktura višeslojnog perceptrona

MLP korišten u ovom sustavu sastoji se, dakle, od 3 sloja – ulazni sloj od 640 ulaznih čvorova, srednji (skriveni) sloj od 20 neurona i izlazni sloj od 38 izlaznih čvorova mreže. Izlaz svakog čvora mreže predstavlja ulaz u sve čvorove slijedećeg sloja. Upravo ova karakteristika čini mrežu *potpuno povezanom* (svaki neuron jednog sloja povezan je sa svakim neuronom slijedećeg sloja). Mreža je *aciklička* utoliko što ne postoje direktne povratne veze među neuronima (primjerice, ne postoji veza izlaza skrivenog neurona sa ulazom u neuron prvog sloja). Indirektno, signal greške propagira se mrežom unatrag tijekom procesa učenja algoritmom propagacije greške unatrag kroz mrežu (*error back-propagation*).

Na ulaz 640 neurona ulaznog sloja predstavlja se ulazni vektor binarnih vrijednosti svakog piksela (slikovnog elementa) slike uzorka za učenje i klasifikaciju. 38 neurona izlaznog sloja predstavlja izlazne klase u koje je svaki od uzoraka raspoznat (tablica 6.):

- znamenke 0 ÷ 9 (10 neurona)
- velika slova engleske abecede A ÷ Z, bez slova Q (25 neurona)
- velika slova Č, Š, Ž (3 neurona)

broj klase (izlaznog neurona)	znak koji klasa predstavlja
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	Č
14	D
15	E
16	F
17	G
18	H

broj klase (izlaznog neurona)	znak koji klasa predstavlja
19	I
20	J
21	K
22	L
23	M
24	N
25	O
26	P
27	R
28	S
29	Š
30	T
31	U
32	V
33	W
34	X
35	Y
36	Z
37	Ž

Tablica 6. Prikaz svih klasa i znakova koje pojedina klasa predstavlja

5.3.2. Postupak klasifikacije

Nakon završenog postupka učenja višeslojnog perceptrona i nakon podešavanja težinskih faktora veza među neuronima mreže, implicitno znanje o naučenim uzorcima pohranjeno je upravo u iznosima tih težinskih faktora. Sada je moguće pristupiti klasifikaciji ostalih uzoraka brojčano-slovnih znakova.

ponavljaj

predstavi uzorak znaka ulaznom sloju MLP-a;

propagiraj funkcijski signal kroz mrežu sve do izlaza;

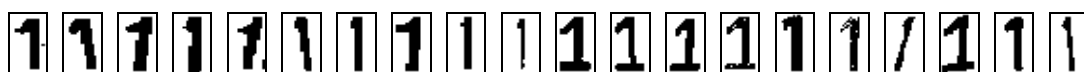
odredi klasu s najvećim iznosom izlaza i klasificiraj uzorak u tu klasu;

za svaki uzorak iz skupa za klasifikaciju

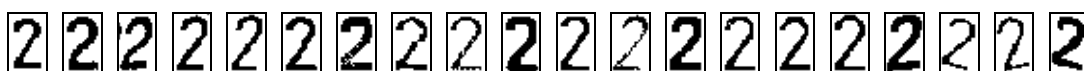
5.3.3. Skup uzoraka za učenje i skup uzoraka za testiranje

Skup uzoraka za učenje S_U čini 20 različitih uzoraka pojedinog znaka izdvojenih procesom predobrade sa 512 snimaka automobila – ukupno $38 \cdot 20 = 760$ uzoraka. No ipak, neki uzorci za učenje su redundantni – primjerice uzorci znaka W, X, Y, Č ili Ž kod koji se u skupu pojavljuje više instanci istoga uzorka za učenje. Ovo je slučaj samo sa navedenim znakovima koji nisu bili zastupljeni u dovoljnoj mjeri na registarskim tablicama automobila iz slikovne baze. Kako su u skupu svih izoliranih znakova (4.243 uzoraka) pojedini znakovi zastupljeni s različitim brojem uzoraka, tako je procjenom odabran broj od 20 uzoraka pojedinog znaka za učenje.

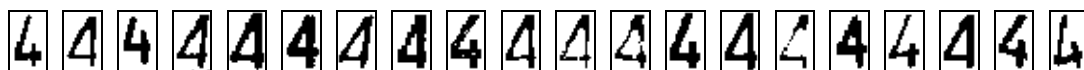
Primjeri uzoraka (nekih znakova) iz *skupa za učenje*:



uzorci znaka 1



uzorci znaka 2



uzorci znaka 4



uzorci znaka B



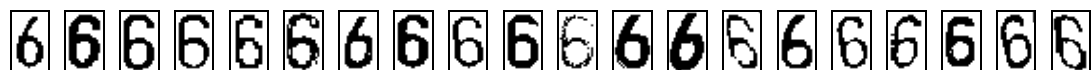
uzorci znaka K



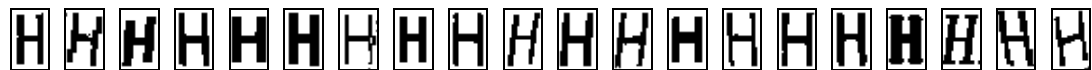
uzorci znaka G



uzorci znaka I



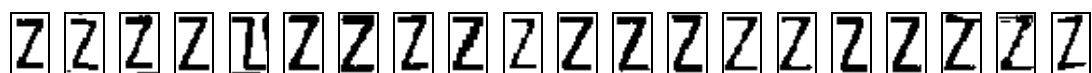
uzorci znaka 6



uzorci znaka H



uzorci znaka R

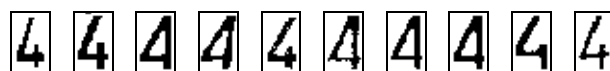


uzorci znaka Z

Skup uzoraka za testiranje S_T čini 10 uzoraka po znaku - ukupno $38 \cdot 10 = 380$ uzoraka. Također su neki uzorci redundantni (za znakove W, X, Y, Č i Ž) te se preklapaju sa uzorcima za učenje. Izuzev tih uzoraka vrijedi

$$S_U \cap S_T = \emptyset$$

Primjeri uzoraka (nekih znakova) iz *skupa za testiranje*:



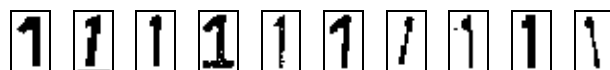
uzorci znaka 4



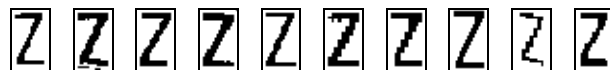
uzorci znaka R



uzorci znaka K



uzorci znaka 1



uzorci znaka Z

6. Ocjena rezultata klasifikacije na velikom broju uzoraka

Prethodno opisani višeslojni (troslojni) perceptron učen je skupom za učenje i nakon svakih 100 epoha učenja (gdje se u jednoj epohi mreži predstavljaju svi uzorci iz skupa za učenje), mreži je predstavljen testni skup uzoraka. Nakon ukupno 900 epoha postignuta je greška krivog raspoznavanja testnih uzoraka od 10.7%. Eksperimentalnom analizom utvrđeno je da konkretni MLP ne pokazuje tendenciju smanjenja greške raspoznavanja testnih uzoraka ni nakon povećanja broja epoha.

Parametri učenja perceptrona:

- 20 uzoraka svakog pojedinog znaka iz skupa za učenje
- 10 uzoraka svakog pojedinog znaka iz skupa za testiranje
- moment učenja $\alpha = 0.05$
- brzina učenja $\eta = 0.025$

Ovako naučeni višeslojni perceptron korišten je u daljnjoj klasifikaciji brojčano-slovčanih znakova ispitne baze.

Oblikovanje i izbor ispitne baze

Ispitna baza tablica i pripadnih oznaka država oblikovana je imajući na umu obuhvatiti snimke *tablica različitih kvaliteta*, *tablica različitih uvjeta snimanja*, *tablica atipičnog formata* (primjerice tablice kvadratnog oblika), *kosih tablica*, *tablica sa teško raspoznatljivim i vrlo distorziranim oznakama država*, *tablica stranih država* (jer uglavnom koriste brojčano-slovčane znakove drugačijeg oblika – "fonta"), *tablica sa neodgovarajućim oznakama države* (primjerice tablica je njemačka, a naljepnica države HR – pri analizi rezultata raspoznavanja tablica i oznaka države ovakva je kombinacija proglašena krivo raspoznatom), *tablica bez oznaka države*, ali također i *čitljive i jasne tablice*.

Ovim odabirom željelo se obuhvatiti što raznovrsniji skup tablica različitih kvaliteta od kojih neke čak i ljudskom oku predstavljaju problem pri raspoznavanju – dio znaka jednostavno nedostaje, ili se radi o pogrešnom znaku, ili lošoj kombinaciji boja naljepnice (primjerice crno slovo D na bojama zastave države) i sl.

Primjeri tablica i oznaka države iz ispitne baze:



primjeri uzoraka tablica sa neraspznatljivim ili vrlo distorziranim oznakama države



primjeri uzoraka tablica sa nerazpoznatljivim ili vrlo distorziranim oznakama države



primjer čitljive i dobre tablice sa pripadnom oznakom države



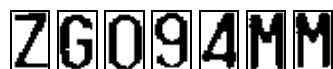
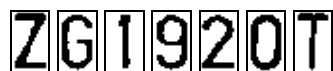
primjer tablica sa neodgovarajućim oznakama država



primjer tablica atipičnih dimenzija (kvadratične dimenzije)



primjer tablice stranih zemalja



primjer tablica bez oznaka države

Rezultati klasifikacije

Višeslojnom perceptronu (slika 29.) predočeno je ukupno 4.243 različitih uzoraka iz skupa za raspoznavanje koji čine svi uzorci i skupa za učenje sa pridodanim uzorcima skupa za ispitivanje. Od toga broja, točno je klasificiranih 3.658 uzoraka što čini statistički pokazatelj od **86,2%** točno raspoznatih i pravilno klasificiranih brojčano-slovčanih znakova (tablica 7).

Dobiveni rezultati raspoznavanja pojedinačnih znakova pokazuju da mreža ima poteškoća pri raspoznavanju sličnih znakova – primjerice 0 ili O, 1 ili I, 8 ili B, 6 ili G i sl. Također, dosta veliki negativan utjecaj ima i sličnost klasa S i Š, C i Č, te Z i Ž. Razlika između pojedinih uzoraka je ponekad vrlo mala (svega nekoliko slikovnih elemenata) te stoga mreža teško raspoznaje, odnosno krivo klasificira navedene parove.

Primijećena je česta misklasifikacija broja 1 koji se klasificira kao I, te broja 0 koji se klasificira kao O. Obrnuta misklasifikacija O u 0, i I u 1 je rjeđa. Neki od ovih problema riješeni su uporabom sintaksne analize tablica, ponajprije tablica od većeg interesa – hrvatskih registarskih tablica i oznaka države HR.

klasa uzorka	ukupan broj uzoraka pojedinog znaka	broj točno klasificiranih uzoraka		
		1000 epoha, 5 uzoraka po znaku, moment = 0.03, brzina učenja = 0.03	1000 epoha, 10 uzoraka po znaku, moment = 0.025, brzina učenja = 0.02	900 epoha, 20 uzoraka po znaku, moment = 0.05, brzina učenja = 0.025
0	176	75	86	62
1	195	114	93	101
2	160	155	153	156
3	175	157	154	162
4	186	161	169	175
5	190	170	175	175
6	166	129	151	158
7	160	149	156	157
8	182	147	167	171
9	177	137	161	163
A	163	140	148	153
B	96	48	65	75

klasa uzorka	ukupan broj uzoraka pojedinog znaka	broj točno klasificiranih uzoraka		
		1000 epoha, 5 uzoraka po znaku, moment = 0.03, brzina učenja = 0.03	1000 epoha, 10 uzoraka po znaku, moment = 0.025, brzina učenja = 0.02	900 epoha, 20 uzoraka po znaku, moment = 0.05, brzina učenja = 0.025
C	85	63	67	73
Č	3	3	3	3
D	80	51	74	69
E	48	41	40	46
F	39	35	37	39
G	312	190	190	288
H	322	202	254	275
I	81	47	72	74
J	57	44	55	57
K	94	86	92	91
L	51	46	48	48
M	50	49	48	47
N	31	29	29	27
O	39	24	23	29
P	38	30	34	37
R	315	136	235	227
S	68	38	63	63
Š	11	10	11	11
T	49	43	43	46
U	59	51	54	57
V	57	52	49	52
W	7	7	7	7
X	4	4	4	4
Y	1	1	1	1
Z	304	209	166	268
Ž	12	6	9	11
ukupno	4243	3079	3386	3658

postotak točno
raspoznatih uzoraka

72,6%

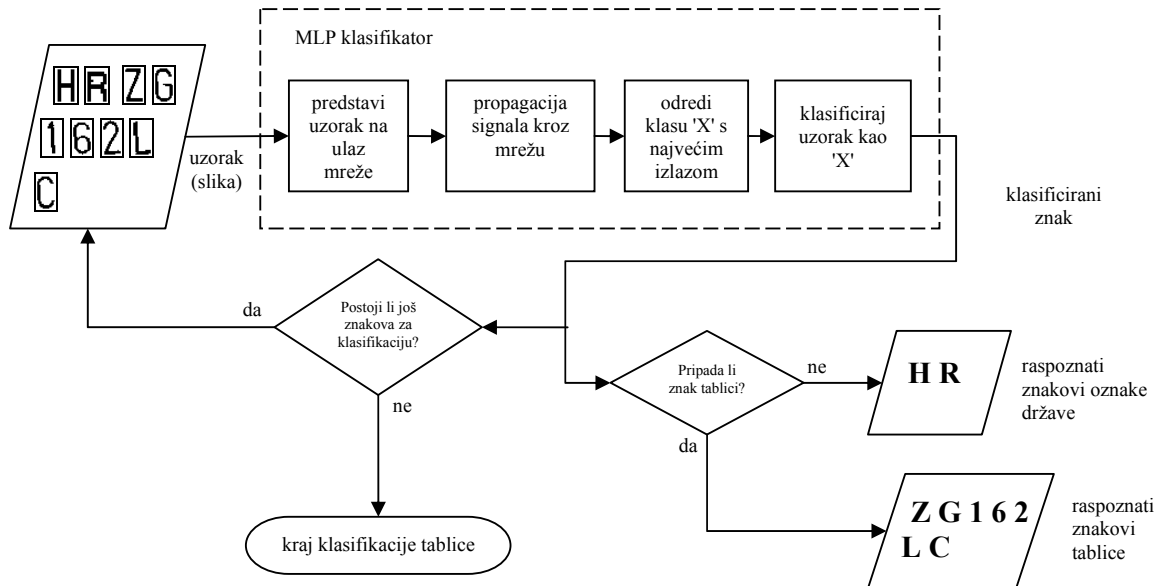
79,8%

86,2%

Tablica 7. Prikaz rezultata raspoznavanja svih uzoraka znakova, promjenom parametara učenja i veličine skupa za učenje; podebljano predstavlja MLP korišten u daljnjem raspoznavanju tablica

Tablica 7. prikazuje različite iznose ukupno uspješno raspoznatih i klasificiranih broječno-slovnih znakova, za različit odabir parametara učenja i veličine skupa za učenje. Pokazuje se vrlo bitnim koristiti što veći skup uzoraka za učenje sa što reprezentativnijim uzorcima pojedinog znaka. Ako su uzorci pojedinog znaka preslični, mreža će teže generalizirati, odnosno "upamtiti" će upravo te uzorke i teže raspoznati nešto drukčiji uzorak istog znaka.

Klasifikacija znakova registarskih tablica i pripadnih oznaka država (naljepnica) izvedena je prema slici 30. Postupak se ponavlja za svaku registarsku tablicu i pripadnu oznaku države iz ispitne baze.



Slika 30. Blok dijagram postupka klasifikacije brojčano-slovnih znakova registarskih pločica i pripadnih oznaka države

Od ukupno 407 registarskih tablica sa pripadnim oznakama države (kojih je ukupno 243) ovaj sustav pravilno klasificira sve znakove tablice i sve znakove oznake države u **43.5%** slučajeva (177 tablica i pripadnih oznaka država). Dobiveni rezultat uključuje postotak istodobno pravilno klasificiranih i znakova tablica i znakova oznake države što nije uvijek slučaj. Ponekad su znakovi države jednostavno neprepoznatljivi te u tom slučaju iako je tablica ispravno klasificirana, ne ulazi u broj ukupno točno klasificiranih tablica i oznaka država. To je dijelom razlog relativno niskom uspjehu raspoznavanja.

Ako se uspješnost klasificiranja znakova promatra zasebno za znakove tablica, i za znakove oznake države, tada je ona nešto veća i iznosi **54.5%** (222 pravilno raspoznate tablice). Tablica se smatra krivo klasificiranom ako je barem jedan znak tablice krivo klasificiran. Za oznake država uspješnost raspoznavanja iznosi **65.4%** (od ukupno 243 točno je raspoznato 159 oznaka država). Kao i za tablicu, oznaka države se smatra krivo klasificiranom ako je barem jedan znak oznake države krivo klasificiran.

Iako su sami uzorci oznaka države uglavnom slabije kvalitete i ljudskim okom teže raspoznatljivi od znakova tablica, postotak raspoznavanja samo oznaka država je veći od raspoznavanja samo tablica (65.4% u odnosu na 54.5%). Razlog leži dijelom u broju znakova koji čine oznaku države. Dok pojedina tablica može sadržavati do 8 znakova, oznaka države sadrži najmanje 1 a najviše 3 znaka. Time je mogućnost krivog raspoznavanja znakova tablice veća (jer MLP može do 8 puta pogriješiti u raspoznavanju, odnosno mora do 8 puta točno klasificirati pojedini znak), dok za oznaku države MLP može pogriješiti najviše triput, odnosno do 3 puta mora točno klasificirati znak.

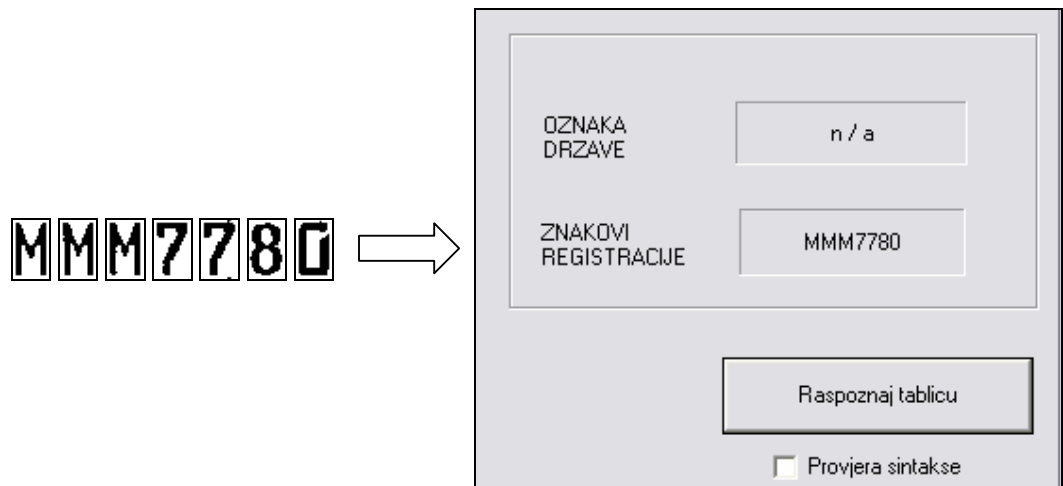
Primjeri točno raspoznatih tablica i oznaka država:

The image displays three examples of license plate recognition software output. Each example consists of a license plate on the left, an arrow pointing to a software interface on the right, and the resulting data in the interface.

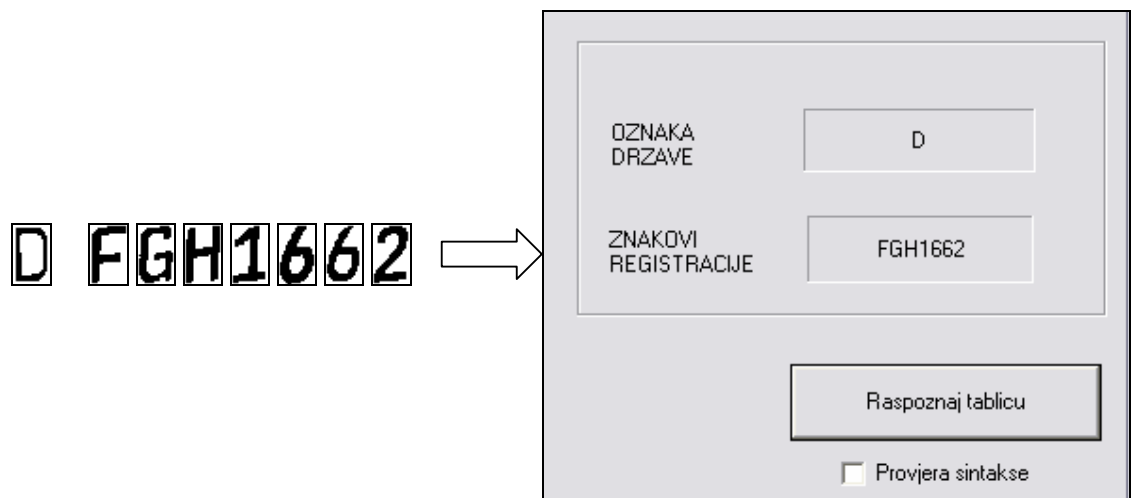
Example 1: License plate **HR ZG7523AF** is processed. The software interface shows:
OZNAKA DRZAVE: HR
ZNAKOVI REGISTRACIJE: ZG7523AF
Buttons: Raspoznaj tablicu, Provjera sintakse (unchecked)

Example 2: License plate **SLO SGD3164** is processed. The software interface shows:
OZNAKA DRZAVE: SLO
ZNAKOVI REGISTRACIJE: SGD3164
Buttons: Raspoznaj tablicu, Provjera sintakse (unchecked)

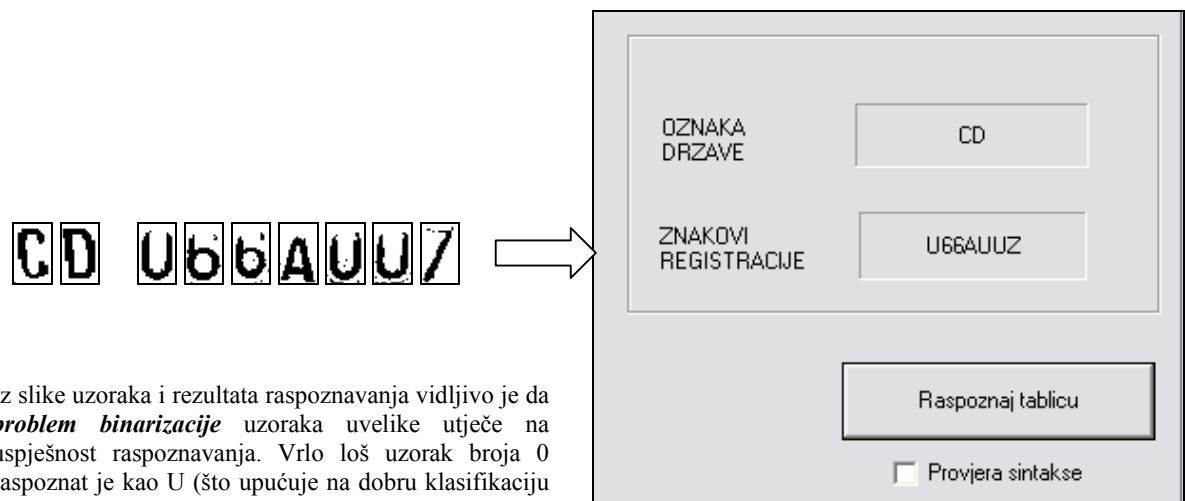
Example 3: License plate **BV593KX** is processed. The software interface shows:
OZNAKA DRZAVE: n / a
ZNAKOVI REGISTRACIJE: BV593KX
Buttons: Raspoznaj tablicu, Provjera sintakse (unchecked)



Na gornjoj slici prikazana oznaka države n/a (*not applicable*) jednostavno označava da za dotičnu tablicu ne postoje znakovi oznake države.



Primjer nepravilno raspoznate registrarske tablice i/ili oznake države:



Iz slike uzoraka i rezultata raspoznavanja vidljivo je da **problem binarizacije** uzoraka uvelike utječe na uspješnost raspoznavanja. Vrlo loš uzorak broja 0 raspoznat je kao U (što upućuje na dobru klasifikaciju jer je ovakav uzorak stvarno sličniji U nego 0), te je 7 raspoznat kao Z. Znak 6 je pravilno raspoznat.

Primjeri nepravilno raspoznatih registarskih tablica i/ili pripadnih oznaka države (gdje postoji):

The image displays three examples of license plate recognition software outputs. Each example shows an input license plate on the left, an arrow pointing to a software interface on the right, and the resulting output fields.

- Example 1:** Input: HR ZG6082AK. Output: OZNAKA DRZAVE: HH; ZNAKOVI REGISTRACIJE: 7GG082AK.
- Example 2:** Input: ZG6803Z. Output: OZNAKA DRZAVE: n / a; ZNAKOVI REGISTRACIJE: ZG68Č3Ž.
- Example 3:** Input: HR ZG1041P. Output: OZNAKA DRZAVE: HR; ZNAKOVI REGISTRACIJE: ŽG1041P.

Each software interface includes a 'Raspoznaj tablicu' button and a checkbox for 'Provjera sintakse'.

Iz gornjih primjera može se primijetiti nepravilno raspoznavanje uzoraka znaka Z, koji se u određenom broju slučajeva raspoznaje kao Ž. Isti slučaj je i sa uzorcima znaka 1 koji su raspoznati kao I, te uzorcima znaka 0 koji su raspoznati kao O.

Primjeri nepravilno raspoznatih registarskih tablica i/ili pripadnih oznaka države (gdje postoji):

The image displays three examples of license plate recognition software outputs. Each example shows a distorted input license plate on the left, an arrow pointing to a software interface on the right, and the resulting recognition results.

- Example 1:** Input: HB698A1. Software output: OZNAKA DRZAVE: n/a, ZNAKOVI REGISTRACIJE: 6G698AR. Button: Raspoznaj tablicu. Checkbox: Provjera sintakse.
- Example 2:** Input: ZG4052AC. Software output: OZNAKA DRZAVE: n/a, ZNAKOVI REGISTRACIJE: ZG4052AL. Button: Raspoznaj tablicu. Checkbox: Provjera sintakse.
- Example 3:** Input: HR ZG511SF. Software output: OZNAKA DRZAVE: H9, ZNAKOVI REGISTRACIJE: 105C1SF. Button: Raspoznaj tablicu. Checkbox: Provjera sintakse.

Gore prikazani primjer pokazuje da mreža nepravilno raspoznaje "kose" uzorke, uz poneki uzorak pravilno raspoznat (primjerice H, S ili F).

7. Sintaksna analiza registarskih pločica

Sintaksna analiza brojčano-slovčanih znakova registarskih pločica i oznaka države uvodi se radi poboljšanja postupka raspoznavanja kako samih znakova tako i registarske tablice kao cjeline. Poboljšanje postupka raspoznavanja očituje se u ispravljanju nepravilno klasificiranih znakova, primjerice kod oznake države umjesto HR raspoznato je H8. Korištenjem sintaksne analize broj 8 se u tom slučaju raspoznaje kao R, i sl.

7.1. Registarske oznake država Europe [8]

Internacionalna Standardizacijska Organizacija u Berlinu definirala je dvije liste oznaka čija je uloga jednoznačno odrediti države, teritorije, i sl. u situacijama poput raspoznavanja vozila i aviona, te identificirati nacionalnost osoba na sportskim turnirima i sl. ISO-2 lista sadrži jednoslovne, dvoslovne i troslovne oznake, dok ISO-3 lista sadrži isključivo dvoslovne oznake.

Sve do početka 1990. godine Rumunjska je bila jedina zemlja koja je promijenila svoj identifikacijski kod vozila u ISO kod, no uz pojavu novih država, neke su države prihvatile ISO-2, a neke ISO-3 identifikacijske oznake.

Država (izvorno ime)	Internacionalna oznaka (ISO-2)	ISO oznaka (ISO-3)
Austrija (Österreich)	A	AT
Albanija (Shqipëria)	AL	AL
Andora (Andorra)	AND	AD
Belgija (België / Belgique)	B	BE
Bugarska (България)	BG	BG
Bosna i Hercegovina	BIH	BA
Švicarska (Confoederatio Helvetica)	CH	CH
Češka Republika (Česká Republika)	CZ	CZ
Njemačka (Deutschland)	D	DE
Danska (Danmark)	DK	DK
Španjolska (España)	E	ES
Estonija (Eesti Vabariik)	EST	EE
Francuska (France)	F	FR
Finska (Suomi/Finland)	FIN	FI
Lihtenštajn (Fürstentum Liechtenstein)	FL	LI
Ujedinjeno Kraljevstvo (Great Britain)	GB	GB
Grčka (Ελλάς)	GR	GR
Mađarska (Magyarország)	H	HU
Hrvatska	HR	HR
Italija (Italia)	I	IT
Irska (Éire)	IRL	IE

Država (izvorno ime)	Internacionalna oznaka (ISO-2)	ISO oznaka (ISO-3)
Island (Ísland)	IS	IS
Luksemburg (Luxembourg)	L	LU
Litva (Lietuvos Respublika)	LT	LT
Latvija (Latvija)	LV	LV
Malta	M	MT
Monako (Monaco)	MC	MC
Makedonija	MK	MK
Norveška (Norge)	N	NO
Nizozemska (Nederland)	NL	NL
Portugal	P	PT
Poljska (Polska)	PL	PL
Rumunjska (România)	RO	RO
San Marino (Repubblica di San Marino)	RSM	SM
Švedska (Sverige)	S	SE
Slovačka (Slovensko)	SK	SK
Slovenija	SLO	SI
Turska (Türkiye)	TR	TR
Vatikan (Stato della Città del Vaticano)	V	VA
Jugoslavija	YU	YU

Tablica 8. Države Europe uzete u razmatranje sintakse registarskih tablica, sa pripadnim internacionalnim oznakama po ISO-2 i ISO-3 standardu [8]

Internacionalna oznaka (ISO-2):

Internacionalna identifikacijska slova (1 ÷ 3 slova)

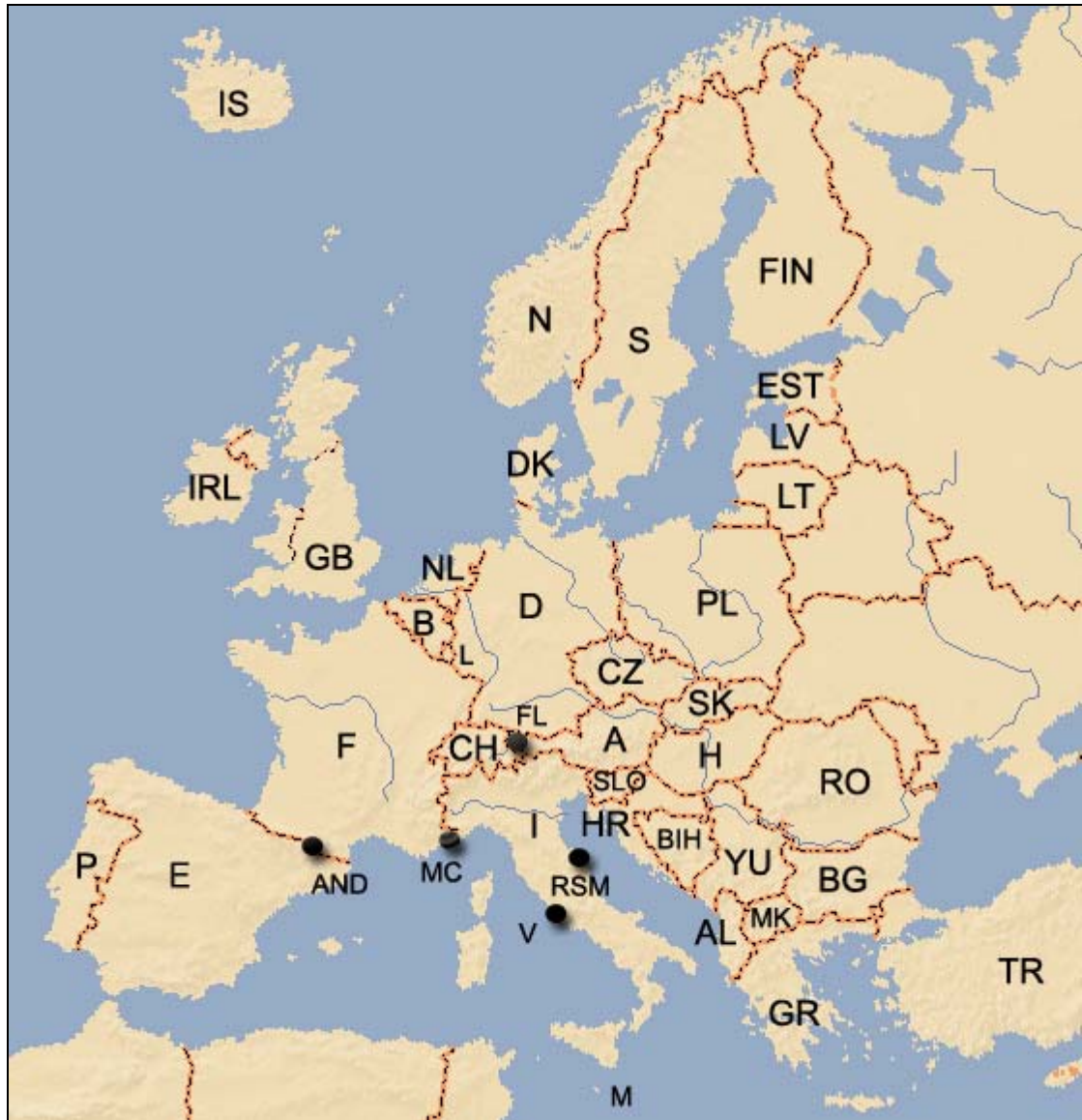
* "Razlikovni znakovi vozila u internacionalnom prometu definirani od Glavnog Tajnika Ujedinjenih Naroda u skladu sa Konvencijom o cestovnom prometu 1998." od 01. 05. 2001.

ISO oznaka (ISO-3):

Za razliku od Internacionalnih identifikacijskih oznaka, ISO-2 oznake pokrivaju skoro sve moguće jurisdikcije. Korištenjem dvoslovnih oznaka nastoji se još više standardizirati format oznaka države.

U ovom diplomskom radu, od interesa su ISO-2 internacionalne oznake država (tablica 8.), jer ISO-3 standard još nije u potpunosti zaživio u svim zemljama. Daljnja sintaksna analiza i gramatički opis sintakse registarskih tablica pojedine zemlje temelje se upravo na tim (tradicionalnim) internacionalnim oznakama koje su već duže vrijeme u upotrebi.

Sintaksnom analizom registarskih tablica vozila i internacionalnih oznaka država obrađeno je 40 europskih zemalja (slika 31.). Analizom su obuhvaćene različite serije registarskih tablica sa pripadnim formatima. Uz normalnu seriju, opisane su i tablice drugih serija (službena, prethodna serija – stariji formati, privremene tablice, strane tablice, diplomatske tablice i dr).



Slika 31. Zemljopisni prikaz država Europe uzetih u razmatranje, sa pripadnim oznakama registarskih tablica

Sinaksnom analizom, u daljnjem tekstu, obrađuju se Hrvatska (HR), Slovenija (SLO), Bosna i Hercegovina (BIH), Italija (I), Austrija (A), Mađarska (H), San Marino (RSM), Vatikan (V), Jugoslavija (YU), Francuska (F), Monako (MC), Švicarska (CH), Lihtenštajn (FL), Njemačka (D), Češka (CZ), Slovačka (SK), Makedonija (MK), Albanija (AL), Andora (AND), Španjolska (E), Luksemburg (L), Belgija (B), Nizozemska (NL), Velika Britanija (GB), Irska (IRL), Danska (DK), Poljska (PL), Rumunjska (RO), Bugarska (BG), Grčka (GR), Malta (M), Portugal (P), Island (IS), Norveška (N), Švedska (S), Finska (FIN), Estonija (EST), Latvija (LV), Litva (LT) i Turska (TR).

7.2. Formati registarskih tablica država Europe [8]

Redoslijed sintaksne analize registarskih tablica pojedinačnih zemalja Europe određen je geografskim položajem u odnosu na Republiku Hrvatsku (prvo su obrađene geografski bliže a zatim dalje zemlje) (slika 31.).

Formati registarskih tablica pojedine zemlje opisani su formalnom gramatikom G kao uređenom četvorkom $G = (V, T, P, S)$ gdje je

V - skup nezavršnih znakova gramatike

T - skup završnih znakova gramatike koji čine brojevi i slova (brojčano-slovčani znakovi), zajedno sa oznakom boje znakova, odnosno pozadine, koja također čini bitan dio formata registarskih pločica – pojedini formati vezani su uz pojedinu kombinaciju boja znakova/pozadine, primjerice **A, B, C, ... K, ... X, Y, Z, Ž, 0, 1, 2, 3 ... 9, c, b, ž, r, p, z, s, n**, gdje mala slova predstavljaju oznaku boje – tako **cb** označava crne znakove na bijeloj podlozi, **crb** crvene znakove na bijeloj podlozi, a **žp** žute znakove na plavoj podlozi; **pcb** označava kombinaciju plavih i crnih znakova na bijeloj podlozi i sl.

P - skup produkcija gramatike kojim se generiraju svi mogući formati registarskih pločica, zajedno sa informacijom o boji

S - početni nezavršni znak gramatike

i vrijedi $V \cap T = \emptyset$.

HR - HRVATSKA

$G_{HR} = (V_{HR}, T_{HR}, P_{HR}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{HR} = \{S, A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$T_{HR} = \{A, B, C, \check{C}, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, \check{S}, T, U, V, Z, \check{Z}, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, z, \check{z}, p, r\}$

P_{HR} - skup produkcija:

$S \rightarrow cb C \mid cb \delta\delta \mid cb \alpha\delta\gamma \mid cb \alpha\beta\beta A$

$S \rightarrow c\check{z} \alpha\delta\beta \mid \check{z}p \delta A\delta \mid zb C \mid crb C$

$C \rightarrow \alpha\delta A \mid \alpha\delta\beta \mid \alpha\gamma\gamma A \mid \alpha\gamma\gamma\beta \mid \alpha\beta\beta B$

$\alpha \rightarrow BJ \mid BM \mid \check{C}K \mid DA \mid DE \mid DJ \mid DU \mid GS \mid IM \mid KA \mid KC \mid KR \mid KT \mid K\check{Z} \mid MA \mid NA \mid$
 $NG \mid OG \mid OS \mid PS \mid PU \mid P\check{Z} \mid RI \mid SB \mid \check{S}I \mid SK \mid ST \mid VK \mid VT \mid VU \mid V\check{Z} \mid ZD \mid ZG \mid$
 $\check{Z}U$

$\beta \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

SLO - SLOVENIJA

$G_{SLO} = (V_{SLO}, T_{SLO}, P_{SLO}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{SLO} = \{S, A, B, C, D, E, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{SLO} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, n, p, r\}$

P_{SLO} - skup produkcija:

$S \rightarrow pb A\gamma\delta \mid cb C \mid cb D \mid cb DE \mid cb DEE$

$S \rightarrow cn \alpha\gamma AB \mid cn \alpha\gamma A\gamma \mid crb C \mid bc \alpha\gamma\delta$

$C \rightarrow \alpha\gamma\gamma A \mid \alpha AB\gamma A \mid \alpha AB\delta$

$D \rightarrow EEEE$

$E \rightarrow A \mid B$

$\alpha \rightarrow CE \mid GO \mid KK \mid KP \mid KR \mid LJ \mid MB \mid MS \mid NM \mid PO \mid SG$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | R | S | T | U | V | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

BIH – BOSNA I HERCEGOVINA

$G_{BIH} = (V_{BIH}, T_{BIH}, P_{BIH}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{BIH} = \{S, A, B, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{BIH} = \{A, B, C, \check{C}, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, \check{z}\}$

P_{BIH} - skup produkcija:

$S \rightarrow \check{z}c \gamma A \delta$

$S \rightarrow cb \alpha \delta A | cb \alpha \delta \alpha | cb \alpha \gamma \gamma \alpha | cb \delta A \delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | \check{C} | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | R | S | T | U | V | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

I – ITALIJA

$G_I = (V_I, T_I, P_I, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_I = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_I = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, n, p\}$

P_I - skup produkcija:

$S \rightarrow cb C | cb \alpha \delta \alpha$

$S \rightarrow nbc C | bc C | pcb \alpha \delta \alpha$

$C \rightarrow \alpha BA \gamma \gamma | \alpha \gamma \delta A | \alpha \delta \delta | \alpha A \gamma \delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$
 $B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

A – AUSTRIJA

$G_A = (V_A, T_A, P_A, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_A = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_A = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, p, z\}$

P_A - skup produkcija:

$S \rightarrow cb C | cb \alpha B | cb \alpha \gamma | cb \alpha \gamma B | cb \alpha \gamma \gamma | cb \alpha \gamma \gamma B$

$S \rightarrow bp C | bz C$

$S \rightarrow bc AB | bc A \gamma | bc A \delta | bc A \delta \delta | bc A \delta A \gamma | bc A \gamma \gamma | bc A \gamma \gamma B | bc \alpha \delta \delta | bc \alpha \delta A \gamma$

$C \rightarrow A \gamma \delta A | A \gamma \gamma A | A \delta A | A \gamma \alpha | A \gamma \alpha A | AB \alpha A | AA \delta | A \alpha \delta | A \alpha A \gamma | A \alpha \alpha \gamma | A \alpha \alpha AB | \alpha \gamma \gamma A$
 $| \alpha \delta A | \alpha \gamma \alpha | \alpha \gamma \alpha A | \alpha B \alpha A$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

H – MAĐARSKA

$G_H = (V_H, T_H, P_H, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_H = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_H = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, p, r, \check{z}\}$

P_H - skup produkcija:

$S \rightarrow cb C | cb A \gamma \delta | cb AA \gamma \gamma | cb \alpha A \gamma$

$S \rightarrow c\check{z} A \gamma \delta | c\check{z} \alpha A \delta | crb C | bc C | bp C$

$C \rightarrow \alpha \gamma \gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

RSM – SAN MARINO

$G_{RSM} = (V_{RSM}, T_{RSM}, P_{RSM}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{RSM} = \{S, A, B, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{RSM} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, p, r\}$

P_{RSM} - skup produkcija:

$S \rightarrow pb \gamma\gamma | pb \gamma\gamma B | pb A\delta | pb A\gamma\gamma | pb \alpha A\gamma\delta$

$S \rightarrow crpb A\delta | crpb \alpha\gamma | crpb \alpha A\gamma | cb A\delta B$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

V – VATIKAN

$G_V = (V_V, T_V, P_V, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_V = \{S, A, B, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r\}$

P_V - skup produkcija:

$S \rightarrow cb \alpha\gamma\gamma | cb \alpha\gamma\delta | cb \alpha A\gamma\gamma | cb \alpha A\gamma\delta | crb \alpha AB | crb \alpha A\gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

YU – JUGOSLAVIJA

$G_{YU} = (V_{YU}, T_{YU}, P_{YU}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{YU} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{YU} = \{A, B, C, \check{C}, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, \check{S}, T, U, V, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r, p, \check{z}\}$

P_{YU} - skup produkcija:

$S \rightarrow \mathbf{cb} \gamma\alpha \mid \mathbf{cb} \gamma\delta\alpha \mid \mathbf{cb} \delta\gamma\alpha \mid \mathbf{cb} \delta\delta\alpha \mid \mathbf{cb} A\delta B \mid \mathbf{cb} C \mid \mathbf{cb} \alpha\delta\alpha$

$S \rightarrow \mathbf{\check{z}c} \gamma A\gamma \mid \mathbf{\check{z}c} \gamma A\delta \mid \mathbf{bp} A\delta\delta \mid \mathbf{bcr} C$

$C \rightarrow \alpha\gamma\gamma \mid \alpha\gamma\delta \mid \alpha\delta\gamma \mid \alpha\delta\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid \check{C} \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid \check{S} \mid T \mid U \mid V \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

F – FRANCUSKA

$G_F = (V_F, T_F, P_F, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_F = \{S, A, B, C, D, E, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_F = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r, z, \check{z}, n\}$

P_F - skup produkcija:

$S \rightarrow \mathbf{bz} C \mid \mathbf{bz} BAB \mid \mathbf{bz} BA\gamma \mid \mathbf{bz} BA\delta \mid \mathbf{bz} \gamma AB \mid \mathbf{bz} \gamma A\gamma \mid \mathbf{bz} \gamma A\delta \mid \mathbf{bz} \gamma A\gamma\gamma \mid \mathbf{bz} B\alpha\gamma\gamma$

$S \rightarrow \mathbf{nz} C \mid \mathbf{nz} B\alpha B \mid \mathbf{nz} B\alpha AB \mid \mathbf{nz} \gamma\alpha\gamma \mid \mathbf{nz} \gamma\alpha\gamma B \mid \mathbf{nz} \gamma\alpha\gamma\gamma \mid \mathbf{nz} \gamma\alpha AB \mid \mathbf{nz} \delta\alpha B \mid \mathbf{nz} \delta\alpha\gamma \mid \mathbf{nz} \delta\alpha\delta \mid \mathbf{nz} \delta\alpha\gamma\gamma$

$S \rightarrow \mathbf{bcr} B\alpha\gamma \mid \mathbf{bcr} B\alpha A\gamma \mid \mathbf{bcr} \gamma\alpha A\gamma \mid \mathbf{bcr} \alpha A\gamma\gamma \mid \mathbf{bcr} \alpha A\gamma\delta \mid \mathbf{bcr} E$

$S \rightarrow \mathbf{cb} D \mid \mathbf{cb} \gamma A\gamma\gamma A \mid \mathbf{cb} \gamma\alpha\alpha\gamma \mid \mathbf{cb} \delta\alpha B\gamma \mid \mathbf{cb} \delta\alpha\alpha\gamma \mid \mathbf{cb} \gamma\gamma\alpha A\gamma$

$S \rightarrow \mathbf{c\check{z}} D \mid \mathbf{bc} D \mid \mathbf{bc} \delta\alpha B\gamma$

$D \rightarrow E \mid \gamma A\gamma\gamma A \mid \gamma\alpha BA \mid \gamma\alpha A\gamma \mid \delta\alpha BA \mid \gamma\gamma\gamma\gamma \mid \gamma\gamma\alpha BA$

$E \rightarrow \gamma\alpha\gamma \mid \delta\alpha\gamma \mid \delta\alpha A\gamma \mid \gamma\gamma\alpha\gamma$

$C \rightarrow A\delta AB \mid A\delta A\gamma \mid A\delta A\delta \mid A\delta\alpha B \mid A\delta\alpha\gamma \mid A\delta\alpha\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

MC – MONAKO

$G_{MC} = (V_{MC}, T_{MC}, P_{MC}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{MC} = \{S, A, B, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{MC} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r, p\}$

P_{MC} - skup produkcija:

$S \rightarrow pb \gamma \gamma | pb A \delta | pb \alpha \gamma | bp \gamma \gamma \alpha \alpha | crb \alpha \gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

CH – ŠVICARSKA

$G_{CH} = (V_{CH}, T_{CH}, P_{CH}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{CH} = \{S, A, B, C, D, E, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{CH} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, s, z, \check{z}, p\}$

P_{CH} - skup produkcija:

$S \rightarrow cb C | cb D | cb \alpha BA | cb \alpha \gamma A | cb \alpha \delta A | cb \alpha \gamma \gamma A | cb \alpha \gamma \delta A | cb \alpha \delta \delta A$

$S \rightarrow bc D | bc A \delta \delta | cp C | cs C | cz C | c\check{z} C | bpcb E | bzcb E$

$C \rightarrow \alpha B | \alpha \gamma | \alpha \delta | \alpha \gamma \gamma | \alpha \gamma \delta | \alpha \delta \delta$

$D \rightarrow A \delta B | A \gamma \delta$

$E \rightarrow \alpha \alpha BB | \alpha \alpha B \gamma | \alpha \alpha B \delta | \alpha \alpha \gamma B | \alpha \alpha \gamma \gamma | \alpha \alpha \gamma \delta | \alpha \alpha \delta B | \alpha \alpha \delta \gamma | \alpha \alpha \delta \delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

FL – LIHTENŠTAJN

$G_{FL} = (V_{FL}, T_{FL}, P_{FL}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{FL} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{FL} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, s, z, \check{z}, p\}$

P_{FL} - skup produkcija:

$S \rightarrow cp C | cs D | cz C | c\check{z} C | bc C | bc CA$

$C \rightarrow \alpha B | \alpha \gamma | \alpha \delta | \alpha \gamma \gamma | \alpha \gamma \delta$

$\alpha \rightarrow FL$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

D – NJEMAČKA

$G_D = (V_D, T_D, P_D, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_D = \{S, A, B, C, D, E, F, G, H, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_D = \{A, \ddot{A}, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, \ddot{O}, Q, P, R, S, T, U, \ddot{U}, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, s, z, p, r\}$

P_D - skup produkcija:

$S \rightarrow cb D | cb AD | cb DA | cb ADA | cb \alpha D | cb \alpha DA | cb EB | cb AEB | cb \alpha AD |$

$cb \alpha ACA | cb \alpha \alpha C | cb \alpha \alpha FA | cb \alpha A \gamma \delta | cb G | cb H$

$S \rightarrow bp \gamma \delta | crb E | crb AE | crb \alpha E | crb G | pb G$

$S \rightarrow zb AD | zb \alpha D | zb \alpha AD | zb \alpha \alpha C | zb G$

$F \rightarrow AB | A \gamma$

$C \rightarrow A\delta \mid F$

$D \rightarrow A\gamma\gamma \mid C$

$E \rightarrow A\gamma\gamma \mid A\gamma\delta$

$G \rightarrow \delta\alpha A$

$H \rightarrow \gamma\gamma \mid \gamma\delta \mid \delta\delta \mid \delta\delta B$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid \ddot{A} \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid \ddot{O} \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid \ddot{U} \mid V \mid$
 $W \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

CZ – ČEŠKA

$G_{CZ} = (V_{CZ}, T_{CZ}, P_{CZ}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{CZ} = \{S, A, B, C, D, E, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{CZ} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, W, V, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,$
 $7, 8, 9, c, b, r, z, \dot{z}, p\}$

P_{CZ} - skup produkcija:

$S \rightarrow cb \gamma\alpha\gamma \mid cb \gamma\alpha A\gamma \mid cb E \mid c\dot{z} D \mid c\dot{z} E \mid zb C \mid cz CB \mid \dot{z}p D \mid crb \alpha C$

$C \rightarrow A\gamma\gamma$

$D \rightarrow AC \mid \alpha C$

$E \rightarrow \delta\gamma\gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid W \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

SK – SLOVAČKA

$G_{SK} = (V_{SK}, T_{SK}, P_{SK}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{SK} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{SK} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r, z, \check{z}, p\}$

P_{SK} - skup produkcija:

$S \rightarrow zb C\gamma \mid cb ACB \mid cb AC\alpha \mid cb \alpha C \mid cb \alpha CB$

$S \rightarrow \check{z}p AC\gamma \mid c\check{z} \alpha C \mid pb \alpha C \mid crb \alpha C \mid cr\check{z} \alpha C$

$C \rightarrow A\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid W \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

MK – MAKEDONIJA

$G_{MK} = (V_{MK}, T_{MK}, P_{MK}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{MK} = \{S, A, B, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{MK} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, \check{S}, T, U, V, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r, z, p\}$

P_{MK} - skup produkcija:

$S \rightarrow bc \gamma A\delta \mid bc \gamma\alpha\gamma \mid bc \gamma\alpha\delta \mid cb \delta\delta \mid cb \alpha\delta\alpha \mid cb \alpha\delta\gamma \mid pb \delta\delta \mid crb \alpha\delta\alpha \mid zb \alpha\delta A \mid bz \alpha\delta\alpha$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid \check{S} \mid T \mid U \mid V \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

AL – ALBANIJA

$G_{AL} = (V_{AL}, T_{AL}, P_{AL}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{AL} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{AL} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, z, ž\}$

P_{AL} - skup produkcija:

$S \rightarrow cb C \mid cb \gamma A \gamma \gamma \mid cb A \delta \alpha \mid cb \alpha \gamma \gamma \mid cb \alpha \gamma \gamma A \mid cb \alpha \gamma \delta \mid zb \alpha \gamma \gamma \mid cž \alpha \gamma \gamma A$

$C \rightarrow B \mid \gamma \mid \delta \mid \gamma \gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

AND – ANDORA

$G_{AND} = (V_{AND}, T_{AND}, P_{AND}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{AND} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{AND} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, z, p, r\}$

P_{AND} - skup produkcija:

$S \rightarrow crz \delta \mid cb \gamma \gamma \mid cb \gamma \delta \mid cb A \delta B \mid bp C \mid bp AC \mid bp \alpha A \gamma A$

$C \rightarrow ABA \mid A \gamma A \mid A \delta A$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

E – ŠPANJOLSKA

$G_E = (V_E, T_E, P_E, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_E = \{S, A, B, C, D, E, F, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_E = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, p, r\}$

P_E - skup produkcija:

$S \rightarrow cb F \mid bp EBA \mid bp AC \mid bp AD \mid bcr EBA \mid bcr AC \mid bcr AD \mid bcr A\gamma\alpha A$

$S \rightarrow ccr A\gamma\alpha A \mid ccr A\gamma\delta A \mid ccr \alpha\gamma\delta A \mid crb A\gamma\alpha A \mid crb \alpha\alpha\gamma\gamma \mid crb \alpha\alpha\gamma\delta$

$S \rightarrow ccrb \alpha B \mid ccrb \alpha AB \mid ccrb \alpha\gamma \mid ccrb \alpha A\gamma$

$C \rightarrow A\gamma \mid A\delta \mid A\gamma\gamma$

$D \rightarrow CB$

$E \rightarrow BA\gamma\gamma \mid B\alpha\gamma\gamma$

$F \rightarrow E \mid BE \mid \gamma\gamma\alpha A \mid A\gamma\gamma A \mid A\gamma\gamma\alpha \mid A\gamma\gamma\alpha A \mid A\gamma\delta \mid A\delta\delta \mid \alpha\gamma\gamma \mid A\alpha\gamma\gamma \mid \alpha\gamma\gamma A \mid \alpha\gamma\gamma\alpha \mid \alpha\gamma\delta \mid \alpha\delta\delta \mid \alpha A\gamma\gamma \mid \alpha\alpha\gamma\gamma \mid \alpha D \mid \alpha A\gamma\delta A \mid \alpha A\delta\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

L – LUKSEMBURG

$G_L = (V_L, T_L, P_L, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_L = \{S, A, B, C, D, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_L = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, \check{z}, r\}$

P_L - skup produkcija:

$S \rightarrow c\check{z} \gamma \mid c\check{z} C \mid c\check{z} A\gamma\gamma \mid c\check{z} D \mid c\check{z} \alpha\delta \mid bc C \mid bc A\gamma\gamma \mid bc \alpha\delta \mid bcr \alpha B \mid bcr D$

$C \rightarrow \delta \mid \gamma\gamma \mid \gamma\delta$

$D \rightarrow \alpha\gamma \mid \alpha\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

B – BELGIJA

$G_B = (V_B, T_B, P_B, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_B = \{S, A, B, C, D, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_B = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, \check{z}, z, r\}$

P_B - skup produkcija:

$S \rightarrow crb C | bcr \delta\delta | bcr A\gamma\delta | bcr A\gamma\delta A | cb \gamma\gamma | cb \gamma\delta | crz D | c\check{z} D | zb D | bc D | bc DB$

$C \rightarrow BA\delta | B\alpha\gamma | \gamma A\gamma | \gamma\alpha B | \delta AB | \delta\alpha | \gamma\gamma A | A\delta A | A\gamma\gamma | \alpha\delta | D$

$D \rightarrow A\alpha\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

NL – NIZOZEMSKA

$G_{NL} = (V_{NL}, T_{NL}, P_{NL}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{NL} = \{S, A, B, C, D, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{NL} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, \check{z}, z, p\}$

P_{NL} - skup produkcija:

$S \rightarrow cb \gamma\gamma A | cb \gamma A\gamma | cb \gamma\alpha\alpha | cb A\gamma\gamma | cb \alpha\gamma\gamma | cb \alpha\alpha\gamma$

$S \rightarrow c\check{z} D | c\check{z} \gamma\alpha\alpha | c\check{z} \alpha\alpha\gamma$

$C \rightarrow \gamma\gamma\alpha | \gamma\alpha\gamma$

$D \rightarrow C | \alpha\gamma\gamma | \alpha\gamma\alpha$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

GB – VELIKA BRITANIJA

$G_{GB} = (V_{GB}, T_{GB}, P_{GB}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{GB} = \{S, A, B, C, D, E, F, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

$T_{GB} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, \dot{z}, r\}$

P_{GB} - skup produkcija:

$S \rightarrow cb E | cb D\beta | cb \delta A\delta | c\dot{z} E | c\dot{z} D\beta | c\dot{z} \delta A\delta | c\dot{z} \beta\delta$

$S \rightarrow bc E | bc \beta\delta | crb \delta A | crb \delta\alpha | crb \gamma\gamma A$

$C \rightarrow BA | \gamma A | \delta A | \gamma\gamma A$

$D \rightarrow AB | A\gamma | A\delta$

$E \rightarrow C | CA | \gamma\alpha\gamma | \delta\beta | F | AF | \alpha\gamma\alpha | \alpha DA$

$F \rightarrow D | A\gamma\gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\beta \rightarrow \alpha A$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | Q | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

IRL – IRSKA

$G_{IRL} = (V_{IRL}, T_{IRL}, P_{IRL}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{IRL} = \{S, A, B, C, D, E, F, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{IRL} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, z, r\}$

P_{IRL} - skup produkcija:

$S \rightarrow \mathbf{bz} C\gamma \mid \mathbf{bz} CA\gamma \mid \mathbf{ccr} DA \mid \mathbf{ccr} AE \mid \mathbf{cb} DA \mid \mathbf{cb} \gamma F \mid \mathbf{cb} \gamma AF \mid \mathbf{cb} AE \mid \mathbf{bc} DA \mid \mathbf{bc} AF$

$C \rightarrow BA \mid \gamma A \mid \delta A$

$D \rightarrow C \mid \gamma\gamma A$

$E \rightarrow AB \mid A\gamma \mid A\delta \mid A\gamma\gamma$

$F \rightarrow E \mid A\gamma\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{D} \mid \mathbf{E} \mid \mathbf{F} \mid \mathbf{G} \mid \mathbf{H} \mid \mathbf{I} \mid \mathbf{J} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{L} \mid \mathbf{M} \mid \mathbf{N} \mid \mathbf{O} \mid \mathbf{Q} \mid \mathbf{P} \mid \mathbf{R} \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{T} \mid \mathbf{U} \mid \mathbf{V} \mid \mathbf{W} \mid \mathbf{X} \mid \mathbf{Y} \mid \mathbf{Z}$

$B \rightarrow \mathbf{0} \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{2} \mid \mathbf{3} \mid \mathbf{4} \mid \mathbf{5} \mid \mathbf{6} \mid \mathbf{7} \mid \mathbf{8} \mid \mathbf{9}$

DK – DANSKA

$G_{DK} = (V_{DK}, T_{DK}, P_{DK}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{DK} = \{S, A, B, C, D, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{DK} = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{O}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}, \mathbf{8}, \mathbf{9}, \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{z}, \mathbf{p}, \mathbf{r}\}$

P_{DK} - skup produkcija:

$S \rightarrow \mathbf{crb} \gamma\gamma\alpha \mid \mathbf{crb} C \mid \mathbf{crcb} \gamma\delta \mid \mathbf{crcb} \alpha\gamma\gamma \mid \mathbf{cb} \gamma\delta \mid \mathbf{cb} D \mid \mathbf{z}\mathbf{p} \alpha\delta \mid \mathbf{z}\mathbf{p} D \mid \mathbf{c}\mathbf{z} D \mid \mathbf{b}\mathbf{p} C$

$C \rightarrow \alpha\gamma\delta$

$D \rightarrow \alpha\gamma\gamma \mid C$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{D} \mid \mathbf{E} \mid \mathbf{F} \mid \mathbf{G} \mid \mathbf{H} \mid \mathbf{I} \mid \mathbf{J} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{L} \mid \mathbf{M} \mid \mathbf{N} \mid \mathbf{O} \mid \mathbf{Q} \mid \mathbf{P} \mid \mathbf{R} \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{T} \mid \mathbf{U} \mid \mathbf{V} \mid \mathbf{W} \mid \mathbf{X} \mid \mathbf{Y} \mid \mathbf{Z}$

$B \rightarrow \mathbf{0} \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{2} \mid \mathbf{3} \mid \mathbf{4} \mid \mathbf{5} \mid \mathbf{6} \mid \mathbf{7} \mid \mathbf{8} \mid \mathbf{9}$

PL – POLJSKA

$G_{PL} = (V_{PL}, T_{PL}, P_{PL}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{PL} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{PL} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, z, \dot{z}, p, r\}$

P_{PL} - skup produkcija:

$S \rightarrow \mathbf{crb} AB\gamma\gamma \mid \mathbf{crb} AB\gamma A \mid \mathbf{\dot{z}c} A\gamma\gamma\gamma \mid \mathbf{bp} A\gamma\delta \mid \mathbf{bp} \alpha\gamma\delta \mid \mathbf{cb} C \mid \mathbf{bc} \alpha\delta\alpha \mid \mathbf{bp} \alpha A\delta A \mid \mathbf{bp} \alpha A\gamma\gamma$
 $\mid \mathbf{bz} \alpha A\gamma\gamma \mid \mathbf{bcr} \alpha A\gamma\gamma$

$C \rightarrow \alpha\gamma\gamma \mid \alpha\gamma\delta \mid \alpha\delta A \mid \alpha\gamma\gamma A \mid \alpha A\gamma\alpha A \mid \alpha A\gamma\alpha \mid \alpha A\delta A \mid \alpha\alpha\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{D} \mid \mathbf{E} \mid \mathbf{F} \mid \mathbf{G} \mid \mathbf{H} \mid \mathbf{I} \mid \mathbf{J} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{L} \mid \mathbf{M} \mid \mathbf{N} \mid \mathbf{O} \mid \mathbf{P} \mid \mathbf{R} \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{T} \mid \mathbf{U} \mid \mathbf{V} \mid \mathbf{W} \mid \mathbf{X} \mid \mathbf{Y} \mid \mathbf{Z}$

$B \rightarrow \mathbf{0} \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{2} \mid \mathbf{3} \mid \mathbf{4} \mid \mathbf{5} \mid \mathbf{6} \mid \mathbf{7} \mid \mathbf{8} \mid \mathbf{9}$

RO – RUMUNJSKA

$G_{RO} = (V_{RO}, T_{RO}, P_{RO}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{RO} = \{S, A, B, C, D, E, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{RO} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, \dot{z}, p, r\}$

P_{RO} - skup produkcija:

$S \rightarrow \mathbf{cb} E \mid \mathbf{cb} A\gamma\alpha A \mid \mathbf{cb} A\delta \mid \mathbf{cb} A\gamma\gamma \mid \mathbf{cb} \alpha\gamma\alpha A \mid \mathbf{cb} \alpha\delta \mid \mathbf{cb} \alpha\gamma\gamma \mid \mathbf{c\dot{z}} E \mid \mathbf{bc} E \mid \mathbf{crb} A\gamma\gamma \mid$
 $\mathbf{crb} A\gamma\delta \mid \mathbf{crb} \alpha\gamma\gamma \mid \mathbf{pb} \alpha\delta\delta$

$C \rightarrow AB \mid A\gamma \mid A\delta \mid A\gamma\gamma$

$D \rightarrow C \mid A\gamma\delta$

$E \rightarrow BD \mid BAC \mid \gamma C \mid \gamma AC$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{D} \mid \mathbf{E} \mid \mathbf{F} \mid \mathbf{G} \mid \mathbf{H} \mid \mathbf{I} \mid \mathbf{J} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{L} \mid \mathbf{M} \mid \mathbf{N} \mid \mathbf{O} \mid \mathbf{P} \mid \mathbf{R} \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{T} \mid \mathbf{U} \mid \mathbf{V} \mid \mathbf{W} \mid \mathbf{X} \mid \mathbf{Y} \mid \mathbf{Z}$

$B \rightarrow \mathbf{0} \mid \mathbf{1} \mid \mathbf{2} \mid \mathbf{3} \mid \mathbf{4} \mid \mathbf{5} \mid \mathbf{6} \mid \mathbf{7} \mid \mathbf{8} \mid \mathbf{9}$

BG – BUGARSKA

$G_{BG} = (V_{BG}, T_{BG}, P_{BG}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{BG} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{BG} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, \check{z}, r\}$

P_{BG} - skup produkcija:

$S \rightarrow bc \delta A \delta \mid bcr C \mid cb CA \mid cb C\alpha \mid cb A\alpha\gamma\gamma \mid cb \alpha\alpha\gamma\gamma \mid cb \alpha\alpha\gamma\gamma \mid c\check{z} CA \mid c\check{z} C\alpha \mid crb A\gamma\delta$

$C \rightarrow A\gamma\gamma \mid \alpha\gamma\gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid W \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

GR – GRČKA

$G_{GR} = (V_{GR}, T_{GR}, P_{GR}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{GR} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{GR} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, z, \check{z}, r, n\}$

P_{GR} - skup produkcija:

$S \rightarrow cz \gamma\gamma\alpha \mid c\check{z} \gamma\gamma \mid c\check{z} \gamma\delta \mid cb C \mid zb A\gamma\gamma \mid crb A\gamma\gamma \mid crb \alpha A\gamma\gamma \mid cn \alpha\gamma\gamma$

$C \rightarrow \gamma\delta \mid \delta\delta \mid \gamma\gamma\delta \mid A\delta B \mid A\gamma\delta \mid \alpha B \mid \alpha\gamma \mid \alpha\gamma B \mid \alpha\delta \mid \alpha\gamma\gamma \mid \alpha\gamma\delta \mid \alpha A\delta \mid \alpha A\gamma\gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

M – MALTA

$G_M = (V_M, T_M, P_M, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_M = \{S, A, B, \alpha, \delta\}$

$T_M = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b\}$

P_M - skup produkcija:

$S \rightarrow cb \alpha A \delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

P – PORTUGAL

$G_P = (V_P, T_P, P_P, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_P = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_P = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r, \check{z}\}$

P_P - skup produkcija:

$S \rightarrow b\check{z} B\alpha A\gamma\gamma | cb C | bc C | crb \delta\alpha\delta$

$C \rightarrow \gamma\gamma\alpha | A\gamma\delta | A\delta\delta | \alpha\gamma\gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | P | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z$

$B \rightarrow 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9$

IS – ISLAND

$G_{IS} = (V_{IS}, T_{IS}, P_{IS}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{IS} = \{S, A, B, C, D, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{IS} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, Q, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, p, r, z, ž\}$

P_{IS} - skup produkcija:

$S \rightarrow bc D \mid ccr C \mid pb C \mid pž C \mid crb C \mid bz \alpha A \gamma$

$C \rightarrow \alpha \delta$

$D \rightarrow AB \mid A\gamma \mid A\delta \mid A\gamma\gamma \mid A\gamma\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid Q \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid W \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

N – NORVEŠKA

$G_N = (V_N, T_N, P_N, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_N = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_N = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, p, r, z, ž\}$

P_N - skup produkcija:

$S \rightarrow cb \gamma\gamma\gamma \mid cb \gamma\delta \mid cb A\delta \mid cb A\delta B \mid cb A\gamma\delta \mid cb C \mid cž \gamma\gamma \mid cž \gamma\delta \mid bcr \alpha\gamma \mid žc C \mid žp C$
 $\mid cz \alpha\gamma\delta$

$C \rightarrow \alpha\gamma\gamma \mid \alpha\gamma\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid W \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

S – ŠVEDSKA

$G_S = (V_S, T_S, P_S, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_S = \{S, A, B, C, D, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_S = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, p, r, z, \check{z}\}$

P_S - skup produkcija:

$S \rightarrow \check{z}c \gamma\gamma \mid \check{z}c \gamma\delta \mid \check{z}c \delta\delta \mid \mathbf{cb} A\gamma \mid \mathbf{cb} A\delta \mid \mathbf{cb} A\gamma\gamma \mid \mathbf{cb} \alpha A\delta \mid \mathbf{cb} C \mid \mathbf{crb} A\delta A \mid \mathbf{cp} \alpha\delta A$

$\mid \mathbf{c\check{z}} \alpha A\delta \mid \mathbf{c\check{z}} \alpha A\delta A \mid \mathbf{c\check{z}} C \mid \mathbf{cz} \alpha A\delta \mid \mathbf{bcr} \alpha A\delta$

$C \rightarrow DD \mid DDD \mid DDDD \mid DDDDD \mid DDDDDD$

$D \rightarrow A \mid B$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid W \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

FIN – FINSKA

$G_{FIN} = (V_{FIN}, T_{FIN}, P_{FIN}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{FIN} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{FIN} = \{A, \mathring{A}, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, p, r, \check{z}\}$

P_{FIN} - skup produkcija:

$S \rightarrow \mathbf{c\check{z}} \gamma\gamma \mid \mathbf{crb} A\gamma\alpha A \mid \mathbf{cb} A\delta \mid \mathbf{cb} AC \mid \mathbf{cb} \alpha\gamma\gamma \mid \mathbf{cb} \alpha C \mid \mathbf{bp} A\gamma\delta \mid \mathbf{bp} \alpha\gamma\gamma \mid \mathbf{bc} \alpha\delta$

$C \rightarrow AB \mid A\gamma \mid A\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid \mathring{A} \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid W \mid X \mid Y \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

EST – ESTONIJA

$G_{EST} = (V_{EST}, T_{EST}, P_{EST}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{EST} = \{S, A, B, C, D, E, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{EST} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, p, r, z, \check{z}\}$

P_{EST} - skup produkcija:

$S \rightarrow cb \gamma \alpha A \mid cb \delta \alpha \mid cb \delta \alpha A \mid cb \alpha E \mid cb C \mid c\check{z} \delta \alpha A \mid bc \delta \alpha A \mid bz \delta \alpha A \mid bp E \gamma \mid bp AEB \mid crb \alpha \gamma \gamma$

$C \rightarrow DDDD \mid DDDDD \mid DDDDDD$

$D \rightarrow A \mid B$

$E \rightarrow \alpha B \mid \alpha \gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

LV – LATVIJA

$G_{LV} = (V_{LV}, T_{LV}, P_{LV}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{LV} = \{S, A, B, C, D, E, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{LV} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r\}$

P_{LV} - skup produkcija:

$S \rightarrow cb B \mid cb \gamma \mid cb \alpha B \mid cb \alpha \gamma \mid cb AE \mid cb C \mid crb E \mid ccr E \mid ccr AE$

$C \rightarrow DDDD \mid DDDDD \mid DDDDDD$

$D \rightarrow A \mid B$

$E \rightarrow A\delta \mid A\gamma \gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid B \mid C \mid D \mid E \mid F \mid G \mid H \mid I \mid J \mid K \mid L \mid M \mid N \mid O \mid P \mid R \mid S \mid T \mid U \mid V \mid Z$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

LT – LITVA

$G_{LT} = (V_{LT}, T_{LT}, P_{LT}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{LT} = \{S, A, B, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{LT} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r, z\}$

P_{LT} - skup produkcija:

$S \rightarrow \mathbf{cb} \gamma\gamma\alpha \mid \mathbf{cb} \alpha\delta \mid \mathbf{cb} \alpha A\delta \mid \mathbf{crb} A\gamma\gamma \mid \mathbf{crb} A\gamma\delta \mid \mathbf{bz} A\delta\gamma$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

$A \rightarrow A \mid \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{D} \mid \mathbf{E} \mid \mathbf{F} \mid \mathbf{G} \mid \mathbf{H} \mid \mathbf{I} \mid \mathbf{J} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{L} \mid \mathbf{M} \mid \mathbf{N} \mid \mathbf{O} \mid \mathbf{P} \mid \mathbf{R} \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{T} \mid \mathbf{U} \mid \mathbf{V} \mid \mathbf{Z}$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

TR – TURSKA

$G_{TR} = (V_{TR}, T_{TR}, P_{TR}, S)$ S je početni nezavršni znak

$V_{TR} = \{S, A, B, C, \alpha, \gamma, \delta\}$

$T_{TR} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, R, S, T, U, V, Z, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, c, b, r, z, \check{z}\}$

P_{TR} - skup produkcija:

$S \rightarrow \check{\mathbf{z}}\mathbf{cr} \delta\delta \mid \mathbf{c}\check{\mathbf{z}} \gamma A\delta \mid \mathbf{cb} \gamma A\gamma\gamma \mid \mathbf{cb} C \mid \mathbf{cb} CB \mid \mathbf{cb} \gamma\alpha A\gamma \mid \mathbf{cb} \gamma\gamma \mid \mathbf{cb} \gamma\delta \mid \mathbf{cb} \delta\delta$

$S \rightarrow \mathbf{bc} \gamma A\gamma\gamma \mid \mathbf{bc} C \mid \mathbf{bz} C \mid \mathbf{zb} C \mid \mathbf{crb} C$

$C \rightarrow \gamma\alpha\delta$

$\alpha \rightarrow AA$

$\gamma \rightarrow BB$

$\delta \rightarrow \gamma B$

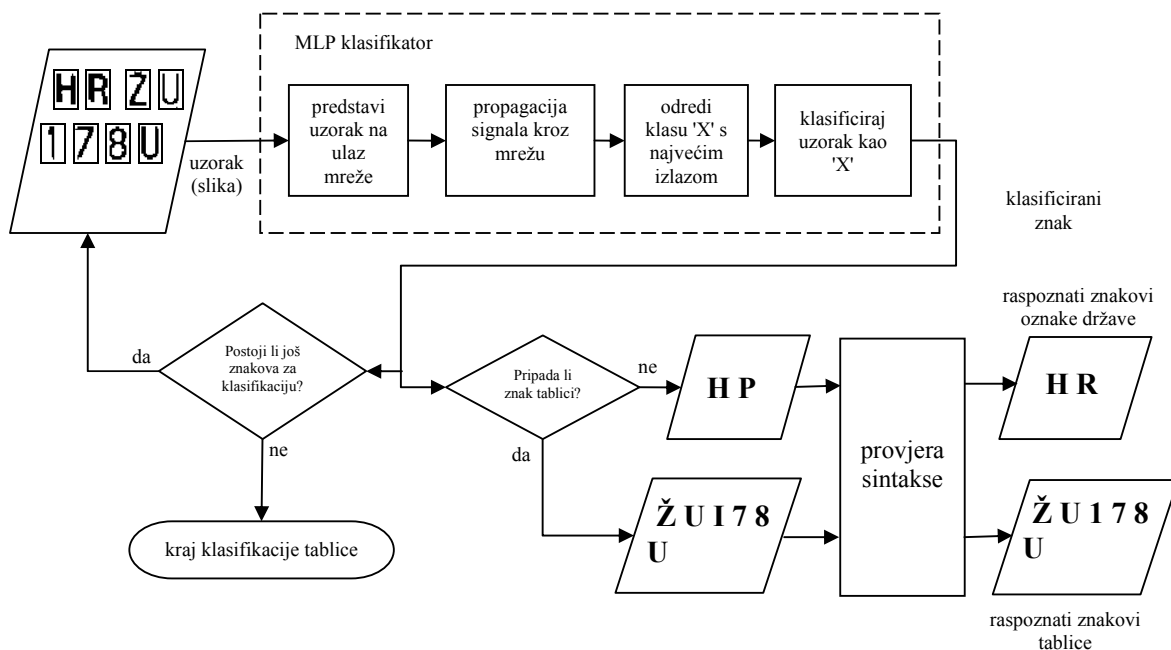
$A \rightarrow A \mid \mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{D} \mid \mathbf{E} \mid \mathbf{F} \mid \mathbf{G} \mid \mathbf{H} \mid \mathbf{I} \mid \mathbf{J} \mid \mathbf{K} \mid \mathbf{L} \mid \mathbf{M} \mid \mathbf{N} \mid \mathbf{O} \mid \mathbf{P} \mid \mathbf{R} \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{T} \mid \mathbf{U} \mid \mathbf{V} \mid \mathbf{Z}$

$B \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9$

7.3. Rezultati poboljšanja postupka klasifikacije korištenjem sintaksne analize

Sintaksna analiza korištena u postupku klasifikacije brojčano-slovnih znakova registarskih tablica i oznaka država, dovela je do poboljšanja uspješnosti pravilnog raspoznavanja i klasificiranja registarskih tablica.

Sintaksna provjera ugrađena je nakon same klasifikacije znakova, u svrhu provjere pojedinih sintaksnih pravila, kako oznaka države tako i formata samih tablica. Izlaz iz sintaksne provjere daje konačni rezultat raspoznavanja (slika 32.).

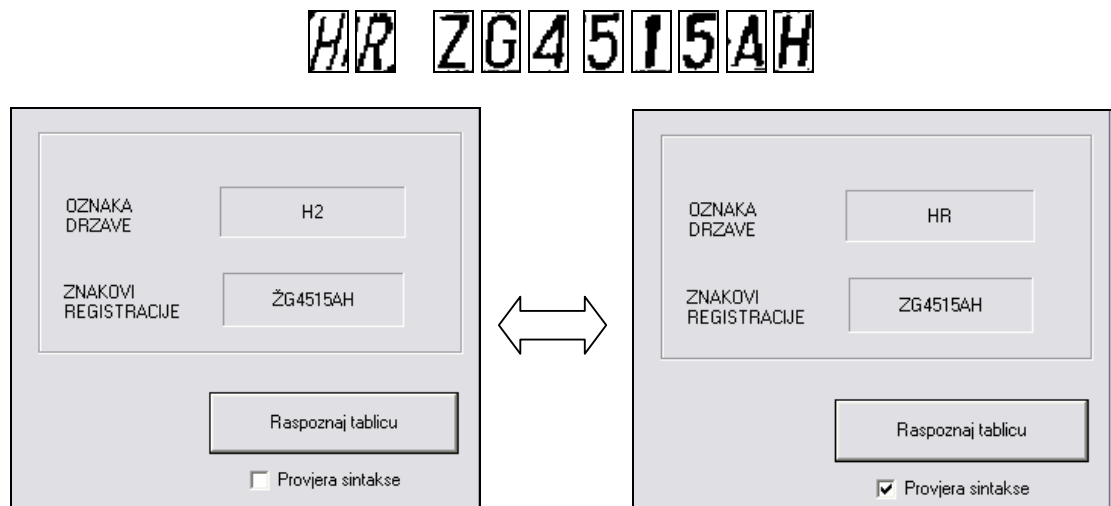


Slika 32. Blok shema postupka raspoznavanja znakova tablice i oznake države, uz primjenu sintaksne analize

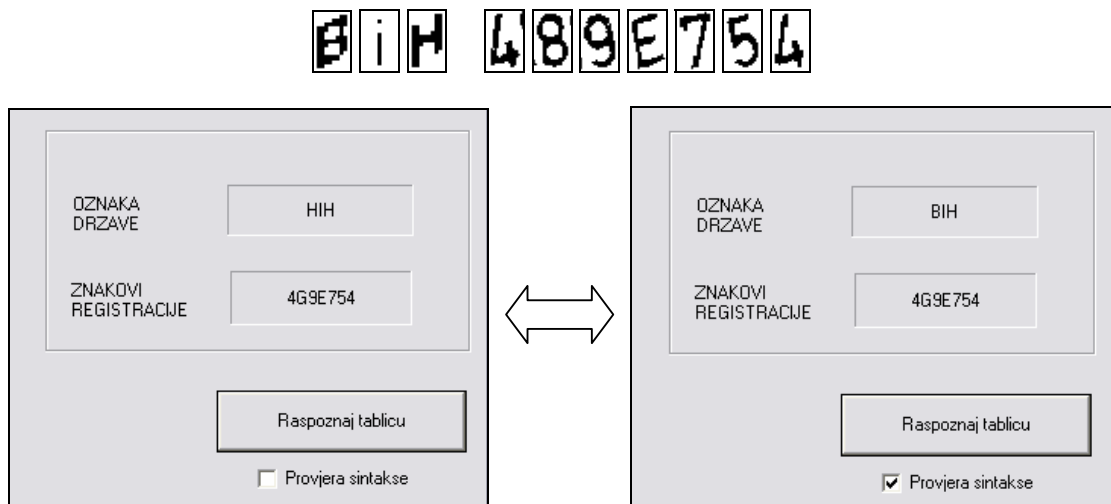
Korištenjem sintaksne provjere i zamjene neispravno klasificiranih znakova, od ukupno 407 registarskih tablica sa pripadnim oznakama države sustav sada pravilno klasificira sve znakove tablice i sve znakove oznake države u **68.8%** slučajeva (280 tablica i pripadnih oznaka država). Dobiveni rezultat uključuje postotak istodobno pravilno klasificiranih i znakova tablica i znakova oznake države. Uspješnost postupka raspoznavanja povećana je za **25.3%** u odnosu na raspoznavanje bez sintaksne provjere. Ako je, primjerice, sintaksnom analizom pravilno raspoznata oznaka države, no tablica je i dalje nepravilno raspoznata, i oznaka države i tablica smatraju se nepravilno raspoznatim.

Ako se uspješnost klasificiranja znakova uz sintaksnu provjeru promatra zasebno za znakove tablica, i zasebno za znakove oznake države, tada je ona nešto veća i iznosi za tablice **73.5%** (299 pravilno raspoznatih tablica). Uspješnost raspoznavanja samo tablica korištenjem sintaksne analize povećana je za **19.0%**. Za oznake država uspješnost raspoznavanja uz sintaksnu provjeru iznosi **87.7%** (od ukupno 243 točno je raspoznato 213 oznaka država). Uspješnost raspoznavanja samo oznaka država uz korištenje sintaksne provjere povećana je za **22.3%**.

Primjeri utjecaja sintaksne analize na postupak raspoznavanja broječno slovčanih znakova kroz usporedbu rezultata raspoznavanja bez sintaksne provjere i sa sintakskom provjerom (o kojemu se slučaju radi upućuje označena kućica kraj teksta *Provjera sintakse*), uz prikazane ulazne uzorke raspoznavanja:



primjer uspješne sintaksne provjere i zamjene nepravilno raspoznatih znakova točnima



primjer djelomično uspješne sintaksne provjere – 2. znak tablice i dalje je krivo raspoznat te je ovakova tablica i oznaka države i dalje proglašena nepravilno raspoznatom

ZG911CK

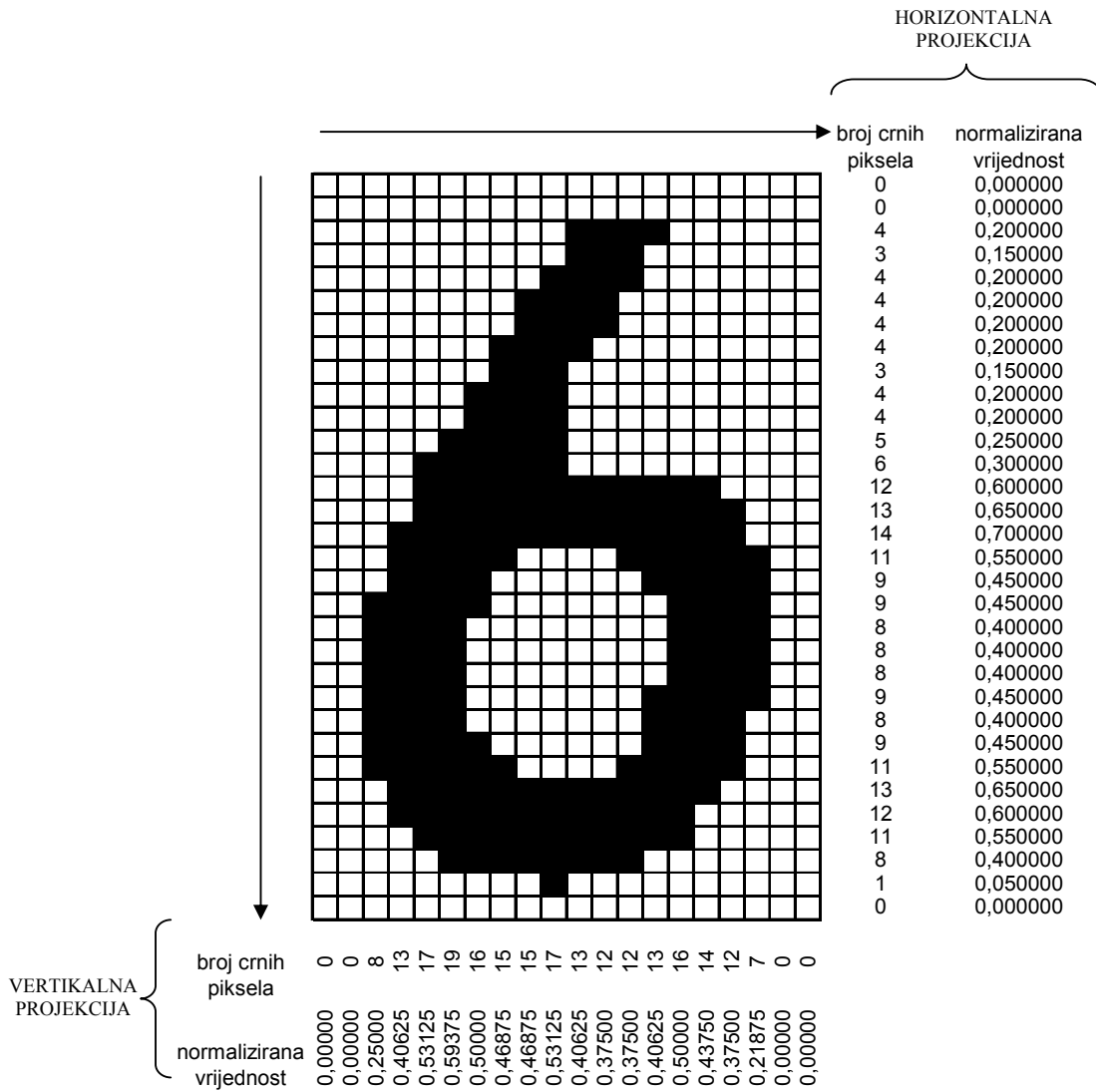
The diagram illustrates a successful syntax check without a known country code. It shows two states of a software interface. In the first state (left), the 'OZNAKA DRZAVE' field contains 'n/a' and the 'ZNAKOVI REGISTRACIJE' field contains 'ZG911CK'. The 'Provjera sintakse' checkbox is unchecked. In the second state (right), the 'ZNAKOVI REGISTRACIJE' field now contains 'ZG911CK' (with the second '1' appearing as a different character), and the 'Provjera sintakse' checkbox is checked. A double-headed arrow between the windows indicates the transition from the initial recognition to the successful syntax check.

primjer uspješne sintaksne provjere bez poznate oznake države

ZG990NL

The diagram illustrates an unsuccessful syntax check. It shows two states of a software interface. In the first state (left), the 'OZNAKA DRZAVE' field contains 'n/a' and the 'ZNAKOVI REGISTRACIJE' field contains 'ZL990NL'. The 'Provjera sintakse' checkbox is unchecked. In the second state (right), the 'ZNAKOVI REGISTRACIJE' field now contains 'ZL990NL' (with the second '9' appearing as a different character), and the 'Provjera sintakse' checkbox is checked. A double-headed arrow between the windows indicates the transition from the initial recognition to the unsuccessful syntax check.

Primjer neuspješne sintaksne provjere – 2. znak je krivo raspoznat kao L; no ne postoji pravilo kojim bi se L mogao zamijeniti nekim drugim slovom jer, samo u slučaju da se radi o hrvatskim tablicama (što ne znamo jer ne postoji oznaka države), moguće kombinacije sa slovom Z na prvom mjestu su 'ZG' i 'ZD'. Za ostale države, dopuštenih kombinacija je još više.



Slika 34. Primjer horizontalne i vertikalne projekcije uzorka znaka 6; normalizirane vrijednosti predstavljaju ulaz u MLP

Skup uzoraka za učenje S_U čini 20 različitih uzoraka svakog pojedinog znaka; skup uzoraka za testiranje S_T čini 10 različitih uzoraka, i vrijedi:

$$S_U \cap S_T = \emptyset$$

Skup uzoraka za provjeru S_p uspješnosti raspoznavanja čini ukupno 1326 uzoraka znakova (tablica 9.). Također vrijedi:

$$S_U \cap S_p = \emptyset$$

$$S_T \cap S_p = \emptyset$$

Eksperimentalnom analizom i promjenom parametara učenja (brzine učenja, momenta, broja uzoraka pojedinog znaka za učenje, broja epoha i sl.) dobiveni su slijedeći rezultati (tablica 9.):

klasa uzorka	8 neurona u skrivenom sloju (α - moment, η - brzina učenja)			
	broj uzoraka pojedinog znaka (skup za provjeru S_p)	5000 epoha, 20 znakova po uzorku, $\alpha = 0.02$, $\eta = 0.01$	1000 epoha, 20 znakova po uzorku, $\alpha = 0.15$, $\eta = 0.02$	5000 epoha, 20 znakova po uzorku, $\alpha = 0.15$, $\eta = 0.02$
0	141	53	60	53
1	160	121	119	118
6	130	95	93	96
8	152	131	134	124
B	66	41	43	37
D	50	32	29	28
G	282	197	213	202
I	51	22	23	21
O	9	6	4	6
R	285	230	226	214
ukupno:	1326	928	944	899
	točnost raspoznavanja:	69.9%	71.2%	67.8%

Tablica 9. Uspješnost raspoznavanja uzoraka skupa za provjeru, uz promjenu različitih parametara učenja; MLP konfiguracije 52x8x10

Iz tablice 9. vidljivo je da je i ovakvom izvedbom višeslojne neuronske mreže, uz preprocesiranje uzoraka, uspješnost raspoznavanja odabranih klasa uzoraka i dalje dosta mala (71.2%). Analizom krivih raspoznavanja utvrđeno je da se i dalje u većini slučajeva krivo raspoznaju 1 i I, 0 i O, i dr. Peti stupac tablice prikazuje pretreniranu mrežu koja slabije generalizira. Pokazala se tendencija da s povećanjem broja epoha učenja pada uspješnost raspoznavanja uzoraka skupa S_p . Iz prikazanih podataka također je vidljivo da uspješnost raspoznavanja ovisi i o umijeću odabira iznosa parametara brzine i momenta učenja. Uz nešto veće iznose parametara, mreža u drugom slučaju (četvrti stupac tablice 9.) i uz manji broj epoha učenja pokazuje veći postotak raspoznatih znakova u odnosu na učenje sa manjim iznosom parametara, a većim brojem epoha (treći stupac tablice 9.)

Daljnijim eksperimentiranjem željelo se provjeriti kako povećanje broja neurona u skrivenom sloju višeslojnog perceptrona utječe na uspješnost raspoznavanja. Prema [1], broj neurona skrivenog sloja trebao bi biti više nego 3 puta veći od broja neurona prvog sloja. Tako je u ovom slučaju odabran broj od 160 neurona skrivenog sloja. Isti skupovi uzoraka korišteni su za treniranje višeslojnog perceptrona konfiguracije $52 \times 160 \times 10$, sa nepromijenjenim ostalim značajkama mreže. Promjenom broja uzoraka pojedinog znaka kojim je mreža učena, dobiveni su rezultati prikazani tablicom 10.

klasa uzorka	160 neurona u skrivenom sloju (α - moment, η - brzina učenja)			
	broj uzoraka pojedinih znakova (skup za provjeru S_p)	1000 epoha, 20 znakova po uzorku, $\alpha = 0.15$, $\eta = 0.02$	5000 epoha, 20 znakova po uzorku, $\alpha = 0.15$, $\eta = 0.02$	1000 epoha, 3 znaka po uzorku, $\alpha = 0.15$, $\eta = 0.02$
0	141	71	61	55
1	160	129	129	26
6	130	103	105	90
8	152	119	115	85
B	66	44	43	35
D	50	34	32	24
G	282	241	236	183
I	51	32	35	46
O	9	4	5	3
R	285	235	236	149
ukupno:	1326	1012	997	696
	točnost raspoznavanja:	76.3%	75.2%	52.5%

Tablica 10. Uspješnost raspoznavanja uzoraka skupa za provjeru, uz promjenu broja uzoraka pojedinog znaka za učenje; MLP konfiguracije 52x160x10

Iz dobivenih rezultata (tablica 10.) uočeno je poboljšanje uspješnosti raspoznavanja korištenjem većeg broja čvorova skrivenog sloja, ali uz duže vrijeme učenja i povećanje kompleksnosti strukture MLP-a. I u ovoj konfiguraciji mreže, uočeno je da mreža s velikim brojem epoha teži pretreniranosti (četvrti stupac tablice 10.) i lošije generalizira. Značajno je uočiti da broj uzoraka pojedinog znaka koji se predstavlja mreži u procesu učenja znatno uječe na uspješnost raspoznavanja novih uzoraka (kako skupa za testiranje tako i skupa za provjeru). Tako peti stupac tablice 10. pokazuje da mreža učena sa 3 uzorka pojedinog znaka vrlo loše generalizira i u gotovo 50% slučajeva pogrešno raspoznaje novi uzorak.

Iz opisanog eksperimenta i analize dobivenih rezultata može se zaključiti da najveći utjecaj na uspješnost raspoznavanja ima odabir što većeg broja reprezentativnih uzoraka kao uzoraka za učenje. Rezultati upućuju na zaključak da povećanje broja uzoraka pojedinog znaka kojim se mreža uči, uzrokuje i povećanje uspješnosti raspoznavanja. Uz dovoljno veliki skup uzoraka za učenje mreži su predloženi reprezentativni uzorci te mreža može lakše i točnije klasificirati novi uzorak jer postoji veća vjerojatnost da će uzorak biti sličniji jednom od mnogobrojnih uzoraka svoje klase, nego uzorku neke druge klase. Problem i dalje predstavljaju međusobno vrlo slični uzorci (primjerice I i 1, ili 0 i O) koje čak ni ljudsko oko nije uvijek u stanju pravilno raspoznati, posebice u lošijim uvjetima.

9. Zaključak

Pokazuje se da realizacija postupka raspoznavanja brojčano-slovnih znakova registarskih tablica i oznaka država upotrebom višeslojnog perceptrona ima dosta mana i poteškoća. Korištenje MLP-a opisanog u ovom radu pokazuje određenu uspješnost u raspoznavanju pojedinih znakova, no kada su u pitanju nizovi znakova (registarskih tablica ili oznaka država) tada uspješnost raspoznavanja drastično pada. Razlog tomu je dijelom i duljina niza koji se promatra kao cjelina. Što je više znakova koji tvore određenu cjelinu, to je veća mogućnost nepravilno raspoznate cjeline jer čim je jedan znak krivo raspoznat, cjelina se također proglašava netočno raspoznatom.

Veliki utjecaj na uspješnost raspoznavanja ima veliki broj faktora: veličina i kvaliteta uzoraka skupa za učenje, veličina i kvaliteta skupa za testiranje, sama struktura višeslojnog perceptrona (odabir i definiranje broja čvorova, posebice skrivenog sloja), željena prihvatljiva greška raspoznavanja testnog skupa uzoraka, određivanje optimalnih parametara učenja (momenta i brzine učenja), algoritam učenja višeslojne mreže, protokol ispitivanja i odlučivanja prihvaća li se klasificirani znak ili ne, i dr.

Općenito govoreći, višeslojni perceptroni kojima se direktno prezentiraju binarni uzorci znakova uvelike ovise o kvaliteti samih uzoraka, te nisu invarijantni na promjene u uzorcima. Tako, primjerice, točni i pravilni uzorci bivaju točno klasificirani, no "ukošeni" ili nepotpuni, ili distorzirani uzorci bivaju razvrstani u pogrešne klase. Problemu bi se moglo doskočiti dodatnim pretprocesiranjem uzoraka – posebice izdvajanjem značajki svakog uzorka.

Izdvajanje značajki uzoraka može se izvesti na različite načine: korištenjem momenta, izdvajanjem karakterističnih vektora i kodiranjem [5], korištenjem horizontalne i vertikalne projekcije – ili još bolje, izdvajanjem broja povezanih komponenti (odnosno promjena iz crnog u bijeli slikovni element, za binarizirane slike) po svakoj horizontalnoj i vertikalnoj liniji slike uzorka [4]. Značajke predstavljaju skup karakterističnih osobina znakova, i njihovim pravilnim odabirom može se postići invarijantnost mreže na promjene među uzorcima, tj. mreža će i uz promjene u uzorcima (rotacije, translacije, distorzije i sl.) biti u mogućnosti ispravno klasificirati uzorke.

Upravo u upotrebi većeg broja različitih klasifikatora (MLP-a, višeslojnih neuronskih mreža), u sprezi sa izdvajanjem značajki na spomenute načine leži ključ uspješnijeg raspoznavanja brojčano-slovnih znakova registarskih tablica.

Ključan koncept je međusobna suradnja i povezanost različitih klasifikatorskih modula koji zajedničkim raspoznavanjem i kombinacijom rezultata mogu postići veću uspješnost raspoznavanja. Npr, moguće je definirati klasifikator kao sustav 2 višeslojna perceptrona, od kojih se prvome prezentiraju binarni uzorci, a drugome izdvojene značajke uzoraka. Izlazi oba MLP-a predstavljaju klase kojima ulazni znak pripada. Može se definirati metoda kojom konačni izlaz cijelog klasifikatora predstavlja skalarni produkt izlaznih vektora pojedinog MLP-a. Zatim se može odrediti prag prihvaćanja, te ako je vrijednost izlaza kombiniranog klasifikatora ispod praga – znak se proglašava neraspoznatljivim, a ako je iznad praga – tada se klasificira prema tom izlazu.

Daljnji koraci u istraživanju uključuju ispitivanje postupaka izdvajanja značajki, integriranja različitih zasebnih MLP modula u cjelinu, te razrađeniji pristup sintaksi pojedinih tablica. Također, potrebno je preciznije definirati načine razrješavanja situacija u kojima postoje znakovi oznake države, uz znakove tablice; zatim situacije u kojima su ti znakovi, iako točno klasificirani, ujedno i netočni (primjerice oznaka države je točno klasificirana kao D, a radi se o hrvatskim registarskim tablicama); situacije u kojima znakova oznake države nema ili ih nije moguće klasificirati te se sintaksna analiza mora temeljiti na zajedničkim, odnosno specifičnim značajkama formata tablica zemalja koje sustav treba pravilno raspoznati. Pojavljuje se ovdje i problem točnog definiranja prihvatljivih formata tablica (primjerice tablice starijih serija se mogu izuzeti iz razmatranja).

Analiza rezultata upućuje na zaključak da iako postoji poboljšanje postupka raspoznavanja korištenjem sintaksne analize, ona nije bez granica, tj. nije u mogućnosti riješiti sva pitanja. Veća težina problema leži u izvedbi što točnijeg višeslojnog perceptrona kao temelja cijelog sustava raspoznavanja, koji nastoji što uspješnije raspoznati uzorke pojedinih znakova.

10. Reference

- Lisa, F., Carrabina, J., Pérez-Vincente, C., Avellana, N., i Valderrama, E., 1993. "Two-bit Weights Are Enough To Solve Vehicle License Plate Recognition Problem", *Proceedings of the International Conference on Neural Networks*, Vol. 3
- ² Föhr, R., i Raus, M., 1994. "Automatisches Lesen amtlicher Kfz-Kennzeichen", *Elektronik*, No. 1
- ³ Yoo, J., Chun, B., i Shin, D., 1994. "A Neural Network for Recognizing Characters Extracted from Moving Vehicles", *Proceedings of World Congress on Neural Networks*, Vol. 3
- ⁴ Tanabe, K., Marubayashi, E., Kawashima, H., Nakanishi, T., i Shio, A., 1994. "PC-based Car License Plate Reading", *Image and Video Processing*, Vol. SPIE-2182
- ⁵ Abe, S., i Lan, M., 1993. "A Classifier Using Fuzzy Rules Extracted Directly From Numerical Data", *Proceedings of the Second IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vol. 2
- ⁶ Kanayama, K., Fujikawa, Y., Fujimoto, K., i Horino, M., 1991. "Development of Vehicle-License Number Recognition System using Real-Time Image Processing and its Application to Travel-Time Measurement", *Proceedings of the 41st IEEE Vehicular Technology Conference*, St. Louis
- ⁷ Hwang, C., Shu, S., Chen, W., Chen, Y., i Wen, K., 1992. "A PC-based License Plate Reader", *Proceedings Machine Vision Applications, Architectures and Systems Integration*, Vol. SPIE-1823
- ⁸ Kertész, A., Kertész, V., i Müller, T., 1994. "An On-line Image Processing System for Registration Number Identification", *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks*, Vol. 6
- ⁹ Davies, P., Emmott, N., i Ayland, N., 1990. "License Plate Recognition Technology for Toll Violation Enforcement", *Proceedings of IEEE Colloquium on Image analysis for Transport Applications*, Vol. 35
- ¹⁰ Williams, P., Kirby, H., Montgomery, F., i Boyle, R., 1989. "Evaluation of Video-Recognition Equipment for Number-Plate Matching", *Proceedings of the 2nd International Conference on Road Traffic Monitoring*
- ¹¹ Lotufo, R.A., Morgan, A.D., i Johnson, A.S., 1994. "Automatic Number-Plate Recognition", *Proceedings of the IEE Colloquium on Image Analysis for Transport Applications*, Vol. 35
- ¹² Rosenblatt, F., 1958., "The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain", *Psychological Review*, vol.65
- ¹³ Rumelhart, D.E., i J.L. McClelland, 1986., *Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition*, vol.1, Cambridge, MA: MIT Press
- ¹⁴ Minsky, M.L. i S.A. Papert, 1969. *Perceptrons*, Cambridge, MA: MIT Press
- ¹⁵ Parker, D.B., 1987. "Optimal algorithms for adaptive networks: Second order back propagation, second order direct propagation, and second order Hebbian learning", *IEEE 1st International Conference on Neural Networks*, vol.2, San Diego, CA.
- ¹⁶ Widrow B. i M.E.Hoff Jr. 1960., "Adaptive switching circuits", *IRE WESCON Convention Record*
- ¹⁷ Rumelhart, D.E., G.E. Hinton, i R.J. Williams, 1986a, "Learning representations of back-propagation errors", *Nature*, London, vol. 323
- ¹⁸ Watrous, R.L. 1987., "Learning algorithms for connectionist networks: Applied gradient methods for nonlinear optimization", *First IEEE International Conference on Neural Networks*, vol.2, San Diego, CA
- ¹⁹ Jacobs, R.A., 1988., "Increased rates of convergence through learning rate adaptation", *Neural Networks*, vol.1

²⁰ Kramer, A.H. i A. Sangiovanni-Vincentelli, 1989., "Efficient parallel learning algorithms for neural networks", *Advances in Neural Information Processing Systems*, vol.1, San Mateo, CA: Morgan Kaufmann

²¹ Pal, S.K., i Mitra, S., 1992., "Multilayer perceptron, fuzzy sets and classification", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 3., No. 15

²² Canuto, A., Howells, G. i Fairhurst, M., 1999., "Fuzzy multi-layer perceptron for binary pattern recognition.", *Seventh IEE International Conference on Image Processing and its Application*, Manchester, UK

11. Literatura

- [1] Lippmann, R. P., *An Introduction to Computing with Neural Nets*, IEEE ASSP Magazine, Vol. 3, No. 4, pp. 4-22, April 1987.
- [2] Hayes, A., *Artificial Neural Networks – An Introduction*, 1998.;
<http://www.acanz.co.uk/networks.php>
- [3] Haykin, S., "Neural Networks, A Comprehensive Foundation", Prentice Hall, Upper Saddle River, pp.156-255, New Jersey, 1999.
- [4] Jain, L. C., Lazzerini, B., "Knowledge-based Intelligent Techniques in Character Recognition", CRC Press LLC, Boca Raton, Florida, 1999., pp. 263-296
- [5] Vázquez, N., Nakano, M. i Pérez-Meana, H., 2001., "Automatic system for localization and recognition of vehicle plate numbers", *Journal of Applied Research and Technology*, Vol. 1, No. 1, pp. 63-77
- [6] Singh, S. i Amin, A. "Neural Network Recognition of Hand-printed Characters", *Neural Computing & Applications*, Springer-Verlag, London, 1999, vol. 8, no. 1, pp. 67-76
- [7] Canuto, A., Howells, G. i Fairhurst, M., 2000., "The use of confidence measures to enhance combination strategies in multi-network neuro-fuzzy systems", *Connection Science*, Vol. 12, No. 3 / 4, pp. 315-331
- [8] Parker, N. i Weeks, J., "The Interpol Guide to Vehicle Registration Plates", *Keesing Reference Systems B.V.*, Amsterdam, 2001.

12. Dodatak – popis priložene literature u digitalnom obliku

- (1) Vázquez, N., Nakano, M. i Pérez-Meana, H., 2001., "Automatic system for localization and recognition of vehicle plate numbers", *Journal of Applied Research and Technology*, Vol. 1, No. 1, pp. 63-77 (**5automatic.pdf**)
- (2) Singh, S. i Amin, A. "Neural Network Recognition of Hand-printed Characters", *Neural Computing & Applications*, Springer-Verlag, London, 1999, vol. 8, no. 1, pp. 67-76 (**NN recog hand-printed chars.pdf**)
- (3) Canuto, A., Howells, G. i Fairhurst, M., 2000., "The use of confidence measures to enhance combination strategies in multi-network neuro-fuzzy systems", *Connection Science*, Vol. 12, No. 3 / 4, pp. 315-331 (**confidence measures multi-network.pdf**)