SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 528

Statistička usporedba rezultata algoritama zasnovanih na evolucijskom računanju

Zoran Dodlek

Zagreb, svibanj, 2009.

Sadržaj

1. Uvod

Statistika je grana primijenjene matematike koja se bavi analizom podataka. Njome se mogu provjeriti značajke pojedinog algoritma i raditi usporedbe između različitih algoritama. Stručnjak, tj. osoba koja poznaje način funkcioniranja algoritma, uz pomoć statističke analize može pronaći ili način za poboljšanje algoritma ili neku pojavu koja predstavlja problem tom algoritmu. U radu su objašnjene osnove statističke analize i pojedini algoritmi zasnovani na evolucijskom računanju. Slijedi opis tema po poglavljima.

U drugom poglavlju opisana su dva algoritma. U prvom podnaslovu opisan je algoritam evolucijske strategije, a u drugom podnaslovu algoritam diferencijske evolucije. U zasebnom podnaslovu, objašnjen je svaki važan korak izvođenja pojedinog algoritma.

U trećem poglavlju dana je matematička podloga za uporabu statističkih alata. Objašnjen je svaki statistički pojam te su mu opisana svojstva.

U četvrtom poglavlju obrađene su statističke metode analize rezultata. Za prvi primjer, odabrana je jednostavna jednodimenzionalna funkcija na kojoj je demonstrirana uporaba statističkih alata. Naglašene su i moguće greške nastale neodgovarajućom uporabom alata. Za drugi i treći primjer su odabrane teže višedimenzionalne funkcije te je prikazana usporedba rezultata algoritma evolucijske strategije i diferencijske evolucije.

2. Algoritmi zasnovani na evolucijskom računanju

2.1 Evolucijske strategije

2.1.1 Uvod u ES

Razvoj evolucijskih strategija započeli su Ingo Rechenberg i Hans Paul Schwefel, studenti berlinskog Tehničkog fakulteta 60-ih godina 20. stoljeća. Evolucijske strategije (ES) jedna su od tehnika optimizacije iz područja evolucijskih algoritama. Bazirane su na prilagođavanju i evoluciji. Središnja ideja je stvaranje jednog ili λ potomaka operacijom mutacije iz jednog ili μ roditelja. U sljedeću se generaciju prenosi ili μ roditelja i λ potomaka ili samo λ potomaka. Roditelji i potomci predstavljaju potencijalno rješenje optimizacijskog problema. Potencijalna rješenja prikazuju se pomoću vektora realnih brojeva. Kako bi se došlo do rješenja određenog problema koristi se operator mutacije na samim vektorima. Operacija rekombinacije se rjeđe koristi. U sljedeću generaciju odlaze samo najbolje jedinke koje se odabiru procesom selekcije. Slijedi opis glavnih značajki evolucijskih strategija.

2.1.2 Pseudokod ES

t = 0;

generiraj početnu populaciju P(0);

evaluiraj P(0); // *provjeri dobrotu inicijalne populacije*

sve dok nije zadovoljen uvjet *završetka evolucijskog procesa* {

    izaberi najboljih *μ roditelja* iz P(t) i stavi ih u $P_p(t)$;

    iz $P_p(t)$ reproduciraj *λ potomaka* i stavi ih u $P_r(t)$;

    mutiraj $P_r(t)$;

    evaluiraj $P_r(t)$;

    ako se koristi plus strategija $P(t+1) = P_r(t) \cup P(t)$; (podnaslov 2.1.5)

    inače $P(t+1) = P_r(t)$;

    t = t + 1;

}

2.1.3 Selekcija

Postoji neka početna populacija jedinki. Uloga selekcije je čuvanje i prenošenje dobrih svojstava jedinki iz trenutne populacije na sljedeću generaciju jedinki. Njom se odabiru one jedinke koje će sudjelovati u reprodukciji u sljedećem koraku i time prenijeti svoj genetski materijal na sljedeću populaciju. Dakle, selekcija čuva dobre, a odbacuje loše jedinke iz populacije pomoću funkcije kojoj se traži optimum (tzv. funkcija dobrote).

2.1.4 Genetski operatori

Druga važna karakteristika evolucijskih strategija je reprodukcija. Općenito, reprodukcija je proces razmnožavanja u kojem sudjeluju jedinke koje su preživjele proces selekcije u prethodnoj populaciji. Razmnožavanje se obavlja pomoću genetskih operatora koji djeluju na same jedinke. Kod evolucijskih strategija najviše se primjenjuje operator mutacije, a nešto manje operator rekombinacije.

2.1.4.1 Mutacija

Mutacija je operator karakterističan za proces rekombinacije kod evolucijskih strategija. Ovaj operator je unarni operator jer djeluje samo nad jednom jedinkom. Mutacija je slučajna promjena jednog ili više gena kako bi se dobila genetska raznolikost sljedeće generacije rješenja. Najjednostavniji primjer mutacije je vjerojatnost da se neki bit u genetskom kodu promijeni iz svog originalnog stanja u neko novo stanje. Mutacija sprječava da neka rješenja unutar populacije postanu slična drugima i na taj način uspore ili potpuno zaustave proces evolucije. Mutacija kod evolucijskih strategija najčešće mijenja parametar x_i vektora x u broj izabran iz normalne razdiobe $N(x_i, \sigma_i^2)$.

Mutacija proširuje prostor potrage rješenja (eng. *search space*) što daje mutaciji jednu od najvažnijih osobina. Naime, ovim postupkom se omogućava izbjegavanje lokalnih minimuma. Ako cijela populacija završi u nekom lokalnom minimumu, mutacija će slučajnim pretraživanjem prostora (izborom elementa pomoću normalne razdiobe) moći pronaći bolje rješenje.

Kod evolucijskih strategija postoji važno pravilo koje je definirao Rechenberg prilikom svojih istraživanja. Pravilo se naziva pravilo 1/5 uspjeha. Samo pravilo predviđa optimalne performanse za vrijeme trajanja mutacija i to kada od svih mutacija koje se provedu 20% njih daje uspješne potomke. To znači da kvocijent broja uspješnih mutacija i ukupnog broja mutacija unutar neke populacije mora biti približno 1/5. Ukoliko je taj kvocijent manji od 1/5, vrijednost parametra σ u normalnoj razdiobi se mora smanjiti. Nasuprot tome, ukoliko je kvocijent veći od 1/5, vrijednost parametra σ se mora povećati.

2.1.4.2 Rekombinacija

Rekombinacija ili križanje je operator koji se rjeđe upotrebljava od operatora mutacije. U samom procesu rekombinacije stvaraju se nove jedinke koje sadrže kombinirane informacije sadržane u dva roditelja. Križanje je binarni operator jer djeluje na dvije jedinke u populaciji istovremeno. Dakle, djeca nasljeđuju svojstva svojih roditelja. To je najvažnija karakteristika križanja. Ako su roditelji dobri, tada je vjerojatnije da će potomak koji nastaje njihovim križanjem biti dobar, ako ne i bolji od svojih roditelja.

Križanje se definira proizvoljnim brojem prekidnih točaka. Ovisno o izboru tih točaka postoji nekoliko vrsta križanja:

- križanje u jednoj točki (eng. *one-point crossover*),
- križanje u dvije točke (eng. *two-point crossover*),
- križanje rezanjem i spajanjem (eng. *cut and splice crossover*),
- uniformno križanje (eng. *uniform crossover*) i
- polu-uniformno križanje (eng. *half-uniform crossover*).

2.1.5 Klasifikacija evolucijskih strategija

Evolucijske strategije dijele se s obzirom na različite tipove evolucijskih procesa koje oni koriste. Razlika je u samom izboru roditelja i uporabi rekombinacije. Broj roditelja u nekoj generaciji γ označen je sa μ, a broj potomaka u generaciji γ označen sa λ. Postoji sedam različitih tipova evolucijskih procesa koje koriste evolucijske strategije.

Oznaka "+" u imenu strategije označava da se pri selekciji razmatraju roditelji i djeca, dok oznaka "," označava da se pri selekciji razmatraju isključivo djeca.

2.1.5.1 (1+1)-ES

U populaciji postoje samo dvije jedinke. Jedna jedinka je roditelj iz kojeg nakon reprodukcije procesom mutacije nastaje potomak. Proces selekcije se obavlja između te dvije jedinke, a u sljedeću generaciju ide bolja jedinka.

2.1.5.2 (μ +1)-ES

Populacija se sastoji od μ jedinki roditelja. Mutacijom jedne odabrane jedinke nastaje jedan potomak koji se μ puta reproducira. Iz spojenog seta potomaka izabrane jedinke i trenutne populacije odbacuje se jedna jedinka koja ima najmanji faktor dobrote.

2.1.5.3 (μ + λ)-ES

Populacija se sastoji od μ jedinki roditelja, koji procesom mutacije daju λ potomaka, s time da vrijedi $\lambda > \mu$. Svaki od λ potomaka ima svoj faktor dobrote, kao što imaju i svi roditelji. Najboljih μ jedinki iz skupa roditelja i potomaka zajedno prelazi u sljedeću generaciju.

2.1.5.4 (μ , λ)-ES

U ovom slučaju iz μ jedinki roditelja nastaje λ potomaka procesom mutacije. Nužno mora nastati više djece nego što je roditelja, tj. formulom izraženo $\lambda > \mu$. Svaki od λ potomaka ima svoj faktor dobrote. Za razliku od prethodnog slučaja, ovdje se za prijelaz u novu generaciju promatraju samo potomci, dakle roditelji ne ulaze u izbor. Iz λ potomaka izabire se μ najboljih jedinki koje prelaze u sljedeću generaciju. Zato je nužan gore navedeni uvjet.

2.1.5.5 (μ/ρ , λ)-ES

Ova strategija je (μ, λ) strategija uz dodatak parametra ρ. Ovaj parametar označava broj jedinki roditelja koji se upotrebljava u procesu reprodukcije. Ukoliko je $\rho = 1$ prilikom reprodukcije koristi se samo jedna jedinka iz populacije roditelja, što znači da se upotrebljava operator mutacije. Ukoliko je $\rho = 2$, prilikom reprodukcije se koriste dvije jedinke iz populacije roditelja, što znači da se upotrebljava operator rekombinacije.

2.1.5.6 (μ/ρ + λ)-ES

Ova strategija je ($\mu + \lambda$) strategija uz ponovni dodatak parametra ρ. Za reprodukciju vrijede ista pravila kao i kod (μ/ρ , λ) strategije, a selekcija je analogna selekciji kod ($\mu + \lambda$)-ES.

2.1.5.7 (μ' , $\lambda'(\mu , \lambda)^{\gamma}$)-ES

Kod ove strategije se iz populacije roditelja veličine μ' kreira λ' potomaka i izolira na γ generacija. U svakoj od γ generacija stvara se λ potomaka od kojih samo μ najboljih prelazi u sljedeću generaciju. Nakon γ generacija izabiru se najbolje jedinke od γ izoliranih populacija i krug kreće ponovno sa λ' novih jedinki potomaka.

2.2 Diferencijska evolucija

2.2.1 Uvod u DE

Diferencijska evolucija (DE) je stohastički, populacijski, optimizacijski evolucijski algoritam koji su predstavili Storn i Price 1996. godine. Napravljen je za optimiziranje funkcija s realnim varijablama (eng. *real valued functions*).

Po svojim značajkama, DE je najbliža evolucijskoj strategiji (tip (μ/ρ + λ) – ES; μ = *Np*, ρ = 3; λ = *Np*). Veličina populacije *Np* ne mijenja se kroz generacije. Njihova glavna razlika leži u mutaciji jer mutacija kod DE djeluje na sve jedinke (vektore) u populaciji. Slučajno se odaberu 3 vektora, te napravi zbrajanje jednog vektora s težinskom razlikom druga dva vektora. Prema toj razlici (diferencija), DE je dobio ime. Rekombinacija DE je križanje u *D* točaka jer ovisi o slučajno odabranim realnim brojevima iz intervala [0,1].

Formulacija općenitog problema optimizacije glasi:

Za funkciju dobrote

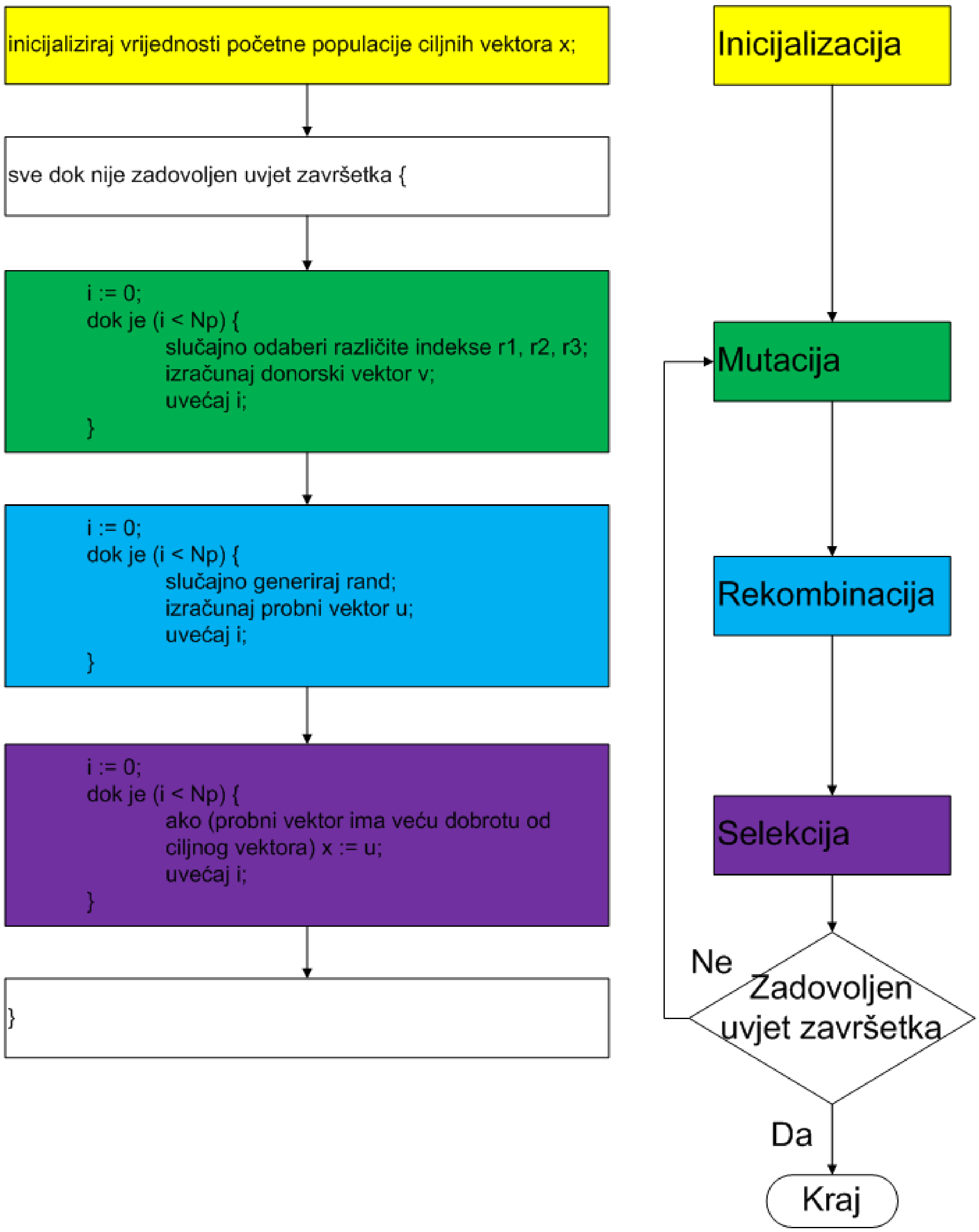
$$f : X \subseteq \mathbb{R}^D \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

gdje skup svih mogućih rješenja optimizacijskog problema *X* (eng. *feasible region*) nije prazan, problem traženja minimuma funkcije svodi se na traženje vektora $x^* \in X$ za kojeg vrijedi:

$$\begin{aligned} & f(x^*) \le f(x),\ \forall x \in X, \\ & f(x^*) \ne -\infty \end{aligned} \tag{1.2}$$

Funkcija dobrote (eng. *objective function, fitness function*) se ponekad naziva funkcija cijene (eng. *cost function*).

2.2.2 Pseudokod DE



Slika 2.1 Pseudokod DE

2.2.3 Notacija i algoritam ukratko

Traži se optimum funkcije f s D realnih parametara. Odabere se veličina populacije Np (koja mora biti veća od 3). Parametri vektora (eng. *parameter vectors*) su oblika:

$$x_{i,G} = \left[x_{1,i,G}, x_{2,i,G}, ...x_{D,i,G} \right], \; i = 1,2,...,Np. \tag{1.3}$$

gdje je G broj generacije.

Koriste se 3 vektora:

- Ciljni vektor (eng. *target vector*) $x_{i,G}$
- Donorski vektor (eng. *donor vector*) $v_{i,G}$
- Probni vektor (eng. *trial vector*) $u_{i,G}$

Donorski vektor $v_{i,G+1}$ nastaje zbrajanjem jednog slučajno odabranog vektora i težinske razlike dvaju slučajno odabranih vektora (mutacija). Probni vektor $u_{i,G+1}$ nastaje od elemenata ciljnog vektora $x_{i,G}$ i elemenata donorskog vektora $v_{i,G+1}$ (rekombinacija). Ciljni vektor $x_{i,G+1}$ nastaje selekcijom između probnog vektora $u_{i,G+1}$ i ciljnog vektora $x_{i,G}$ (selekcija).

2.2.4 Inicijalizacija

Definira se gornja i donja granica za svaki parametar $j \in [1, D]$ vektora $x_{i,1}$.

$$x_j^L \le x_{j,i,1} \le x_j^U \tag{1.4}$$

Svaki parametar vektora u cijeloj populaciji vektora postavi se na slučajno odabranu vrijednost na intervalu $\left[x_j^L, x_j^U \right]$. Dotični interval ima uniformnu razdiobu jer je odabir pojedine vrijednosti jednako vjerojatan.

2.2.5 Mutacija

Mutacija proširuje prostor potrage rješenja. Za dani parametar vektora $x_{i,G}$ slučajno se odaberu tri vektora $x_{r1,G}$, $x_{r2,G}$, $x_{r3,G}$. Jedan vektor ne smije biti odabran dvaput.

Izračuna se:

$$\begin{aligned} & v_{i,G+1} = x_{r1,G} + F * (x_{r2,G} - x_{r3,G}), \\ & \text{gdje je } r1, r2, r3 \in [1, 2, ..., Np], \; r1 \ne r2 \ne r3 \end{aligned} \tag{1.5}$$

$v_{i,G+1}$ je donorski vektor (eng. *donor vector*).

Mutacijski faktor F je konstanta na intervalu [0,2]. On kontrolira brzinu i robusnost potrage rješenja. Tj. manja vrijednost povećava vjerojatnost konvergencije, ali povećava i rizik zaustavljanja u lokalnom ekstremu.

2.2.5.1 Varijacije mutacije

Umjesto slučajno odabranog $x_{r1,G}$ odabere se najbolji.

Umjesto jednog oduzimanja, odabere se više vektora radi bolje varijacije:

$$v_{i,G+1} = x_{r1,G} + F*(x_{r2,G} - x_{r3,G} + x_{r4,G} - x_{r5,G}) \tag{1.6}$$

2.2.6 Rekombinacija

Probni vektor (eng. *trial vector*) $u_{i,G+1}$ nastaje od elemenata ciljnog vektora (eng. *target vector*) $x_{i,G}$ i elemenata donorskog vektora $v_{i,G+1}$. $\mathrm{I_{rand}}$ predstavlja slučajno odabran broj iz intervala [1,2,...,*D*]. Vjerojatnost križanja (eng. *crossover*) *CR* je konstanta na intervalu [0,1]. Parametar vektora $u_{i,G+1}$ s indeksom j = $\mathrm{I_{rand}}$ će biti jednak $v_{i,G+1}$. $\mathrm{I_{rand}}$ uvijek osigurava različitost $u_{i,G+1}$ i $x_{i,G}$ (tj. $u_{i,G+1} \neq x_{i,G}$) i onda kada je *CR* jednak nuli. Elementi donorskog vektora ulaze u probni vektor s vjerojatnošću *CR*.

$$u_{j,i,G+1} = \begin{cases} v_{j,i,G+1} & \text{ako } \mathrm{rand}_{j,i} \leq CR \text{ ili } j = \mathrm{I_{rand}} \\ x_{j,i,G} & \text{ako } \mathrm{rand}_{j,i} > CR \text{ i } j \neq \mathrm{I_{rand}} \end{cases}, \tag{1.7}$$

gdje su:

$i = 1, 2, ..., Np;$

$j = 1, 2, ..., D;$

$\mathrm{rand}_{j,i} \in [0,1].$

2.2.7 Selekcija

Ciljni vektor $x_{i,G}$ se uspoređuje s probnim vektorom $u_{i,G+1}$, te onaj s većom dobrotom (tj. manjom funkcijskom vrijednosti) prolazi u sljedeću generaciju

$$x_{i,G+1} = \begin{cases} u_{i,G+1} & \text{ako } f(u_{i,G+1}) \leq f(x_{i,G}) \\ x_{i,G} & \text{inače} \end{cases}, \quad i = 1, 2, ..., Np \tag{1.8}$$

Mutacija, rekombinacija i selekcija nastavljaju se sve dok nije zadovoljen neki uvjet zaustavljanja. Uvjet zaustavljanja može biti broj odrađenih generacija ili dovoljno dobra vrijednost funkcije cijene. U uvjetu zaustavljanja algoritma zadaje se potrebna točnost rezultata ili sigurnost ispravnosti rezultata. Npr. veći broj odrađenih generacija poboljšava ispravnost rezultata, ali potrebno vrijeme izvršavanja algoritma se produljuje.

3. Matematička statistika

3.1 Definicije

Uzorak. Neka je X slučajna varijabla. Za slučajne varijable $X_1,...,X_n$ kaže se da su nezavisne kopije slučajne varijable X, ako one imaju svojstva:

1. međusobno su nezavisne,
2. imaju razdiobu identičnu razdiobi slučajne varijable X.

Tako dobivena n-torku slučajnih varijabli $(X_1,...,X_n)$ se naziva uzorak. Ako je x_1 realizacija varijable X_1, x_2 realizacija varijable X_2 itd., tada se $(x_1,...,x_n)$ naziva vrijednost ili realizacija uzorka $(X_1,...,X_n)$. Broj n označava veličinu uzorka.

Statistika je slučajna varijabla $\Theta := g(X_1, X_2,..., X_n)$. Statistikom se naziva svaka funkcija koja ovisi o uzorku $X_1, X_2,..., X_n$, a ne ovisi (eksplicitno) o nepoznatom parametru. Neka je ϑ nepoznati parametar u populaciji X. Za statistiku Θ kaže se da je procjenitelj parametra ϑ. Vrijednost te statistike $\hat{\vartheta} = g(x_1, x_2,..., x_n)$ naziva se procjenom parametra ϑ. Za statistiku Θ kaže se da je nepristrani procjenitelj ili nepristrana statistika parametra ϑ, ukoliko vrijedi $E(\Theta) = \vartheta$.

3.2 Statistički pojmovi

Aritmetička sredina (oznake: $\bar{x}$, μ; formula (1.9)) je omjer zbroja vrijednosti numeričkog obilježja svih podataka i broja vrijednosti tih podataka.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1.9}$$

Zbroj odstupanja vrijednosti obilježja od aritmetičke sredine jednak je nuli. Zbroj kvadrata odstupanja vrijednosti obilježja od aritmetičke sredine je minimalan. Zbog tih svojstava, upotrebljava se kao nepristrana statistika za procjenu nepoznatog očekivanja a normalne populacije X (podnaslov 3.3).

Medijan (oznake: x, $\mu_{1/2}$, Me; formula (1.10)) je položajna srednja vrijednost koja niz uređen po veličini dijeli na dva jednakobrojna dijela. On ima svojstvo da je zbroj apsolutnih odstupanja varijable od medijana minimalan. Za simetričnu distribuciju, medijan je jednak aritmetičkoj sredini. Iako je manje učinkovit od aritmetičke sredine, manje je osjetljiv na veća odstupanja pojedinih podataka (eng. *outlier*).

$$x = \begin{cases} y_{(n+1)/2} & \text{ako je n neparan} \\ \frac{1}{2}(y_{n/2} + y_{1+n/2}) & \text{ako je n paran} \end{cases} \tag{1.10}$$

gdje je:

y niz podataka x uređenih po veličini

Varijanca (disperzija) (oznake: σ^2, D^2, s^2, S^2; formule (1.11) i (1.12)) je srednje kvadratno odstupanje vrijednosti podataka od njenog prosjeka. Ako su podaci identični, varijanca će biti jednaka nuli. Inače, bit će veća od nule. Oznake s^2 i S^2 koriste se da radi naglašavanja nepristranosti statistike jer je neki podatak izračunat iz uzorka.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \text{ ako je zadan } \bar{x} \tag{1.11}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \text{ ako je } \bar{x} \text{ izračunat iz podataka} \tag{1.12}$$

Standardna devijacija (oznake: σ, D, s, S) je statistički pojam koji označava mjeru raspršenosti podataka u skupu. Standardna devijacija se definira kao pozitivni drugi korijen iz varijance. Interpretira se kao prosječno odstupanje od prosjeka u apsolutnom iznosu.

Pravilo Čebiševa kaže da je najmanja proporcija članova bilo kojeg niza obuhvaćenih intervalom $\bar{x} \pm k\sigma,\ k > 1$ jednaka $(1-\frac{1}{k^2})$. Alternativno pisano:

$$P(\bar{x} - k\sigma < x < \bar{x} + k\sigma) \geq (1-\frac{1}{k^2}) \tag{1.13}$$

Pravilo Čebiševa vrijedi za bilo koju distribuciju podataka.

Aritmetička sredina i standardna devijacija uzorka se koriste za postupak standardizacije statističke varijable.

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \tag{1.14}$$

Standardizacija statističke varijable rezultira skupom vrijednosti čija je srednja vrijednost 0, a standardna devijacija 1. Time se omogućuje usporedba numeričkih nizova izraženih u istim mjernim jedinicama s različitim stupnjem varijabilnosti, usporedba raznorodnih numeričkih nizova i usporedba relativnog položaja podataka u jednom nizu i u različitim numeričkim nizovima. Vrijednosti jediničnih razdioba su prethodno izračunate i zapisane u tablici te se zbog toga radi dotična standardizacija. Te vrijednosti nazivaju se kvantili.

Neka je 0 < p < 1. Interval $[c_1, c_2]$ za koji vrijedi $P(c_1 < X < c_2) = p$ naziva se interval povjerenja reda (nivo pouzdanosti) p za slučajnu varijablu X.

Nivo značajnosti (signifikantnosti) α je jednak $\alpha = 1 - p$, gdje je p interval povjerenja. Pri tom za jednostrane kvantile vrijedi:

$$x_p = x_{1-\alpha}, \quad x_{1-p} = x_\alpha \tag{1.15}$$

a za dvostrane:

$$x_{\frac{1}{2}(1-p)} = x_{\alpha/2}, \quad x_{\frac{1}{2}(1+p)} = x_{1-\alpha/2} \tag{1.16}$$

Broj stupnjeva slobode (oznake: ss, df (eng. *degrees of freedom*), ν) definira se kao broj neovisnih opažanja umanjenih za broj k parametara potrebnih za određivanje danog pokazatelja. U formuli (1.12) k je jednak jedan jer je jedan podatak (u ovom slučaju aritmetička sredina) izračunat iz uzorka.

Normalna distribucija (razdioba) (Gaussova krivulja; oznaka $N(a,\sigma^2)$) je granična distribucija kada postoji mnogo podataka. Uobičajeno, za više od 300 podataka uzima se normalna razdioba. Normalna distribucija je simetrična, tj. površina s lijeve strane krivulje u odnosu na aritmetičku sredinu krivulje iznosi 50% sveukupne površine ispod krivulje. Ako se distribucija podataka otprilike ravna po normalnoj razdiobi, tada se 68% vrijednosti nalazi unutar jedne standardne devijacije od (aritmetičke) sredine, oko 95% vrijednosti unutar dvije standardne devijacije i oko 99.7% unutar tri standardne devijacije. Formulom izraženo:

$$\begin{aligned} &P(\overline{x}-\sigma < x < \overline{x}+\sigma) = 0.68 \\ &P(\overline{x}-2\sigma < x < \overline{x}+2\sigma) = 0.95 \\ &P(\overline{x}-3\sigma < x < \overline{x}+3\sigma) = 0.997 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Hi kvadrat razdioba (oznaka χ^2; eng. *chi-square distribution*).

Neka su $X_1,...,X_n$ nezavisne slučajne varijable s jediničnom normalnom razdiobom. Slučajna varijabla χ_n^2 definirana sa formulom

$$\chi_n^2 := X_1^2 + ... + X_n^2 \tag{1.18}$$

ima χ^2- razdiobu sa *n* stupnjeva slobode. Njeno očekivanje je $E(\chi_n^2) = n$, a disperzija $D(\chi_n^2) = 2n$. χ^2-test se koristi u slučaju da razdioba slučajne varijable nije poznata.

Studentova razdioba (oznaka t_n) se pojavljuje kod problema izračuna sredine uzorka normalno distribuirane populacije kada je veličina uzorka mala. Kada veličina uzorka teži u beskonačnost, tada studentova razdioba teži u oblik normalne razdiobe. Kod gore navedenog problema, nije poznata standardna devijacija populacije. Ona se mora izračunati (tj. procijeniti) iz danog uzorka. Slijedi matematička definicija:

Neka su $X, X_1,...,X_n$ nezavisne jedinične normalne varijable. Tada slučajna varijabla

$$t := \frac{X}{\sqrt{(X_1^2 + ... + X_n^2)/n}} = \frac{X}{\sqrt{\chi_n^2 / n}} \tag{1.19}$$

ima Studentovu razdiobu s *n* stupnjeva slobode. Valja primijetiti da su brojnik i nazivnik neovisni. Ova se razdioba javlja pri određivanju intervala povjerenja, i za očekivanje *a* i za disperziju σ^2 ukoliko su obje veličine nepoznate (podnaslov 3.3).

Korelacija predstavlja suodnos ili međusobnu povezanost između različitih pojava predstavljenih vrijednostima dvaju varijabli. Pri tome povezanost znači da je vrijednost jedne varijable moguće sa određenom vjerojatnošću predvidjeti na osnovu saznanja o vrijednosti druge varijable.

Pearsonov koeficijent korelacije (oznaka *r;* formula (1.21)) koristi se u slučajevima kada između varijabli promatranog modela postoji linearna povezanost i neprekidna normalna distribucija.

$$SS_{XX} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2; \; SS_{YY} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2; \; SS_{XY} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) \tag{1.20}$$

$$r = \frac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_{XX} * SS_{YY}}} \tag{1.21}$$

Iz tih formula proizlazi da se koeficijent korelacije *r* uvijek nalazi u intervalu [-1, 1]. Ako je *r* jednak 1, tada dvije promatrane varijable imaju savršenu pozitivnu linearnu povezanost. Ako je *r* jednak -1, tada dvije promatrane varijable imaju savršenu negativnu linearnu povezanost. Ako je *r* jednak nuli, tada dvije promatrane varijable nisu povezane. Ovisno kojoj od triju rečenih vrijednosti je *r* bliži, dvije promatrane varijable imaju dotičnu povezanosti. Ako je *r* u intervalu [-0.6, -0.4] ili [0.4, 0.6], tada su potrebni dodatni testovi radi shvaćanja povezanosti dotične dvije varijable. Za nezavisne slučajne varijable uvijek je *r* jednak nuli. Obrat nije istinit, tj. ako je *r* jednak nuli (varijable su nekorelirane) ne moraju nužno biti i nezavisne. Ovaj postupak se najčešće provodi za izradu grafa evolucije.

3.3 Intervalna procjena za očekivanje uz nepoznatu disperziju

Pretpostavi se da X ima normalnu razdiobu $N(a, \sigma^2)$. Statistika za očekivanje je

$$\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \tag{1.22}$$

Razdioba je Studentova:

$$T = \frac{\overline{X} - a}{S / \sqrt{n}} \tag{1.23}$$

Koraci izračuna dotične intervalne procjene:

1. Zadaje se nivo pouzdanosti p i odredi $\alpha = 1 - p$.
2. Iz tablica kvantila Studentove razdiobe s n – 1 stupnjeva slobode, odredi se odgovarajući kvantil $t_{1-\alpha/2}$.
3. Izračuna se procjena sredine $\overline{x}$ iz uzorka $x_1, ..., x_n$.
4. Izračuna se procjena disperzije $\hat{s}^2$ iz uzorka $x_1, ..., x_n$.
5. Izračuna se $t_{1-\alpha/2} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}$

Interval povjerenja je

$$P(\overline{x} - t_{1-\alpha/2} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \le a \le \overline{x} + t_{1-\alpha/2} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}) = p \tag{1.24}$$

Ako bi disperzija bila poznata, umjesto kvantila Studentove razdiobe koristili bi se kvantili normalne razdiobe.

3.4 Testiranje parametarskih hipoteza uz uporabu T – testa

Razdioba populacije je normalna s nepoznatom disperzijom σ^2. Pretpostavi se (null) hipoteza koja se odnosi na vrijednost očekivanja:

$$H_0 \quad ... \quad a = a_0 \tag{1.25}$$

Statistika na temelju koje će se napraviti test je

$$T = \frac{\overline{X} - a_0}{S / \sqrt{n}} \tag{1.26}$$

Ako je hipoteza H_0 istinita, onda je razdioba ove statistike Studentova, s n - 1 stupnjem slobode. Studentova razdioba je simetrična, pa su i kvantili simetrični ($t_\alpha = -t_{1-\alpha}$).

Zadaje se nivo značajnosti α. Na temelju njega, odredi se kvantil

1. $t_{1-\alpha}$, u slučaju jednostranih alternativa, te
2. $t_{1-\alpha/2}$, u slučaju dvostranih alternativa.

Izračuna se vrijednost $\hat{t}$ statistike dobivena iz uzorka. Test glasi:

1. Ako je $\hat{t} > t_{1-\alpha}$ (za desnu alternativu), ili $\hat{t} < -t_{1-\alpha}$ (za lijevu alternativu), hipoteza H_0 se odbacuje.
2. Ako je $\left|\hat{t}\right| > t_{1-\alpha/2}$ (za dvostranu alternativu), hipoteza H_0 se odbacuje.

U protivnom se ta hipoteza ne može odbaciti (tj. prihvaća se).

Ako bi disperzija bila poznata, umjesto kvantila Studentove razdiobe koristili bi se kvantili normalne razdiobe. Taj test se naziva U – test.

3.5 Usporedba dviju populacija uz nepoznatu disperziju

Pretpostavlja se da su uzorci $X_1,...,X_n$ i $Y_1,...,Y_n$ nezavisni s normalnom razdiobom uz jednaku disperziju čiji iznos nije poznat.

U tom slučaju, računa se procjena disperzija iz uzorka:

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(Y_i - \overline{Y})^2. \tag{1.27}$$

Zajednička disperzija uzorka računa se kao težinska sredina ovih disperzija:

$$S_Z^2 = \frac{1}{n+m-2}\left[(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2\right] \tag{1.28}$$

Pretpostavi se da je hipoteza H_0 o jednakosti očekivanja istinita. U tom slučaju, može se koristiti statistika

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_Z}\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \tag{1.29}$$

Njezina je razdioba Studentova s $n + m$ – 2 stupnjeva slobode.

Daljnji koraci su identični kao kod testiranja parametarskih hipoteza uz uporabu T – testa (podnaslov 3.4).

4. Primjeri statističke obrade podataka

4.1 Primjer 1

Traži se globalni minimum funkcije $f(x) = x^2$. Funkcija je jednodimenzionalna i zato se lako mogu napraviti potrebni testovi i statistička obrada. Parabola je trivijalni oblik sferne funkcije (1.30) (tzv. prva DeJongova funkcija) koja se koristi kao jedna od standardnih testnih funkcija u području optimiranja funkcija s realnim varijablama. Vektor x_i je oblika kao u formuli (1.3).

$$f_1(x_i) = \sum_{j=1}^{D} x_{j,i}^2 \tag{1.30}$$

Funkcija (1.30) je glatka, unimodalna i simetrična te ne predstavlja poteškoću niti jednom optimizacijskom algoritmu. Na njoj se mjeri općenita efikasnost algoritma.

Pokrene se program baziran na algoritmu diferencijska evolucija (podnaslov 2.2) sa sljedećim postavkama:

$$\begin{aligned} &F = 0.9; D = 1; Np = 30; CR = 0.9; br\_generacija = 100; \\ &dg[0] = -10; gg[0] = 90 \end{aligned} \tag{1.31}$$

To znači da je veličina populacije 30 jedinki (vektora usmjerenih od točke ishodišta do točke vrijednosti), broj iteracija (generacija) je 100, a inicijalni interval je [-10, 90]. Populacija predstavlja uzorak podataka, tj. uzorak je veličine 30. U tablici 4.1 nalazi se broj generacije i dotični rezultati izvođenja.

Tablica 4.1 Rezultati izvođenja programa u određenoj generaciji

	broj generacije			
indeks jedinke	1	10	50	100
1	67.105	-0.303	5.5E-07	1.1E-14
2	61.752	-1.220	-5.7E-08	1.1E-14
3	28.887	1.247	1.2E-06	4.2E-14
4	0.938	0.938	-4.2E-07	1.6E-14
5	34.276	1.844	-1.0E-06	-6.7E-14
6	26.174	-1.497	7.7E-08	1.5E-14
7	3.611	0.244	3.4E-07	-2.6E-14
8	75.327	0.930	5.7E-09	-2.1E-14
9	7.814	-0.846	2.0E-07	-6.0E-14
10	38.314	-1.148	-4.5E-07	9.0E-15
11	0.373	0.373	-2.7E-07	7.0E-15
12	-8.834	-0.490	-5.4E-07	-1.2E-14
13	24.941	-0.805	2.8E-07	-3.4E-14
14	43.975	-0.064	2.7E-07	-5.1E-14
15	59.350	1.216	6.6E-07	-3.4E-14
16	45.156	1.890	1.4E-06	5.7E-14
17	-6.142	3.595	7.9E-08	1.0E-14

	broj generacije			
indeks jedinke	1	10	50	100
18	73.673	0.383	7.5E-08	-2.7E-14
19	73.618	-0.022	-3.8E-07	5.6E-14
20	54.205	0.555	-2.2E-07	3.0E-15
21	25.405	-0.776	-2.3E-07	5.0E-15
22	60.168	-0.805	1.3E-06	8.7E-14
23	-0.973	-0.335	3.7E-07	-1.9E-14
24	38.314	-0.579	1.5E-07	5.5E-14
25	46.938	-0.655	2.7E-07	-8.0E-15
26	9.346	0.231	-3.9E-07	1.0E-14
27	4.115	-0.385	7.9E-08	-6.0E-14
28	83.332	0.288	4.2E-07	7.0E-15
29	76.550	0.220	1.5E-06	-3.3E-14
30	-9.991	-0.274	-4.3E-07	-4.7E-14

U tablici 4.1 pod prvom generacijom nalaze se upravo inicijalizirani vektori. Prema algoritmu, oni su raspoređeni uniformno na intervalu [-10, 90]. Očekivanje uniformne razdiobe je sredina intervala. Matematički rečeno:

$$E(X) = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} = \frac{90 + (-10)}{2} = 40 \tag{1.32}$$

Kako se algoritam izvršava, distribucija podataka se sve manje ravna po uniformnoj distribuciji, a sve više po normalnoj distribuciji s sredinom u minimumu zadane funkcije.

4.1.1 Primjena osnovnih statističkih alata

Tablica 4.2 Aritmetička sredina u određenoj generaciji

aritmetička sredina			
1	10	50	100
34.59	0.13	1.6E-07	-3.3E-15

Aritmetičke sredine u tablici 4.2 izračunaju se po formuli (1.9). Primjerice, aritmetička sredina u prvoj generaciji:

$$\bar{x} = \frac{67.105 + 61.752 + ... + (-9.991)}{30} = 34.59 \tag{1.33}$$

Tablica 4.3 Uređeni niz podataka iz prve generacije

indeks	uređeni niz	indeks jedinke
1	-9.991	30
2	-8.834	12
3	-6.142	17
4	-0.973	23
5	0.373	11

indeks	uređeni niz	indeks jedinke
6	0.938	4
7	3.611	7
8	4.115	27
9	7.814	9
10	9.346	26
11	24.941	13
12	25.405	21
13	26.174	6
14	28.887	3
15	**34.276**	**5**
16	**38.314**	**10**
17	38.314	24
18	43.975	14
19	45.156	16
20	46.938	25
21	54.205	20
22	59.350	15
23	60.168	22
24	61.752	2
25	67.105	1
26	73.618	19
27	73.673	18
28	75.327	8
29	76.550	29
30	83.332	28

U tablici 4.3 nalazi se uređeni (ulazno sortiran) niz podataka s dodatno označenim brojevima koji se koriste za izračun medijana.

Tablica 4.4 Medijan u određenoj generaciji

medijan			
1	10	50	100
36.30	-0.04	7.9E-08	4.0E-15

Medijani u tablici 4.4 izračunaju se po formuli (1.10). Izračun medijana u prvoj generaciji:

$$x = \frac{1}{2}(y_{n/2} + y_{1+n/2}) = \frac{1}{2}(y_{15} + y_{16}) = \frac{34.276 + 38.314}{2} = 36.30 \tag{1.34}$$

Standardne devijacije u tablici 4.6 izračunaju se po formuli (1.12). Izračun standardne devijacije u prvoj generaciji uz pomoć tablice 4.5:

$$s = \sqrt{\frac{1057.2 + 737.8 + ... + 1987.5}{(30-1)}} = 29.54 \tag{1.35}$$

Tablica 4.5 Kvadratno odstupanje vrijednosti podatka od njenog prosjeka u određenoj generaciji

	$(x_i - \bar{x})^2$			
i	1	10	50	100
1	1057.2	0.183	1.5E-13	2.0E-28
2	737.8	1.810	4.8E-14	2.0E-28
3	32.5	1.259	1.1E-12	2.0E-27
4	1132.5	0.661	3.4E-13	3.7E-28
5	0.1	2.955	1.4E-12	4.1E-27
6	70.8	2.632	7.1E-15	3.3E-28
7	959.7	0.014	3.3E-14	5.2E-28
8	1659.4	0.649	2.4E-14	3.1E-28
9	717.0	0.943	1.8E-15	3.2E-27
10	13.9	1.620	3.7E-13	1.5E-28
11	1170.8	0.062	1.9E-13	1.1E-28
12	1885.7	0.378	4.9E-13	7.6E-29
13	93.1	0.864	1.4E-14	9.4E-28
14	88.1	0.036	1.2E-14	2.3E-27
15	613.0	1.190	2.5E-13	9.4E-28
16	111.6	3.116	1.5E-12	3.6E-27
17	1659.2	12.042	6.8E-15	1.8E-28
18	1527.4	0.067	7.6E-15	5.6E-28
19	1523.1	0.021	2.9E-13	3.5E-27
20	384.7	0.185	1.4E-13	3.9E-29
21	84.4	0.811	1.5E-13	6.8E-29
22	654.2	0.864	1.3E-12	8.1E-27
23	1264.7	0.212	4.2E-14	2.5E-28
24	13.9	0.496	5.3E-17	3.4E-27
25	152.5	0.609	1.1E-14	2.2E-29
26	637.3	0.011	3.0E-13	1.8E-28
27	928.8	0.260	6.8E-15	3.2E-27
28	2375.7	0.027	6.8E-14	1.1E-28
29	1760.6	0.009	1.8E-12	8.8E-28
30	1987.5	0.159	3.5E-13	1.9E-27

Tablica 4.6 Standardna devijacija u određenoj generaciji

standardna devijacija			
1	10	50	100
29.54	1.09	6.0E-07	3.8E-14

4.1.2 Primjena intervalne procjene za očekivanje uz nepoznatu disperziju

Primjenjuju se koraci iz podnaslova 3.3.

4.1.2.1 Na rezultatima iz desete generacije

1. Zadan je nivo pouzdanosti $p = 0.9$. Izračuna se $\alpha = 1 - p = 0.1$
2. Slučajna varijabla T (formula (1.23)) ima Studentovu razdiobu s 29 stupnjeva slobode jer je veličina uzorka jednaka 30. Odgovarajući kvantil je $t_{1-\alpha/2} = t_{0.95} = 1.699$.
3. $\bar{x} = 0.1251$ iz tablice 4.2 (drugi stupac).
4. $\hat{s} = 1.0851$ iz tablice 4.6 (drugi stupac).
5. $t_{1-\alpha/2} \dfrac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 1.699 \dfrac{1.0851}{\sqrt{30}} = 0.3366$

Interval povjerenja je:

$$\begin{aligned} &P(0.1251 - 0.3366 \le a \le 0.1251 + 0.3366) = 0.9 \\ &P(-0.2115 \le a \le 0.4617) = 0.9 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Nakon samo deset generacija, algoritam je smanjio područje pretraživanja rješenja na interval (1.36) uz nivo pouzdanosti 0.9. Valja primijetiti da se točno rješenje nalazi unutar dotičnog intervala što je izravno povezano s velikim nivoom pouzdanosti.

4.1.2.2 Na rezultatima iz pedesete generacije

1. Zadan je nivo pouzdanosti $p = 0.5$. Izračuna se $\alpha = 1 - p = 0.5$
2. Slučajna varijabla T (formula (1.23)) ima Studentovu razdiobu s 29 stupnjeva slobode jer je veličina uzorka jednaka 30. Odgovarajući kvantil je $t_{1-\alpha/2} = t_{0.75} = 0.683$.
3. $\bar{x} = 1.62 * 10^{-7}$ iz tablice 4.2 (treći stupac).
4. $\hat{s} = 6.01 * 10^{-7}$ iz tablice 4.6 (treći stupac).
5. $t_{1-\alpha/2} \dfrac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 0.683 \dfrac{6.01 * 10^{-7}}{\sqrt{30}} = 7.494 * 10^{-8}$

Interval povjerenja je:

$$\begin{aligned} &P(1.62 * 10^{-7} - 0.75 * 10^{-7} \le a \le 1.62 * 10^{-7} + 0.75 * 10^{-7}) = 0.5 \\ &P(0.87 * 10^{-7} \le a \le 2.37 * 10^{-7}) = 0.5 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Nakon pedeset generacija, algoritam je smanjio područje pretraživanja rješenja na interval (1.37) uz nivo pouzdanosti 0.5. Valja primijetiti da se točno rješenje nalazi izvan dotičnog intervala što je izravno povezano s malim nivoom pouzdanosti.

4.1.3 Primjena testiranja parametarskih hipoteza uz uporabu T – testa

Primjenjuju se koraci iz podnaslova 3.4.

4.1.3.1 Na rezultatima iz prve generacije

Radi primjera, pretpostavi se da je razdioba normalna. Zadan je nivo značajnosti $\alpha = 0.2$.

Pretpostavlja se hipoteza prema formulama (1.25) i (1.32):

$$H_0 \quad ... \quad a = a_0 = 40 \tag{1.38}$$

Njezina alternativa je dvostrana:

$$H_1 \quad ... \quad a \neq 40 \tag{1.39}$$

Slučajna varijabla T (formula (1.26)) ima Studentovu razdiobu s 29 stupnjeva slobode jer je veličina uzorka jednaka 30. Odgovarajući kvantil je $t_{1-\alpha/2} = t_{0.9} = 1.311$. Vrijednost dobivena iz uzorka, uz istinitost hipoteze H_0, jest

$$\hat{t} = \frac{\overline{x} - a_0}{\hat{s}}\sqrt{n} = \frac{34.5905 - 40}{29.5351}\sqrt{30} = -1.003 \tag{1.40}$$

Ova je vrijednost (po apsolutnom iznosu) manja od kritične. Zato se hipoteza H_0 ne može odbaciti. Ako se dotična hipoteza odbaci, učinjena pogreška mogla bi biti veća od 0.2.

4.1.3.2 Na rezultatima iz desete generacije

Zadan je nivo značajnosti $\alpha = 0.001$. Pretpostavlja se hipoteza:

$$H_0 \quad ... \quad a = a_0 = 1 \tag{1.41}$$

Njezina alternativa je dvostrana:

$$H_1 \quad ... \quad a \neq 1 \tag{1.42}$$

Slučajna varijabla T (formula (1.26)) ima Studentovu razdiobu s 29 stupnjeva slobode jer je veličina uzorka jednaka 30. Odgovarajući kvantil je $t_{1-\alpha/2} = t_{0.9995} = 3.659$. Vrijednost dobivena iz uzorka, uz istinitost hipoteze H_0, jest

$$\hat{t} = \frac{\overline{x} - a_0}{\hat{s}}\sqrt{n} = \frac{0.1251 - 1}{1.0851}\sqrt{30} = -4.416 \tag{1.43}$$

Ova je vrijednost (po apsolutnom iznosu) veća od kritične. Zato se hipoteza H_0 mora odbaciti. To se i moglo očekivati jer minimum funkcije nije u jedinici.

4.1.3.3 Na rezultatima iz stote generacije

Zadan je nivo značajnosti $\alpha = 0.8$. Pretpostavlja se hipoteza:

$$H_0 \quad ... \quad a = a_0 = 0 \tag{1.44}$$

Njezina alternativa je dvostrana:

$$H_1 \quad ... \quad a \neq 0 \tag{1.45}$$

Slučajna varijabla T (formula (1.26)) ima Studentovu razdiobu s 29 stupnjeva slobode. Odgovarajući kvantil je $t_{1-\alpha/2}=t_{0.6}=0.256$. Vrijednost dobivena iz uzorka, uz istinitost hipoteze H_0, jest

$$\hat{t}=\frac{\overline{x}-a_0}{\hat{s}}\sqrt{n}=\frac{-3.27*10^{-15}-0}{3.8*10^{-14}}\sqrt{30}=-0.471 \tag{1.46}$$

Ova je vrijednost (po apsolutnom iznosu) veća od kritične. Zato se hipoteza H_0 mora odbaciti. Naime, uzet je previsok nivo značajnosti, a devijacija je još uvijek prevelika da bi se interval vrijednosti podataka mogao uklopiti unutar dotične Studentove razdiobe s gore navedenim parametrima.

Ako se za nivo značajnosti uzme $\alpha=0.6$, tada je odgovarajući kvantil $t_{1-\alpha/2}=t_{0.7}=0.530$. Tada se hipoteza H_0 ne može odbaciti jer bi pogreška mogla bi biti veća od 0.6 što je podosta velika pogreška.

4.1.4 Primjena usporedbe dviju populacija uz nepoznatu disperziju

Primjenjuju se koraci iz podnaslova 3.5.

4.1.4.1 Na rezultatima iz desete i pedesete generacije

Zadan je nivo značajnosti $\alpha=0.01$.

Slučajna varijabla T (formula (1.29)) ima Studentovu razdiobu s 58 stupnjeva slobode jer je veličina dvaju uzoraka jednaka 30 iz čega proizlazi da je sveukupna veličina uzorka jednaka 60. Budući da su dva podatka izračunata, slijedi da je broj stupnjeva slobode jednak 58. Odgovarajući kvantil je $t_{1-\alpha/2}=t_{0.995}=2.66$. Prema formuli (1.28) slijedi izračun:

$$\hat{s}_Z=\sqrt{\frac{1}{30+30-2}\left[(30-1)*1.0851^2+(30-1)*\left[6.01*10^{-7}\right]^2\right]}=0.76728 \tag{1.47}$$

Vrijednost dobivena iz uzorka, uz istinitost hipoteze o jednakosti očekivanja, jest

$$\hat{t}=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\hat{s}_Z}\sqrt{\frac{nm}{n+m}}=\frac{0.1251-1.62*10^{-7}}{0.76728}\sqrt{\frac{30*30}{30+30}}=0.6314 \tag{1.48}$$

Ova je vrijednost manja od kritične. Zato se hipoteza ne može odbaciti. Ako se dotična hipoteza odbaci, učinjena pogreška mogla bi biti veća od 0.01.

Vidljivo je da parametri iz desete generacije imaju mnogo veći utjecaj nego oni iz pedesete generacije. Zapravo, parametri iz pedesete generacije su nekoliko milijuna puta manji, pa se mogu zanemariti. U ovom slučaju, ovaj test nije prikladan jer ne daje smislen rezultat.

4.1.4.2 Na rezultatima iz desetih generacija pri dva neovisna pokretanja programa

Uspoređeni su rezultati u istoj generaciji, ali pri dva neovisna pokretanja programa. U tablici 4.7 nalaze se podaci iz drugog pokretanja programa, a u tablici 4.8 aritmetička sredina i standardna devijacija dotičnih podataka.

Tablica 4.7 Rezultati izvođenja programa u određenoj generaciji 2

	broj generacije			
indeks jedinke	1	10	50	100
1	61.590	1.396	-3.6E-07	5.0E-15
2	63.791	0.269	1.7E-06	-3.0E-15
3	59.149	0.496	-2.6E-07	3.0E-15
4	22.420	1.733	9.1E-07	-6.0E-15
5	68.884	0.781	9.3E-08	6.0E-15
6	17.668	-1.719	1.2E-06	8.0E-15
7	65.738	-3.529	-1.9E-07	-9.0E-15
8	11.458	1.766	-1.5E-07	-9.0E-15
9	34.920	3.435	-2.5E-07	2.0E-15
10	41.402	0.204	1.1E-06	-7.0E-15
11	65.124	-0.327	1.4E-06	1.0E-15
12	-6.884	-2.143	-1.5E-06	4.0E-15
13	75.681	-2.178	2.0E-06	0.0E+00
14	86.326	-3.603	-4.2E-08	-5.0E-15
15	55.526	-3.598	1.9E-06	-3.0E-15
16	66.150	-0.533	-1.8E-07	-1.0E-15
17	64.691	-0.711	1.1E-06	1.0E-14
18	72.519	-2.597	-3.1E-06	-2.0E-15
19	4.655	-0.084	-4.8E-07	-1.0E-15
20	-6.521	1.884	1.7E-06	1.0E-14
21	64.975	-1.117	-2.2E-06	2.0E-15
22	5.497	-0.226	-1.4E-06	-1.0E-15
23	62.234	2.835	9.9E-07	-1.4E-14
24	77.185	0.173	-2.6E-08	4.0E-15
25	66.656	0.000	-1.7E-07	-6.0E-15
26	75.876	-4.665	-8.8E-08	1.0E-15
27	23.460	2.918	-1.7E-08	5.0E-15
28	80.506	-9.726	-3.1E-07	1.5E-14
29	83.365	-6.707	-1.2E-06	-7.0E-15
30	82.663	5.597	2.6E-06	-1.0E-15

Tablica 4.8 Aritmetička sredina i standardna devijacija u određenoj generaciji

generacija	1	10	50	100
arit. sredina	51.6	-0.66	1.5E-07	3.3E-17
std. devijacija	28.8	3.10	1.2E-06	6.4E-15

Slučajna varijabla T (formula (1.29)) ima Studentovu razdiobu s 58 stupnjeva slobode. Zadan je nivo značajnosti $\alpha = 0.1$.

Odgovarajući kvantil je $t_{1-\alpha/2} = t_{0.95} = 1.671$. Prema formuli (1.28) slijedi izračun:

$$\hat{s}_Z = \sqrt{\frac{1}{30+30-2}\left[(30-1)*1.0851^2 + (30-1)*3.1071^2\right]} = 2.3271 \tag{1.49}$$

Vrijednost dobivena iz uzorka, uz istinitost hipoteze o jednakosti očekivanja, jest

$$\hat{t} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\hat{s}_Z}\sqrt{\frac{nm}{n+m}} = \frac{0.1251-(-0.6659)}{2.3271}\sqrt{\frac{30*30}{30+30}} = 1.3164 \tag{1.50}$$

Ova je vrijednost manja od kritične. Zato se hipoteza ne može odbaciti. Ako se dotična hipoteza odbaci, učinjena pogreška mogla bi biti veća od 0.1.

U ovo primjeru, parametri se mnogo ne razlikuju. Iz tog razloga, ovakav rezultat ima veću težinu od onog iz primjera 4.1.4.1.

4.2 Primjer 2

Traži se globalni minimum Rosenbrockove funkcije (1.51) (tzv. druga DeJongova funkcija). Funkcija je višedimenzionalna te ima oblik sedla. Zato algoritmi koji nemaju mogućnost otkrivanja dobrog smjera imaju poteškoća. Globalni minimum je u točci u kojoj su svi parametri vektora jednaki jedinici i iznosi 0. Vektor x_i je oblika kao u formuli (1.3).

$$f_2(x_i) = \sum_{j=1}^{D-1} 100*(x_{j,i}^2 - x_{j+1,i})^2 + (1 - x_{j,i})^2, \quad -2.048 \le x_{j,i} \le 2.048 \tag{1.51}$$

Program baziran na algoritmu diferencijska evolucija (podnaslov 2.2) pokrene se 20 puta sa sljedećim postavkama:

$$F = 0.9; D = 5; Np = 30; CR = 0.9; br\_generacija = 300; \tag{1.52}$$

U ovom slučaju, jedan podatak predstavlja najbolju jedinku u tristotoj generaciji (*br_generacija* jednak je 300). Uzorak je veličine 20 jer se program pokreće dvadeset nezavisnih puta. Također, uzmu se podaci, dobiveni na identičan način, od programa baziranog na algoritmu evolucijske strategije (podnaslov 2.1).

U tablici 4.9 nalazi se broj nezavisnog pokretanja, najbolje jedinke (zajedno s vrijednošću funkcije dobrote) proizašle uporabom algoritma DE.

Tablica 4.9 Rezultati algoritma DE nakon 20 nezavisnih pokretanja programa

	parametri vektora					
br. n. p	1	2	3	4	5	f. dobrote
1	1.0000	1.0000	1.0001	0.9999	0.9996	1.4E-05
2	1.0009	1.0013	1.0028	1.0060	1.0124	1.0E-04
3	1.0004	1.0002	0.9997	0.9989	0.9975	1.3E-04
4	1.0000	0.9998	0.9994	0.9990	0.9981	1.8E-05
5	1.0001	0.9998	0.9997	0.9999	0.9992	6.7E-05
6	1.0002	1.0004	1.0006	1.0007	1.0014	2.5E-05
7	1.0000	0.9998	0.9995	0.9989	0.9975	1.7E-05
8	1.0000	1.0002	1.0005	1.0007	1.0012	1.2E-05
9	0.9999	0.9993	0.9985	0.9968	0.9938	4.5E-05
10	0.9996	0.9984	0.9971	0.9926	0.9858	4.0E-04
11	0.9990	0.9986	0.9981	0.9960	0.9920	1.4E-04
12	1.0004	1.0007	1.0010	1.0019	1.0041	2.4E-05
13	1.0002	1.0007	1.0008	1.0020	1.0040	7.9E-05
14	0.9998	0.9994	0.9981	0.9971	0.9947	1.8E-04
15	1.0003	1.0003	1.0004	1.0005	1.0011	1.8E-05
16	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	4.1E-06
17	0.9998	0.9996	0.9989	0.9974	0.9951	3.1E-05
18	0.9996	0.9996	0.9990	0.9980	0.9960	2.9E-05
19	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	2.1E-06
20	1.0003	1.0003	1.0005	1.0011	1.0015	4.8E-05

U tablici 4.10 nalazi se najbolja jedinka, aritmetička sredina i standardna devijacija podataka iz tablice 4.9.

Tablica 4.10 Statistička obrada podataka iz tablice 4.9

indeks parametra	1	2	3	4	5
najbolja jedinka	1.000E+00	1.000E+00	9.999E-01	9.998E-01	9.997E-01
arit. sredina	1.000E+00	9.999E-01	9.997E-01	9.993E-01	9.987E-01
std. devijacija	3.8E-04	6.8E-04	1.3E-03	2.7E-03	5.4E-03

Ako su algoritmi slični, dovoljno je promatrati rezultate dobivene u određenoj generaciji (ovdje je broj generacija jednak tristo). Inače, algoritmi se uspoređuju po rezultatima koji su nastali nakon određenog broja evaluacija funkcije dobrote.

Tablica 4.11 identična je tablici 4.9 po prikazu rezultata. Rezultati su dobiveni algoritmom evolucijske strategije.

Tablica 4.11 Rezultati algoritma ES nakon 20 nezavisnih pokretanja programa

	parametri vektora					
br. n. p	1	2	3	4	5	f. dobrote
1	0.969	0.942	0.901	0.821	0.689	9.7E-02
2	1.004	1.008	1.011	1.023	1.046	4.3E-03
3	1.003	1.007	1.010	1.025	1.043	1.1E-02
4	0.994	0.988	0.976	0.963	0.931	1.5E-02
5	0.975	0.956	0.895	0.795	0.623	1.0E-01
6	0.992	0.990	0.971	0.939	0.880	1.9E-02
7	1.002	1.004	1.008	1.006	1.005	1.3E-02
8	1.003	1.005	1.012	1.028	1.057	2.9E-03
9	0.993	0.993	0.991	0.975	0.951	1.4E-02
10	1.001	1.000	0.997	0.992	0.983	1.5E-03
11	0.999	0.997	0.995	0.997	0.992	6.3E-03
12	0.977	0.969	0.930	0.858	0.743	6.2E-02
13	1.003	1.005	0.999	0.998	0.996	1.0E-02
14	1.000	1.008	1.011	1.026	1.046	1.8E-02
15	0.998	0.994	0.983	0.967	0.927	1.1E-02
16	0.999	0.999	0.996	0.994	0.983	2.2E-03
17	1.001	1.005	1.014	1.029	1.058	3.3E-03
18	0.989	0.976	0.949	0.906	0.824	1.8E-02
19	0.993	0.984	0.965	0.933	0.874	9.5E-03
20	1.002	1.004	1.011	1.025	1.048	3.1E-03

U tablici 4.12 nalazi se najbolja jedinka, aritmetička sredina i standardna devijacija podataka iz tablice 4.11.

Tablica 4.12 Statistička obrada podataka iz tablice 4.11

	parametri vektora				
indeks parametra	1	2	3	4	5
najbolja jedinka	1.001E+00	9.998E-01	9.968E-01	9.917E-01	9.826E-01
arit. sredina	9.948E-01	9.917E-01	9.813E-01	9.650E-01	9.350E-01
std. devijacija	1.0E-02	1.8E-02	3.6E-02	7.0E-02	1.3E-01

Nakon istog broja odrađenih generacija, najbolja jedinka dobivena algoritmom DE je bolja od najbolje jedinke dobivene algoritmom ES. Također, aritmetička sredina u slučaju korištenja algoritma DE je bliže optimumu, nego što je u slučaju korištenja algoritma ES. I na kraju, standardna devijacija je manja u prvom slučaju u odnosu na standardnu devijaciju u drugom slučaju. Rezultati algoritma DE su dobiveni unutar sekunde, dok je za rezultate algoritma ES bilo potrebno dulje čekati.

Umjesto korištenja Studentovog testa koji koristi višedimenzionalnu razdiobu, naivno se pretpostavlja da parametri vektora nisu povezani i koristi se T – test po svakom parametru vektora (podnaslov 3.4). U tablici 4.13 nalaze se vrijednosti dobivene uporabom T – testa (formula (1.26)).

Tablica 4.13 Vrijednosti nastale uporabom T – testa

	t vrijednosti po parametrima vektora				
algoritam	1	2	3	4	5
DE	0.32	-0.58	-1.03	-1.08	-1.08
ES	-2.29	-2.02	-2.30	-2.22	-2.27

U tablici 4.13 su vidljive manje t vrijednosti algoritma DE koje predstavljaju veću koncentriranost rješenja oko optimuma.

U tablici 4.14 nalaze se vrijednosti dobivene usporedbom odgovarajućih parametara vektora (formula (1.29)). Slučajna varijabla T ima Studentovu razdiobu s 38 stupnjeva slobode (ukupna veličina oba uzorka je 20, a dva podatka su izračunata iz njih).

Tablica 4.14 T vrijednosti nastale usporedbom odgovarajućih parametara vektora

usporedbe uzoraka po parametrima vektora				
1	2	3	4	5
2.30	1.99	2.26	2.18	2.23

Kvantil $t_{0.99} = 2.423$ je odabran jer je on najmanji kvantil za kojeg vrijedi hipoteza. Time se dobije nivo značajnosti $\alpha = 0.02$. Zaključno, svi izračunati statistički podaci pokazuju nadmoć algoritma DE nad algoritmom ES u slučaju optimiziranja Rosenbrockove funkcije.

4.3 Primjer 3

Traži se globalni minimum step funkcije (1.53) (tzv. treća DeJongova funkcija). Funkcija ima mnoštvo ravnih ploha u kojima je derivacija jednaka nuli. Takve ravnine predstavljaju problem za optimizacijske algoritme jer ne daju nikakvu informaciju o boljem smjeru. Globalni minimum je u točci u kojoj su svi parametri vektora manji od -5 i iznosi -30. Vektor x_i je oblika kao u formuli (1.3).

$$f_3(x_i) = \sum_{j=1}^{D} \lfloor x_{j,i} \rfloor, \qquad -5.12 \le x_{j,i} \le 5.12 \tag{1.53}$$

Program baziran na algoritmu diferencijska evolucija (podnaslov 2.2) pokrene se 20 puta sa sljedećim postavkama:

$$F = 0.9; D = 5; Np = 30; CR = 0.9; br\_generacija = 500; \tag{1.54}$$

U ovom slučaju, jedan podatak predstavlja najbolju jedinku u petstotoj generaciji (*br_generacija* jednak je 500). Uzorak je veličine 20 jer se program pokreće dvadeset nezavisnih puta. Također, uzmu se podaci, dobiveni na identičan način, od programa baziranog na algoritmu evolucijske strategije (podnaslov 2.1).

U tablici 4.15 nalazi se broj nezavisnog pokretanja, najbolje jedinke (zajedno s vrijednošću funkcije dobrote) proizašle uporabom algoritma DE.

Tablica 4.15 Rezultati algoritma DE nakon 20 nezavisnih pokretanja programa

	parametri vektora					
br. n. p	1	2	3	4	5	f. dobrote
1	-5.08	-5.08	-5.04	-5.07	-5.02	-30
2	-5.06	-5.04	-5.09	-5.07	-5.10	-30
3	-5.01	-5.10	-5.05	-5.06	-5.03	-30
4	-5.04	-5.03	-5.08	-5.11	-5.10	-30
5	-5.05	-5.06	-5.03	-5.04	-5.01	-30
6	-5.04	-5.05	-5.05	-5.05	-5.03	-30
7	-5.05	-5.06	-5.09	-5.07	-5.07	-30
8	-5.03	-5.09	-5.08	-5.08	-5.09	-30
9	-5.03	-5.06	-5.09	-5.01	-5.02	-30
10	-5.09	-5.08	-5.10	-5.10	-5.08	-30
11	-5.07	-5.07	-5.05	-5.05	-5.11	-30
12	-5.03	-5.05	-5.05	-5.07	-5.06	-30
13	-5.04	-5.07	-5.10	-5.07	-5.03	-30
14	-5.03	-5.01	-5.10	-5.01	-5.11	-30
15	-5.09	-5.08	-5.08	-5.06	-5.10	-30
16	-5.04	-5.00	-5.01	-5.09	-5.10	-30
17	-5.04	-5.07	-5.06	-5.08	-5.03	-30
18	-5.01	-5.07	-5.02	-5.03	-5.11	-30
19	-5.03	-5.01	-5.08	-5.02	-5.09	-30
20	-5.04	-5.07	-5.07	-5.01	-5.10	-30

U tablici 4.16 nalazi se najbolja jedinka, aritmetička sredina i standardna devijacija podataka iz tablice 4.15.

Tablica 4.16 Statistička obrada podataka iz tablice 4.15

	parametri vektora				
indeks parametra	1	2	3	4	5
najbolja jedinka	-5.04	-5.07	-5.07	-5.01	-5.10
arit. sredina	-5.05	-5.06	-5.07	-5.06	-5.07
std. devijacija	2.3E-02	2.8E-02	2.8E-02	3.0E-02	3.7E-02

Tablica 4.17 identična je tablici 4.15 po prikazu rezultata. Rezultati su dobiveni algoritmom evolucijske strategije.

Tablica 4.17 Rezultati algoritma ES nakon 20 nezavisnih pokretanja programa

	parametri vektora					
br. n. p	1	2	3	4	5	f. dobrote
1	-5.07	-4.25	-5.03	-5.11	-4.84	-28
2	-5.09	-4.82	-5.04	-5.07	-5.02	-29
3	-5.02	-5.10	-5.09	-5.12	-4.00	-29
4	-5.11	-4.65	-5.06	-4.22	-5.03	-28
5	-4.53	-5.04	-5.02	-5.04	-5.11	-29
6	-5.09	-4.92	-5.04	-5.01	-5.02	-29
7	-4.95	-5.08	-5.01	-5.00	-4.05	-28
8	-5.03	-5.12	-5.02	-3.46	-5.03	-28
9	-5.01	-5.08	-5.04	-4.77	-5.09	-29
10	-4.02	-5.11	-5.07	-5.10	-5.02	-29
11	-5.06	-5.02	-5.09	-4.27	-5.06	-29
12	-5.04	-5.03	-5.07	-4.78	-4.62	-28
13	-5.03	-5.04	-5.02	-5.03	-4.43	-29
14	-5.02	-5.06	-5.09	-5.11	-4.73	-29
15	-4.74	-5.06	-5.00	-4.87	-5.10	-28
16	-5.09	-5.03	-4.73	-5.03	-5.01	-29
17	-5.06	-5.02	-5.01	-4.01	-5.08	-29
18	-4.48	-5.03	-5.07	-5.09	-5.01	-29
19	-5.03	-5.06	-5.06	-5.03	-5.04	-30
20	-5.09	-4.01	-5.00	-5.04	-5.07	-29

U tablici 4.18 nalazi se najbolja jedinka, aritmetička sredina i standardna devijacija podataka iz tablice 4.17.

Tablica 4.18 Statistička obrada podataka iz tablice 4.17

	parametri vektora				
indeks parametra	1	2	3	4	5
najbolja jedinka	-5.03	-5.06	-5.06	-5.03	-5.04
arit. sredina	-4.93	-4.93	-5.03	-4.81	-4.87
std. devijacija	2.8E-01	3.0E-01	7.6E-02	4.5E-01	3.4E-01

Nakon istog broja odrađenih generacija, i kod rezultata algoritma DE i ES pronađeno je ispravno rješenje. No, pri pogledu na tablicu 4.15 i 4.17 vidljiva je velika razlika. Kod rezultata dobivenih pomoću algoritma DE sve najbolje jedinke su u optimumu, dok kod rezultata algoritma ES, samo je jedna najbolja jedinka uistinu u optimumu. Daljnja usporedba tablica 4.16 i 4.18 pokazuje prevlast rezultata algoritma DE u odnosu na rezultate algoritma ES.

5. Zaključak

U radu su prezentirane evolucijske strategije kao jedna od tehnika optimiranja. Korištenje osnovnih operatora, selekcije i mutacije, omogućava uspješno rješavanje nekog složenog optimizacijskog problema. Evolucijske strategije mogu se upotrebljavati za rješavanje raznovrsnih problema. Također je prezentiran sličan algoritam imena diferencijska evolucija koji se pokazao uspješnijim od evolucijske strategije na paru izabranih funkcija.

Rezultati gore navedenih algoritama su uspoređeni uporabom statističkih alata. Osnovni statistički alati su srednja vrijednost atributa, medijan, varijanca i standardna devijacija. Postoje i sofisticiranije statističke metode koje se zasnivaju na testovima u kojima se pretpostavi hipoteza koja se pokušava dokazati. Na primjer, da li distribucija vrijednosti atributa prati neku matematičku distribuciju poput normalne ili studentove distribucije i s kojom nivoom pouzdanosti se to može potvrditi. Također postoji i analiza korelacije među različitim atributima koja daje kvalitetniju informaciju o važnosti pojedinog atributa.

U prvom primjeru je vidljivo pomicanje aritmetičke sredine kroz generacije (tablica 4.2) prema minimumu funkcije (u ovom slučaju, to je 0). Istovremeno, smanjuje se i vrijednost standardne devijacije (tablica 4.6) jer je sve manji broj vrijednosti raspršen po inicijalnom intervalu. Njena vrijednost teži k nuli u svakoj funkciji koja u svojem području rješenja ima jedan ekstrem. Ako se to ne dogodi, potrebno je mijenjati parametre tako da to bude slučaj. Primjerice, ako je funkcija periodična, tada treba ograničiti područje pretraživanja rješenja na veličinu intervala manju od perioda funkcije. Ako funkcija ima više ekstrema, područje potrage podijeli se na više manjih dijelova i onda se pokrene program.

U drugom i trećem primjeru prikazana je uobičajena primjena statističkih alata u području analiziranja genetičkih algoritama. Funkcije, nad kojima su napravljeni testovi, su standardne testne funkcije (eng. *standard test suite*) koje je DeJong uveo prije više od 20 godina. Postoje još dvije DeJongove funkcije i par novije uvedenih funkcija koje se koriste u ovom području.

6. Literatura

[1] Cajo J. F. Ter Braak. A Markov Chain Monte Carlo version of the genetic algorithm Differential Evolution: easy Bayesian computing for real parameter spaces. http://www.stat.columbia.edu/~gelman/stuff_for_blog/cajo.pdf

[2] Craft, David. Differential Evolution: a stochastic nonlinear optimization algorithm by Storn and Price. http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Sloan-School-of-Management/15-099Fall2003/A40397B9-E8FB-4B45-A41B-D1F69218901F/0/ses2_storn_price.pdf

[3] Das, Swagatam. Automatic Clustering Using an Improved Differential Evolution Algorithm. www.softcomputing.net/smca-paper1.pdf

[4] Differential Evolution. http://www.icsi.berkeley.edu/~storn/code.html, 25.10.2008

[5] Elezović, Neven. Vjerojatnost i statistika: Statistika i procesi. Prvo izdanje. Zagreb: Element, 2008. godine

[6] Feoktistov, Vitaliy. Differential Evolution: In Search of Solutions. Springer, 2006. godine (www.springer.com/math/book/978-0-387-36895-5)

[7] Fleetwood, Kelly. An Introduction to Differential Evolution. http://www.maths.uq.edu.au/MASCOS/Multi-Agent04/Fleetwood.pdf

[8] Golub, Marin. Genetski algoritam: http://www.zemris.fer.hr/~golub/ga/ga_skripta1.pdf

[9] Piyasatian, Napapan. Differential Evolution: A Simple Evolution Strategy for Fast Optimization. http://www-personal.une.edu.au/~jvanderw/DE_1.pdf

[10] Projekt 2007/2008: Evolucijski algoritmi – Evolucijske strategije. http://www.zemris.fer.hr/~golub/ga/studenti/projekt2007/es.html, 25.10.2008

[11] Storn, Rainer. Differential Evolution – A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. www.icsi.berkeley.edu/~storn/TR-95-012.pdf

[12] Ujević, Filip. Postupci analize podataka u izgradnji profila korisnika usluga. Magistarski rad. www.zemris.fer.hr/predmeti/kdisc/Mag.pdf, 2004. godine

7. Sažetak

Evolucijske strategije (ES) jedna su od tehnika optimizacije iz područja evolucijskih algoritama. Razvoj evolucijskih strategija započeli su Ingo Rechenberg i Hans Paul Schwefel 60-ih godina 20. stoljeća. Bazirane su na prilagođavanju i evoluciji.

Diferencijska evolucija (DE) je stohastički, populacijski, optimizacijski evolucijski algoritam koji su predstavili Storn i Price 1996. godine. Napravljen je za optimiziranje funkcija s realnim varijablama.

Rezultati gore navedenih algoritama su uspoređeni uporabom statističkih alata. Osnovni statistički alati su srednja vrijednosti atributa, medijan, varijanca i standardna devijacija. Postoje i sofisticiranije statističke metode koje se zasnivaju na testovima u kojima se pretpostavi hipoteza koja se pokušava dokazati. Na primjer, da li distribucija vrijednosti atributa prati neku matematičku distribuciju poput normalne ili studentove distribucije i s kojim nivoom pouzdanosti se to može potvrditi.

8. Ključne riječi

Evolucijski algoritam

Evolucijska strategija

Diferencijska evolucija

Statistička analiza

T – test

9. Abstract

Evolution strategy (ES) is an optimization technique based on ideas of adaptation and evolution. It was created in the early 1960s by Ingo Rechenberg and Hans Paul Schwefel.

Differential evolution (DE) is a stohastic, population-based optimization method of multidimensional functions. It was introduced by Storn and Price in 1996.

The results of the above algorithms are compared using statistical tools. Basic statistical tools are mean values of attributes, median, variance and standard deviation. There are more sophisticated statistical methods that are based on the tests which assume the hypothesis and try to prove it. For example, whether the distribution of attribute values follows a mathematical distribution, such as students' or normal distribution, and by which confidence level it can be confirmed.

10. Keywords

Evolutionary algorithm

Evolution strategy (ES)

Differential evolution (DE)

Statistic analysis

T – test