

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 336

# Računalni origami

Filip Barbarić

Zagreb, lipanj 2023.

# SADRŽAJ

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
1.1. Povijest origamija . . . . .	2
1.2. Origami i matematika . . . . .	4
1.3. Origami i računala . . . . .	6
1.4. Origami u tehnologiji . . . . .	11
<b>2. Matematika origamija</b>	<b>14</b>
2.1. Ravno savitljivost . . . . .	15
2.2. Uzorci udubljenja i ispupčenja . . . . .	17
2.3. Origami je težak . . . . .	21
2.4. Rigidni origami . . . . .	24
<b>3. Origami problemi</b>	<b>30</b>
3.1. Koliko puta možemo saviti papir . . . . .	31
3.2. Univerzana shema zglobova . . . . .	33
3.3. Dizajniranje origamija . . . . .	35
3.4. Origami teselacije . . . . .	38
3.5. Problem jednog reza . . . . .	40
<b>4. Heuristične metode kreiranja ravnosavitljive sheme savijanja</b>	<b>44</b>
4.1. Slučajna fantomska shema . . . . .	45
4.2. Proces pucanja leda . . . . .	47
4.3. Dizajniranje iz postojećih shema . . . . .	48
<b>5. Simulacija origamija</b>	<b>50</b>
5.1. Postupak simulacij . . . . .	51
5.2. Primjene origamija u računarskim igrama . . . . .	54
<b>6. Zaključak</b>	<b>56</b>



# 1. Uvod

Origami, umjetnost savijanja papira, potječe iz Japana, a riječ "origami" dolazi od japanske riječi "oru" i "kami", što doslovno znači savijati papir. Tradicionalni cilj origamija je pretvoriti ravni list papira u trodimenzionalni oblik samo pomoću savijanja papira.

S origamijem smo se svi susreli tijekom školovanja kako bismo razvijali motoriku, poticali kreativnost i trodimenzionalno razmišljanje. Uglavnom smo se susretali s izradom ždralova, brodića ili kutija, što je obično bila granica našeg iskustva s origamijem. Možda ste na internetu naišli na neki impresivan origami umjetnički model.

Sami origami je stara umjetnička tehnika. Kao takva je jako jednostavna i moglo bi se pomisliti da sve što se može napraviti sa origamijem se i napravilo. Ključna stvar koja se promjenila je ta da se za izradu origamija počela primjenivati matematik, a problemi se svedu na dobro poznate riješene matematičke probleme.

Kao što je to inače praksa u znanosti i tehnologiji, rješenja i razumijevanja jednog problema nam pomažu rješavati neke druge probleme koje na prvu nisu toliko očiti. Tako kako nam matematika može pomoći za izradu i modeliranje origamija, tako nam i origami može pomoći za izradu sklopivih mehanizama. Svojstva koje origami ima ugrađena u sebe su nam korisna i poželjna za izradu kompleksnijih objekata. Ukratko origami se može koristiti u izradi savitljivih leća za satelite, modeliranje na nanorazini, u robotici Svugdje gdje ima neki savitljivi dio ili neka plahta, takva ponašanja se mogu modelirati sa origamijem. Zbog tih razloga se isplati dublje istražiti temu origamija. Glavni cilj ovog rada je pokazati da je origami postao ozbiljna tema istraživanja, postaviti temelje za daljnja istraživanja i proširiti ljepotu origamija kroz računalnu znanost.

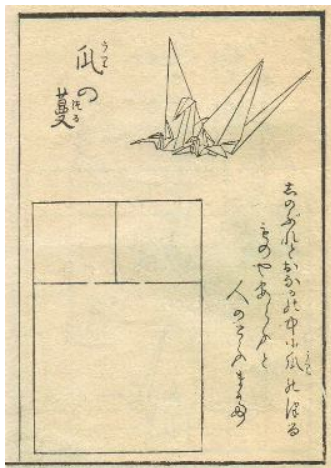
Origami je egzotična tema stoga ću iskoristi prvo poglavlje kako bih objasnio povijest origamija i pokazao trenutno stanje znanosti origamija.

## 1.1. Povijest origamija

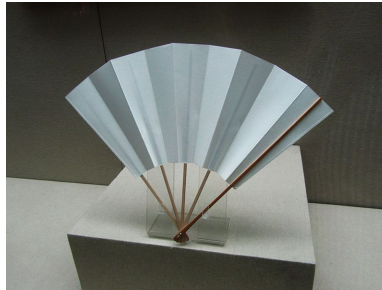
Origami, kao i mnoge druge tehnike, ima nejasne početke u svojoj povijesti. Međutim, ne možemo govoriti o origamiju bez spominjanja papira, pa se vjeruje da je origami nastao u Kini zajedno s izumom papira. Budući da je origami umjetnost savijanja papira, povijesni izvori navode da je najstariji primjer savijenog papira pronađen u Iranu, datiran u 312.-313. godinu. Prvi spomen origami modela je "kawahori" (japanska lepeza), koja se spominje u političkom dokumentu kao jedan od poklona koje je Japan poslao Kini, a datira iz 10. stoljeća. Takve lepeze su obično izrađene savijanjem papira, pa se smatraju origami modelima. Međutim, to ne znači nužno da je postojala razvijena origami kultura u 10. stoljeću.

Jedan od najranijih dokumenata koji svjedoče o origamiju je knjiga "Senbazuru Ori-kata" iz 1797. godine, što u prijevodu znači "tisuću origami ždralova". To je prvi pisani izvor u kojem možemo vidjeti shemu savijanja papira. Ovaj dokument potvrđuje da je origami bio dio japanske kulture i folklora. Po ovome radu bazirana je "Sadako hoće živjeti" poznati post-holokaust memorija.

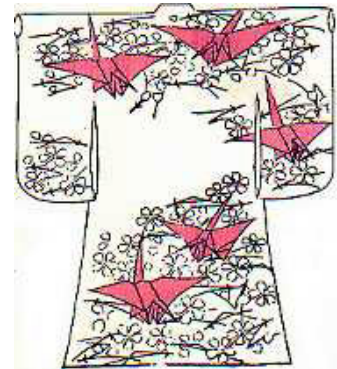
Postoje mnoge rasprave o ranijoj povijesti origamija, no glavna karakteristika je nje-gova jednostavnost i ne direktnosti. Dokumentirano je samo nekoliko stotina modela, koji su uglavnom varijacije na desetak osnovnih origami baza. Origamiju je nedostajo sistemacki jezi, upravo sa izumom origami jezika počinje moderno origami doba. (3)



(a) Stranica knjige "Senbazuru Orikata" koja prikazuje ždrala.



(b) Kawahori



(c) Slika prikazuje kimono sa uzorcima ždrala iz 18 stoljeća

**Slika 1.1:** Slike origamija u japanskom folkloru.

Početak modernog origamija veže se uz Akiru Yoshizawu. Smatra ga se ocem modernog origamija i jednim od najvećih origami majstora. Yoshizawa je pionir modernog origamija. Upravo je on 50-ih godina prošlog stoljeća osmislio zapis origamija, Yoshizawa-Randlett sistem. Taj zapis se sastojao od linija i strelica te je pružao upute o tome kako savijati papir. Taj zapis je također prvi zapis koji razlikuje udubljenja i ispuščenja. Veoma sličan jezik se koristi i danas.

Sam Yoshizawa je uz postavljanje zapisa osmislio i logiku za stvaranje novih origami modela. Obično se origami modeli sastavljaju od neke baze, poput baze dijamanta, baze zmaja, žabe... Upravo kombinacijom baza uspio je dobiti temelje za izradu novih origami modela. Jedan od tih primjera je korištenje niza baza ptica u izradi cvrčka. Ta ideja, ne direktnog modeliranja origamija već modeliranja baza, leži u temelju današnjih programa, prije svega Tree Makersa.

Yoshizawa je prije svega bio umjetnik. Jedno vrijeme je radio kao učitelj geometrije u tvornici i uglavnom je koristio origami kao sredstvo podučavanja. Napustio je posao i ostatak života proveo u velikom siromaštvu kao dostavljač rezanaca i origami majstor. Nijedan origami model nije prodao u životu.

Uz mnoštvo poučnih knjiga, osmislio je metodu mokrog savijanja. To je metoda kojom se origami modelima mogu dati glatka zaobljenja, a postiže se navlaživanjem papira i korištenjem spajalica. Takva metoda danas je prisutna kod origami majstora koji izbjegavaju računalni origami, a glavni majstor te tehnike je Éric Joisel.

(1)



(a) Akira Yoshizawa



(b) Google Doodle za 101. ro-  
dendan Akire Yoshizawe



(c) Patuljci Érica Joisela, jedan  
od najboljih primjera mokrog  
savijanja

Slika 1.2

## 1.2. Origami i matematika

Origami ima mnoge paralele s matematikom, posebno u području geometrije. Yoshizawa je koristio origami kao alat za učenje, dok su neki od starijih primjera veze između matematike i origamija prisutni u knjigama poput Rev. Dionysiusa Lardnera (1840) i T. Sundara Rowa (1893). Međutim, origami je izvorno bio predmet istraživanja, a ne glavni interes matematike.

Prvi radovi za matematiku origami su vezani uz radove Piazzolle. Kasnije njezine radove su naslijedili Huzita i Scimemi (1989). Oni su napravili prve aksimoe koji su pretpostavili da se bilo koja origami operacija može svesti na 7 jednostavnih origami operacija. Tako pomoću njih možemo podjeliti kut na 3 jednaka djela ili rjšiti kubnu jednčbu na papiru. Pokazalo se relativno nedavno da im je nedostajala jedna operacija, U literaturi ti aksiomi se označavaju sa BOOs(basic origami operations) te su temelji matematike origamija.

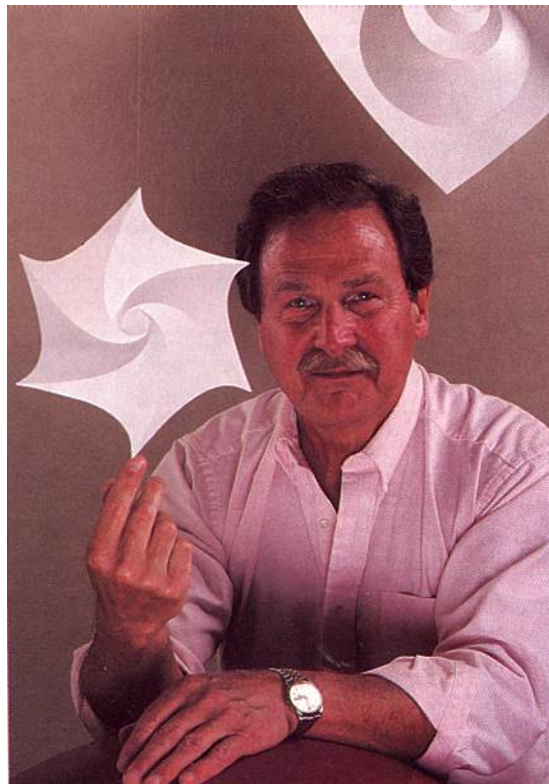
Fundementali teoremi za ravno savitljive origami modele, kao Maekawa, Kawasaki su jedni od starijih teorema. Oni su sami relativno jednostavni no te teoreme je proširio i generalizirao Hull(2003).

Matematika origamija se stalno razvija, tako na primjer jedan od starijih i ljepših dokaza je dokaz NP-težine origami ravnog savijanja. Njega su napisali Bern i Hayes 1996. To je konstrukcijski dokaz u kojem se shema savijanja papira svede na logična vrata te stime na posebnu verziju SAT problema. Taj dokaz se nalazi u gotovo svim knjigama vezanim za origami matematiku i jedan je od glavnih teorema na predavanjima MIT 6.849. Dvadeset godina nakon dokaza pokazalo se da dokaz ima grešku sa jednim od elemenata konstrukcije (2016).

Jedan od prvih origami matematičara je bio i poznati računarski znanstvenik David Huffman, koji je osmislio Huffmanovo kodiranje. Njegovo područje istraživanje u

području matematike origamija su bili neravni nabor. Također se bavio rigidnim origamiji i Gausovim mapama. Jedna vrsta origami teselacije nosi njegovo ime. Nije samo proučavao origami sa područja matematičke strane već ih je izrađival. Zanimljivo je to da nije radio origamije od papira već od tanke plastike koju je savijao alatom koji se koristi u stomatologiji.

Origami matematika ili origametrika mlada grana matematike koja se kontinuirano razvija. Obično matematika origamija se koncentriran na dokazivanje da je neko svojstvo origamija moguće ili ne moguće. Pri tome uvode pretpostavke da imamo papir koji je beskonačno velik i beskonačno tanak. Takva ograničenja znaju uvesti podjelu u origami društvu jer nisu direktno praktični. Matematički je dokazano da se bilo koji objekt može saviti od papira. Zadnje radove koje sam uspije naći su uglavnom vezani za rigidne origamije. Dok su origamiji koji su vezani za ravna savijanja dobro izučeni, novi radovi vezani za njih su uglavnom heuristike mapiranja nabora i dizajniranje origamija. (7) (10)



**Slika 1.3:** David Huffman i jedna od njegovih modela.



### 1.3. Origami i računala

Robert J. Lang, fizičar po struci, povezoao je računarstvo i origami na način koji je promijenio naš pogled na ovu umjetnost. Kada započnete istraživati o origamiju, često prva osoba koju saznate je upravo on. Njegovi doprinosi su brojni i obuhvaćaju javne govore, autorske knjige te revolucionarne primjene znanosti u origami dizajnu.

Jedno od najistaknutijih postignuća Roberta J. Langa jest povezivanje znanosti i origamija u kontekstu dizajna zračnih jastuka i leća za teleskope. Kroz svoje istraživačke radove, on je otvorio novo polje mogućnosti u origami inženjeringu.

Jedan primjer njegovog rada je Langov sat, koji je dugo vremena smatran najkompleksnijim origami modelom na svijetu. Ovaj model zahtijeva izuzetno strpljenje, vještinu i poznavanje geometrije kako bi se savršeno izveo. Čak i ptica izlazi van kada se počne ručkica.

Kroz svoju karijeru, Robert J. Lang također je iskoristio prednosti računarstva kako bi unaprijedio svoje dizajne i istraživanja. Korištenje računalnih programa omogućilo mu je da analizira kompleksne geometrijske obrasce i predviđa kako će se materijal ponašati pri oblikovanju. Ova sinergija između računarstva i origamija omogućila mu je da postigne nove razine preciznosti i inovacije u svojim radovima.

Njegova knjiga "Tajne origami dizajna" smatra se referentnom knjigom o dizajnu origamija. U njoj je detaljno opisao svoje metode, teorije i tehniku, pružajući čitateljima dublji uvid u njegovu kreativnost i tehničko znanje. Stoga je on danas najveći origami majstotr.

Njegov najuspješniji program je Tree Maker, algoritam koji služi za pomoć pri izradi origami modela. Najveći problem pri izradi modela je izrada baze. Vješti origami majstor lako će dotjerati model, ali teško je napraviti dobru bazu. Problem leži u planiranju.

Kao ilustraciju, zamislimo da radimo origami cvrčka. Cvrčak je u origami svijetu "Pozdrav svijetu" (Hello world.). On je kompleksniji od standardnog modela ždrala i iziskuje rješavanje zanimljivih problema. Slično kao što je čajnik za grafiku. Cvrčak je poseban i zato što ga je Yoshizawa sam istaknuo kao jedan od svojih najboljih modela.

Kao cvrčak je kukac i kako takav ima puno ekstremiteta kao na primjer noge, kliješta, krila.... Problem je kako napraviti te ekstremitete na papiru. Ako uzmete papir i savija



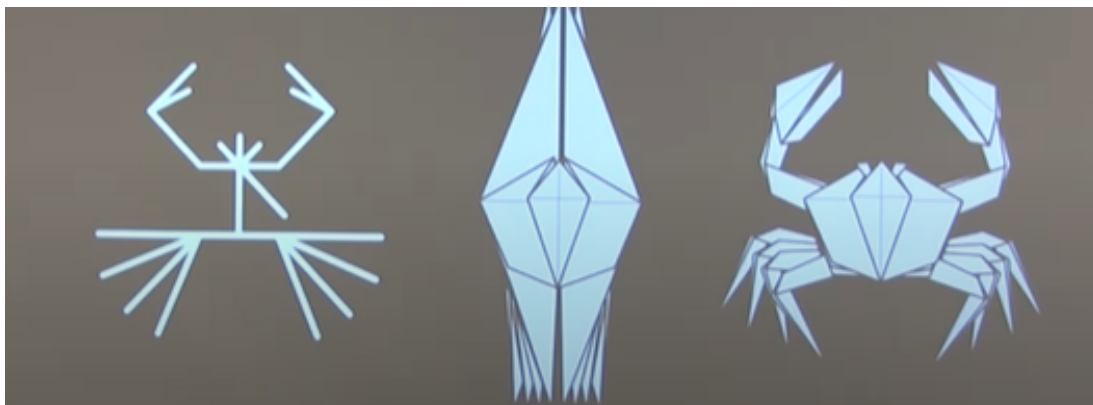
**Slika 1.4:** Langov sat(black forest cuckoo clock 1987.)

te ga u jednu slamku, možete shvatiti da je to kao jedan ekstremitet. Ako uzmete škare i ravno odrežete dobit ćete krug ili dio kruga. Možete shvatiti kako je za izradu jednog ekstremiteta potreban neki krug papira.

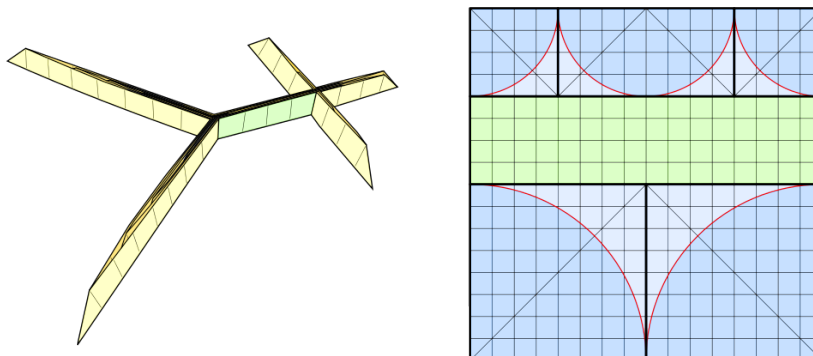
Jednostavno možete zaključiti da ako želite dva ekstremiteta trebati će te podjeli papir na dva kruga. Upravo to je rješenje. Naime problem planiranja baze se svede na problem upisivanja krugova u papiri. Što više ekstremiteta to je model kompleksniji.

Shema savijanja tada se zove reprezentacija krugova i rijeka te nam *TreeMaker* radi dovoljno dobru reprezentaciju. Rijeke u ovome slučaju su granica između krugova.

Jedna od ograničenja takve tehnike je ta da tijelo mora biti "štapičasto" što nam je problem pri izradi punastih modela kao MIT zec ali sasvim dovoljno za izradu kukaca.



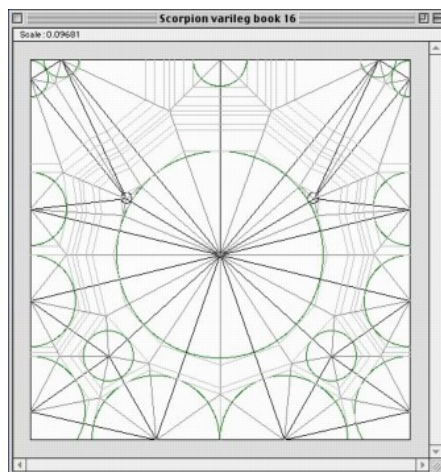
**Slika 1.5:** Primjer izrade vlastite origami baze. Lijeva slika prikazuje granastu reprezentaciju origamija. Srednja slika prikazuje izrađenu bazu prema granastoj reprezentaciji. Treća slika prikazuje konačni savijeni model. Prijelaz s prve na drugu sliku izuzetno je težak, dok je prijelaz s druge na treću sliku relativno lakši i pruža umjetničku podlogu.



**Slika 1.6:** Primjer sheme koju daje Tree Maker, to je shema savijanja krugova i rijeka.

Kao što smo već spomenuli, veći broj ekstremiteta na origami modelima rezultira većom kompleksnošću. Taj koncept potaknuo je interes ljudi za izradom origami modela koji imaju što više ekstremiteta. Tako je započeo trend nazvan "Ratovi kukaca" (Insect War).

Ratovi kukaca su bili trend u kojem su origami majstori svake godine izrađivali kukce s sve većim brojem ekstremiteta.



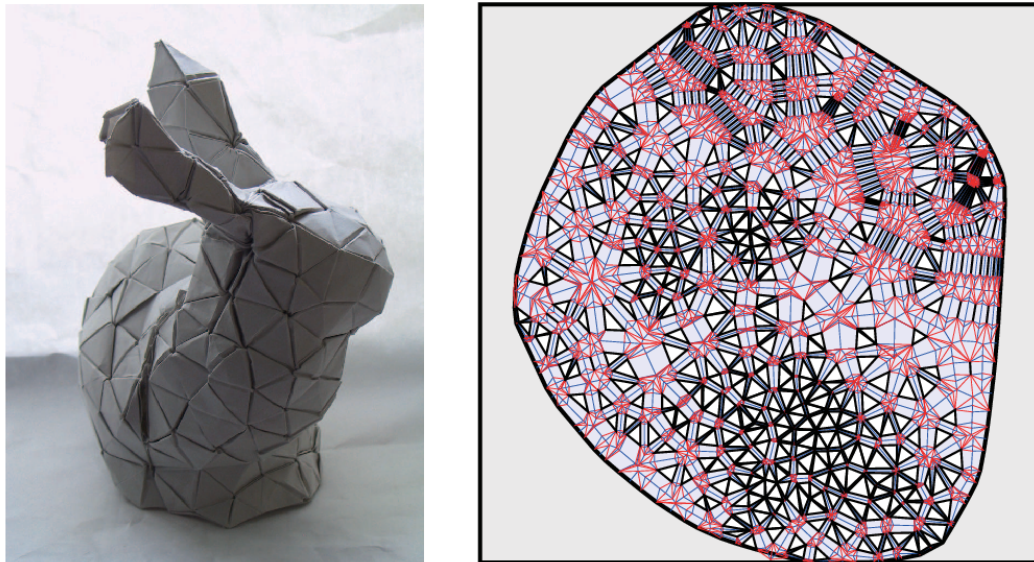
**Slika 1.7:** Konkretnan primjer rezultata programa TreeMaker



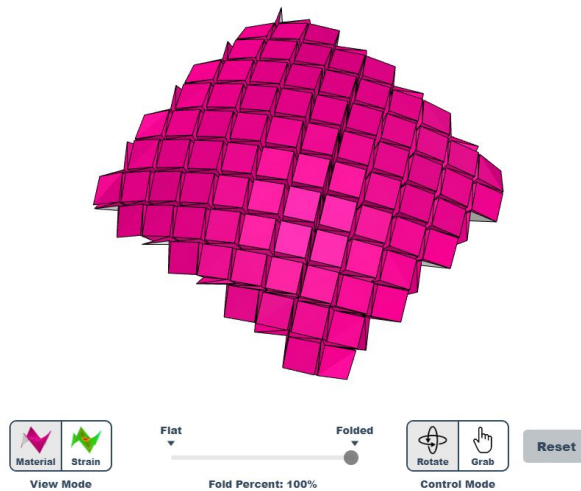
**Slika 1.8:** Brian Chan, striga, 2006, Jedan od kompliciraniji primjera izrađen tijekom ratova kukaca

Jedan od programa koji se često spominje u računalnom origamiju je *Origamizer*. Napisao ga je profesor arhitekture Tomohiro Tachi s Tokijskog sveučilišta, jedan od danas vodećih origami znanstvenika. Taj program omogućava izradu bilo kojeg modela. Jednostavno se dovlači bilo koji .obj i "Origamizer" izrađuje shemu savijanja za taj objekt. Matematičar Demaine je dokazao da program uvijek funkcionira. Problem s takvom shemom savijanja je njezina glomaznost. Izrađeni modeli gube osjećaj izrade origamija, dijelovi koji bi trebali činiti glatku površinu imaju neočekivane rubove. Odnos između origamija i "Origamizera" sličan je odnosu između slikarstva i fotografije. Više je pokazni algoritam nego koristan alat za modeliranje. Na internetu postoji nekoliko videa u kojima ljudi slažu shemu savijanja koje traju 10 sati. *Origamizer* radi na temelju utora (eng. Tuck) koji su raspoređeni uzimajući u obzir

origami ograničenja. Nakon "Origamizera", veći naglasak stavljen je na povezivanje i formalizaciju, te danas imamo *FOLD* zapis origami modela koji koriste gotovo svi origami programi. Tomohiro Tachi također ima niz softvera za različite origami primjene, uključujući modeliranje ravno savitljivih origamija i rigidnih origamija. Jedan od najnovijih programa koje sam pronašao je "Origami Simulator", koji je prijenosni i brzi simulator origamija koji radi u mrežnom pregledniku. (12) (17) (2) (9)



**Slika 1.9:** Primjer modela dobivenoga algoritmom *Orgamizer*, te shema savijanja.



Slika 1.10: Primjer rada origami simulatora.

## 1.4. Origami u tehnologiji

Origami je našao svoju primjenu i u tehnologiji. Javlja se u robotici, strojarstvu, logistici. Upravo origami nudi zanimljiva i korisna svojstva kao ravno savitljivost. To svojstvo je pogodno jer možemo složiti i sastaviti naše objekte zavisi od njihove uporabe. Čak i promijeniti način savijanja zavisno o uporabi.

Jedan od prvih i čestih primjera je rad Zhong Youa i Kaori Kuribayashi iz 2005. godine. Razvili su medicinski instrument namijenjen proširivanju vena. Instrument je dizajniran kao sklopivi mehanizam, a temeljni uzorak je baziran na origami bazi vodene bombe. Mnogo malih trokuta se povezaloo u baze, a te su se baze dalje povezale u valjak. Ovakvo povezivanje omogućava da se mehanizam složi i zauzme malo prostora, poput vene, a zatim se rasklopi na određištuu.

Takav princip dizajna koristio je i Yoshizawa za svoje cvrčke, pri čemu je koristio bazu vodene bombe kako bi podijelio papir i složio ekstremitete za cvrčka. Ova povezanost origamija i spašavanja života iznimno je zanimljiva. Međutim, taj mehanizam nikada nije zaživio u praksi jer nije mogao biti dovoljno smanjen. (11)



**Slika 1.11:** Sklopivi mehanizam za proširivanje vena.

Jedno od područja gdje je mehanizam rasklapanja našao svoje mjesto je upotreba u satelitima. Naime, solarni paneli su neophodni za napajanje satelita u svemiru. Međutim, slanje cijelih panela u svemir je skupo i teško izvedivo. Rješenje je sklopiti panele u raketi i rasklopiti ih nakon što satelit dopiše na svoju orbitu.

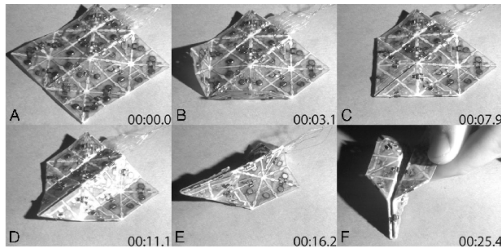
Također veliki paneli mogu utjecati na funkcionalnost satelita. Međunarodna svemirska postaja ima velike panele te su 2007 bili oštećeni od svemirskog utjecaja. Bio je problem popraviti, astronaut je morao ići na svemirsku šetnju.

Kod tih problema nam origami može pomoći. Jedan od najslavnijih origami shema miura. On se može jednostavno sklopiti i rasklopiti, a i postoji dokaz da se dijelovi mogu napraviti od nečega ne savitljivog kao solarni panel. Takvi origami modeli nazivaju se rigidni. Kreator sheme je bio Kōryō Miura koji je po struci astrofizičar.

Svemirske agencije su razmatrale miuru kao shemu no sada je u planu drugačija shema savijanja. Uz solarne panele agencije bi htjele poslati i teleskope za istraživanja. James Webb teleskop je koristio nešto mehanizama savijanje, no u istraživanju su puno veće leće poput Starshade. (4) Primjene origamija u robotici su značajne. Origami služi kao izvor inspiracije i iskorištava svojstva origamija za stvaranje novih karakteristika robota. Postoje roboti koji se mogu transformirati u različite oblike, koristeći principe origamija. Ova sposobnost mijenjanja oblika pruža robotima fleksibilnost i prilagodljivost, što ih čini vrlo korisnima u različitim situacijama. Origami također omogućava robotima da mijenjaju svoju funkcionalnost i ulogu na temelju potreba, što dodatno proširuje njihovu upotrebljivost u različitim područjima robotike.



**Slika 1.12:** Starshade



**Slika 1.13:** Origami robot

Dizajn origamija služi kao izvor inspiracije za haptička sučelja. Haptička sučelja omogućavaju korisnicima da dožive osjećaj čvrstoće ili teksture u virtualnom svijetu. Postoji mnogo primjera haptičkih sučelja, a među njima je i ono koje je inspirirano origamijem. Ovo sučelje koristi princip preklopa i struktura origamija kako bi pružilo korisnicima taktilno iskustvo pri interakciji s virtualnim objektima. (15)



**Slika 1.14:** Heptičko sučelje



## **2. Matematika origamija**

Poglavlje pokriva temelje matematike origamija. Definira se dva svojstva - ravno savitljivost i rigidnost - te njihove uvjete. Konačno, dokazali smo da su problemi vezani za origami NP-teški.

## 2.1. Ravno savitljivost

Kako sam u uvodu objasnio uporabu origamija, ravno savitljivost (flat foldable) je jedno od svojstava koje je izrazito korisno i poželjno, unikatno za origami. Stoga ćemo objasniti uvijete ravnog savijanja te usput dati temelje matematike origamija.

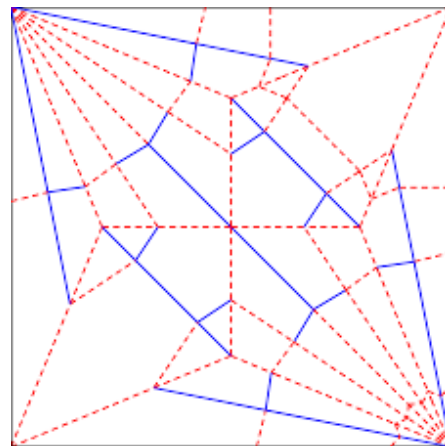
Ako uzmemo origami model i rastavimo ga u ravan papir. Na papiru možemo vidjeti nabore. Ti nabori se zovu shema savijanja (crease pattern). Papir možemo definirati kao zatvoren prostor ravnine, koji je jednostavno spojiv (nema rupa). U većini slučajeva je kvadratnoga oblika no to nije nužan uvjet.

**Definicija 2.1:** Za dani papir  $R \subset \mathbb{R}^2$ , shema savijanja nad  $R$  je planaran graf  $G = (V, E)$  sa  $V \subset R$  gdje je svaki brid  $e \in E$  potpuno u  $R$ . Lica shema savijanja su povezne komponente  $R \setminus (V \cup (\cup E))$ . Ako lice nije ograničeno sa bridom onda je ograničeno sa rubom papira.

Kod sheme savijanja uvodimo određene pretpostavke:

- Bridovi su ravne linije.
- Papir je ne rastezljiv i ne može ga se poderati.
- Papir ne može prolaziti kroz sebe.
- Konačni model koristi samo bridove iz sheme savijanje.

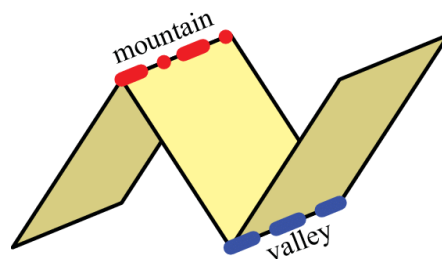
Ove pretpostavke nisu direktna reprezentacija stvarnog papira, jer postoje krivuljasti bridovi koji mogu biti ravno savitljivi.



**Slika 2.1:** Primjer modela i sheme savijanje na ždralu

Kako smo već rekli origami znači saviti papir. To savijanje je formalno izraženo. **Definicija 2.2:** Za danu shemu savijanja  $G = (V, E)$  nad papirom  $R$ , origamij je kontinuirano bijektivno preslikavanje  $\sigma : R \rightarrow \mathbb{R}^3$  tako da je  $\sigma$  dovoljno glatka svugdje osim  $E$ .

Na shemi savijanja možete primijeti dvije vrste nabora, ispupčenja i udubljenja (Mountains, Valley). Bitno je da se razlikuju međusobno jer uvijek možemo okrenuti papir i zamjeniti definicije. Skraćeno ćemo se referirati na njih sa  $M$  i  $V$ . Njih definira kut sa predznakom savijanja. U literaturi često se spominje funkcija preslikavanja ispupčenja i udubljenja  $\mu$  na numeričku domenu.



**Slika 2.2:** Primjer modela i sheme savijanje na ždralu

**Definicija 2.3:** Za danu shemu savijanja  $G = (V, E)$ , preslikavanje udubljenja i ispupčenja se definira funkcijom  $\mu : E \rightarrow \{-1, 1\}$  koja pridružuje određeni broj s obzirom na kut savijanja.

Neformalno,  $M \rightarrow 1, V \rightarrow -1$ .

Trebamo uvesti još jednu definiciju a to je ravni origami na  $G$ . To je origami koji preslikava  $G$  na jednu ravninu.

**Definicija 2.4:** Za dani  $G = (V, E)$ , ravni origami nad  $G$  je beskonačan niz origamija  $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$  takav da: takav da:

- za svako lice  $f$ , slika  $\{\sigma_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$  uniformno konvergira ka planarnom poligonu.
- za svaki brid  $l$ , kut savijanja od slike  $\{\sigma_n(l)\}_{n=1}^{\infty}$  konvergira prema  $\pi$  ili  $-\pi$ .

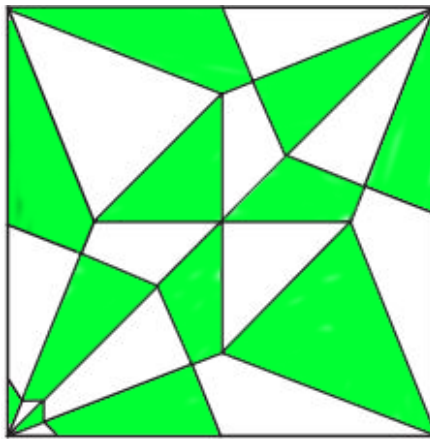
Neformalno ravno savitljivo shemu možemo definirati kao shemu savijanja koja leži na ravnini i ima sve kutove pod  $\pi$  ili  $-\pi$ . Naravno ova definicija ima svoja ograničenja u fizikalnom svijetu. Kutovi bridova nikada zapravo neće biti jednaki  $\pi$  zbog debljine papira, jedni moguće ako papir prolazi kroz samog sebe. Konačno kažemo ako postoji ravni origami tada je shema savijana ravno savitljiva.

## 2.2. Uzorci udubljenja i ispupčenja

Bojanje grafova je jedno od osnovnih operacija nad grafovima. Cilj takve operacije je obojati graf sa što manje boja moguće bez da susjedni čvorovi imaju istu boju. To naravno dolazimo do teorema četiri boja koji govori kako svaki planaran graf je obojiv sa 4 boje. Tako na primjer za bojanje geografskih karti nam je potrebno četiri boje da dvije susjedne regije nemaju istu boju. Naravno uz apstrakcije karte na graf.

Definirali smo shemu savijanja kao planaran graf  $G = (V, E)$ , no u definiciju smo uzeli još da nam bridovi moraju biti ravni što nas dovodi do strožeg teorema od teorema četiri boje. Lica  $G$  su su dva obojiva. Naravno ako je  $G$  ravno savitljiv.

**Teorem 2.1:** Lica ravnog origamija su 2-obojava.



**Slika 2.3:** Primjer sheme savijanja koja je dva obojiva. Shema savijanja ždrala.

Neformalni dokaz: Nakon što složimo origami model, stavimo ga na dlan. Sve strane koje gledaju gore, obojamo jednom bojom, sve strane koje gledaju dole obojamo drugom bojom. Kada bi smo rastavili shemu dobili bi smo nešto nalik na sliku 2.3.

Sa zadnjim teoremom lako je izložiti sjedeći korolar.

**Korolar 2.1:** Svaki unutarnji vrh je parnog stupnja. Odnosno  $M + V \equiv 0 \pmod{2}$ . To je lako za uočiti, jer ako bi smo imali neparan broj stupnjeva imali bi dva susjeda sa istom bojom. Za rubne vrhove to ne vrijedi, vidljivo je sa slike 2.3 gornji desni kut ima stupanj 5.

Interesanto svojstvo koje pruža Teorem 2.1 je to da ako je origami ravno savitljiv, tada odmah možemo reći koja strana ide gore ili dolje, što je izuzetno moćno svojstvo kod dizajniranja.

Sada idemo promatrati vrhove sheme savijanja zasebno. Obično bez generalizacije pričamo da vrh zatvara kut  $2\pi$ , premda u literaturi se istražuju primjeri i kada to nije slučaj. Gledamo vrhove zasebno kako bismo kasnije ustvrdili globalne uvjete ravnog savijanja.

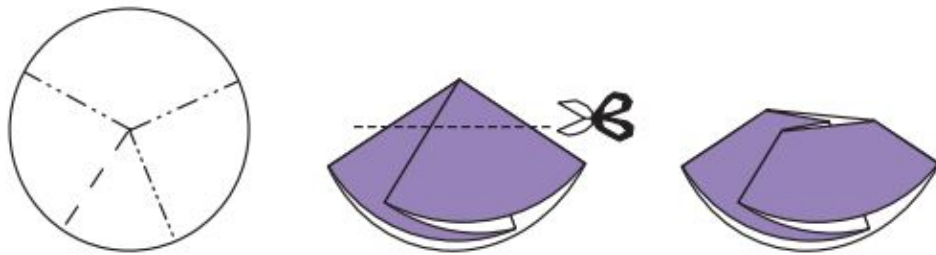
Jedan od osnovnih i starijih teorema je Maekawavin teorem iz 1987.

**Maekawin teorem:** Maekawin teorem govori kako je razlika između udubljenja i ispupčenja u ravnosavitljivom jednovršnom origamiju 2. Odnosno vrijedi formula  $M - V = \pm 2$  ili formalnije

$$\sum_{i=1}^{2n} \mu(l_i) = \pm 2 \quad (2.1)$$

$l_i$  su nabor, dok  $\mu$  je funkcija preslikavanja nabora na broj iz Definicije 2.3

Razlog zašto imamo  $\pm$  je taj što uvijek papir možemo okrenuti i ispupčenja mijenjaju definiciju sa udubljenjima.



**Slika 2.4:** Presjek vrha.

Dokaz je jednostavan. Ako gledamo presjek vrha kao na slici 2.4, dobiti ćemo poligon. Taj poligon zatvara kut od  $2\pi$ . Kako znamo da udubljenja i ispupčenja zatvaraju kut od  $\pi$  odnosno  $-\pi$ . Dobivamo sljedeći postupak.

$$\pi M - \pi V = 2\pi \implies M - V = 2 \quad (2.2)$$

Najbitnija stvar kod Maekawinog teorema je ta da on je nužan uvije. Nije dovoljan. To znači da ne možemo napraviti slučajne preslikavanja udubljenja i ispupčenja da vrijedi Maekawin teorem i očekivati ravno savitljivost. Dovoljan dokaz je Kawasakijev teorem koji je jednostavan u iskazu, ali teško je pokazati njegovu dovoljnost. U literaturi se naziva još Kawasakijev-Justin teorem.

**Kawasakijev teorem:** Ako za jedno vršni origami  $G$  sa kutem  $\leq 2\pi$  i sa kutovima između nabora  $\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1}$ . Onda  $G$  ravno sklopljiv ako vrijedi:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots - \alpha_{2n-1} = 0 \quad (2.3)$$

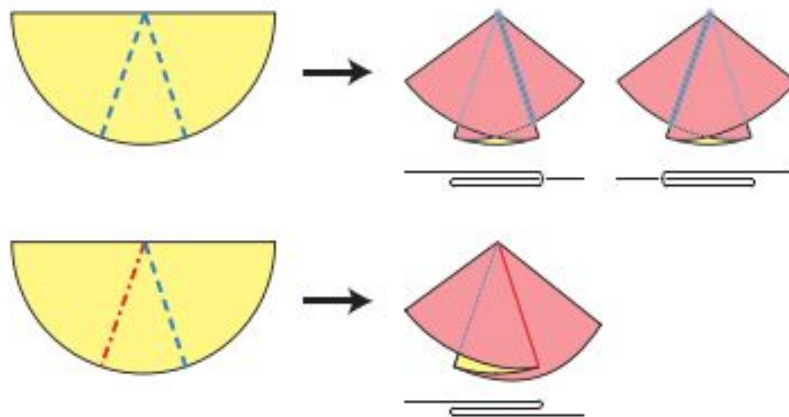
U literatur se izučavaju puno općenitiji teoremi. Stoga se gledaju slučajevi kao na primjer kutovi koji ne zatvaraju  $2\pi$  odnosno stošci. Tako iz zadnjeg teorema treba primjetiti da ne vrijedi Kawasakijev teorem na rubovima.

Ovaj teorem nam je dovoljan. Novi problem koji sada imamo je taj određivanja dali je nabor ispupčenje ili udubljenje.

Nazovimo taj problem preslikavanje nabora. Cilj tog problema je definirati valjano preslikavanje nabora odnosno definirati valjanu  $\mu$ . Pokazuje se da je uvijek moguće naći preslikavanje u linearnom vremenu. To se postiže algoritmom i upravo je taj algoritam jedan od dokaza dovoljnosti.

Preslikavanje nije uvijek trivijalno. Jedan od problema koji se javlja kod preslikavanja nabora je prolaznost papira. Mora vrijediti sljedeća lema.

**Lema 2.1 Veliki–Mali–Veliki** Neka je  $G$  ravni savitljiv vrh sa kutovima  $\alpha_i$  i ispravnim preslikavanje ispupčenja i udubina  $\mu$ . Ako  $\alpha_{i-1} > \alpha_i < \alpha_{i+1}$  za neki  $i$ , onda  $\mu(l_i) \neq \mu(l_{i+1})$ .



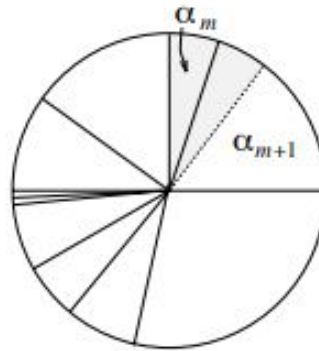
**Slika 2.5:** Primjer problema pridruživanja nabora. Gornja slika prikazuje nemoguća savijanja jer je srednji kut lokalni minimum.

Ova lema se često spominje u radovima pod različitim imenima, ponekad čak i bez imena, ali gotovo svaki rad koji spominje Kawasakijev teorem također spominje i Lemu 2.1. Ime "Veliki-Mali-Veliki" je preuzeto iz najnovijih izvora.

Ta lema nam govori da ako imamo kut koji predstavlja lokalni minimum, nabori koji ga okružuju moraju biti različiti. Sada možemo dokazati dovoljnost Kawasakijevog teorema.

**Algoritam 2.1:** Neka je  $l$  skup nabora, a  $\alpha_i$  kut između nabora  $l_i$  i  $l_{i+1}$ . Algoritam traži

lokalni minimum  $\alpha_{i-1} > \alpha_i < \alpha_{i+1}$ . Kada smo pronašli lokalni minimum, oduzimamo kut  $\alpha_i$  od kuta  $\alpha_{i+1}$ , te brišemo  $l_i$  i  $l_{i+1}$ . Na kraju, spajamo kut  $\alpha_{i-1}$  i  $\alpha_{i+1}$ . Za nabore koje smo maknuli, pridružujemo im nabore M,V ili V,M. Algoritam se ponavlja sve dok nismo pridružili orijetaciju naborima svim naborima osim zadnje dvije. Zadnja dva brida postavimo kao V,V ili M,M te njihovo preslikavanje definira sve ostale.



**Slika 2.6:** Primjer rada algoritma. Slika prikazuje trenutak u kojemu smo spojili kutove.

Algoritam se može implementirati u linearnom vremenu pomoću posebnih struktura podataka. Naime bitno je efikasno tražiti lokalne minimume.

Bit ovog teorema je taj da je ravno savijanje oko jednog vrha lagan problem. Iz zadnjeg koraka možemo vidjeti da vrijedi Maekawin teorem, jer tijekom algoritma svaki brid ima svoj obrnuti par, te na kraju imao 2 brida iste orijentacije.

Konačno možemo prbrojati koliko postoji validnih preslikavanja. Taj broj nam je bitan jer možemo vidjeti koliko slobode u dodavanju preslikavanja imamo što nam treba pri dizajniranju. Definiramo  $C(\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1})$  kao broj preslikavanja. U dokaze nećemo ulaziti.

Ako su svi kutevi jednaki za broj validnih preslikavanja  $C$ , vrijedi:

$$C(\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1}) = 2 \binom{2n}{\frac{n}{2} - 1} \quad (2.4)$$

Ako su kutovi slučajni te vrijedi Kawasakijev teorem, ne znamo točan broj ali onda možemo postaviti granice na broj.

$$2^n \leq C(\alpha_0, \dots, \alpha_{2n-1}) \leq 2 \binom{2n}{n-1} \quad (2.5)$$

## 2.3. Origami je težak

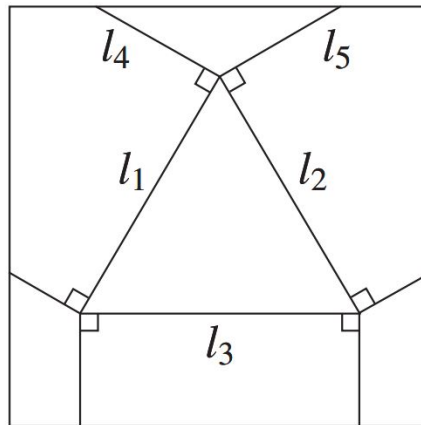
Pokazali smo kako savijanje jednog vrha lagan problem. Samo je potreban Kawasaki-jev teorem a origami prati Algoritam 2.1.

Obično origami modeli imaju puno vrhova. Te vrijedi razmotriti uvjete ravnog savijanja u globalnom slučaju. Kada nađemo preslikavanje preostaje nam problem slaganja. Naravno da lokalna pravila još uvijek vrijede. Problemi origamija se svedu na

- Za zadanu shemu savijanja  $G$  pronaći valjani globalni  $\mu$ .
- Za zadani  $\mu$  pronaći valjani origami, problem slaganja (layering problem)

**Definicija 2.5:** Ako za svaki vrh sheme savijanja vrijedi Kawasaki-jev teorem tada se takva shema savijanja naziva fantomska shema (phantom fold).

Za fantomsku shemu nužno ne vrijedi ravno savitljivost. Pokažimo to na slici 2.7.



**Slika 2.7:** Primjer fantomskog nabora koji nije ravno savitljiv.

Ako se sjetimo Leme 2.1 (Veliki-Mali-Veliki), znamo da lokalni minimum ne smije imati iste nabor. Na slici 2.7 gledajmo nabor  $l_1$  i  $l_2$ . Kut koji oni zatvaraju je lokalni minimum, stoga je nužno  $\mu(l_1) \neq \mu(l_2)$ . Također, isto mora vrijediti i između  $l_2$  i  $l_3$  te  $l_3$  i  $l_1$ . Znači, svaki brid mora imati susjeda koji je drugačijeg nabora. No to nije moguće jer imamo dva nabora. Ako stavimo da je  $\mu(l_1) = M$ , slijedi  $\mu(l_2) = V$ , te konačno dobivamo  $\mu(l_3) = M$ , što krši Lemu 2.1.

Ovi problemi su nam temelji za izradu primjenjivih origami konstrukcija. Cilj nam je pronaći valjane  $\mu$  i pronaći korake savijanja. No kako je to i inče u praksi ovi problemi su NP teški.

Način na koji dokazujemo da je problem koji imamo NP težak je taj da dokažemo da je teži ili jednako težak kao dobro poznati NP teški problem. Konkretno naćemo barem jedan primjer koji se svede na NP težak problem.



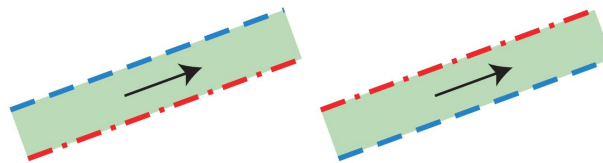
## Teorem 2.2: Ravno savitljivost je NP teško

Dokaz ovog teorema jedan je posebno interesantan dokaza. Prvi su ga predstavili 1996. Marshal Bern i Barry Hayes. Dokaz je bio u uporabi 20 godina. Gotovo svaka knjiga o origami matematici ga koristi te predavanja sa MITa stavljaju posebnu težinu na njega. No 2016. se pokazalo kao ima grešku. Novija literatura i dalje koristi ovaj dokaz jer je smislen a njegov popravak se svede na gotovo istu ideju samo je drugačije izveden jedan dio. Također ideja dokaza je pogodna za dokazivanje drugih sličnih svojstava.

**Dokaz Bern i Hayes(1996) 2.3:** Ideja je reducirati problem ravnog savijanja na dobro poznati NP težak problem NAE 3-SAT. NAE(Not all equal) 3-SAT je NP teški problem sličan klasičnom SAT problemu, u kojemu je cilj naći varijable tako da svaka klauza nema sve iste varijable. Tražimo klauzule sa dvije ili jednom istinom.

$$\text{NotAllEqual}(x_i, x_j, x_k) = \begin{cases} \text{LAŽ} & \text{Ako } x_i = x_j = x_k, \\ \text{ISTINA} & \text{inače.} \end{cases} \quad (2.6)$$

To ćemo ostvariti origami aparatima(gadget), mali konstrukcijama koje se mogu gledati zasebno. Prvi aparat koji koristimo je žica ili **signal**. Definira se kao dva jako bliska nabora sa suprotnim pridruživanjem. Takvi nabori se zovu plisirati(pleat). Za razlikovanje istine od laži potrebno nam je i smjer. Tako kažemo kao žica je istina ako ima udubina s lijeve strane, dok laž ima s desne.

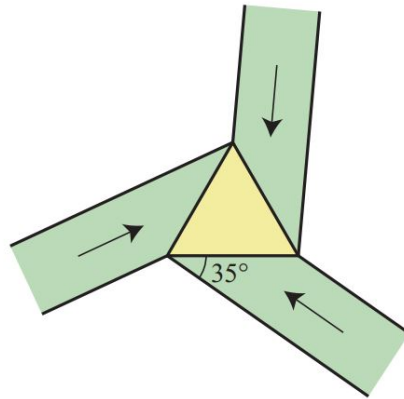


Slika 2.8: Signal

Kao logična vrata imamo shemu nabora jednako straničnog **trokuta**. Na slici je bitno primijetiti kut ulaza signala. Upravo pomoću njega se postiže funkcionalnost NAE vrata i on nije slučajan. Nazovimo kut upada signal sa  $\theta$ . Znamo da kut jednako straničnog trokuta je  $60^\circ$ . Ako je  $\theta > 60^\circ$ , onda nam se vrata svedu na već izvedeni primjer 2.7, i takav kut nije moguć za kreiranje NAE vrata.

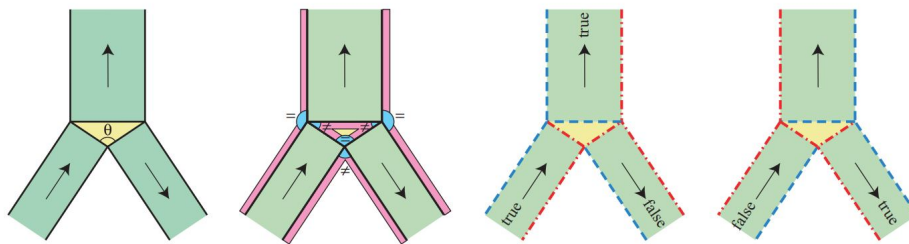
Ako postavimo  $\theta < 30^\circ$ , možemo pokazati da su sve kombinacije varijabli dobre, uvijek je ravno savitljiv. Što nam je loše.

Sa  $\theta = 30^\circ$  dobivamo da se signali sijeku u jednoj točki. Jednostavna simetrala kuta. Stoga kut upada  $\theta$  mora biti između  $30^\circ$  i  $60^\circ$ . U dokazima se koristi  $\theta = 35^\circ$  a u novijoj literaturi  $\theta = 36^\circ$ , premda mi je razlog promjene od jednog stupnja nejasan.



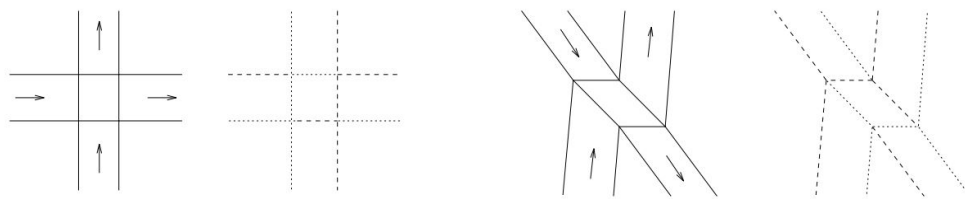
**Slika 2.9:** NAE vrata

Reflektor je aparat koji negira vrijednost signala. Čini ga od jednakokračnog trokuta. U njega ulazi jedan signal i izlaze 2. Negirani signal se reflektira dok pozitivni izlazi kroz treću stranu. Kod njega možemo modelirati kut upada da uspijemo pogoditi naša vrata. Bitno je primijetiti da jedan signal definira ostale nabore. Naime ako to ne bio slučaj reflektor bi imao više funkcije nego što smo definirali. To je problem. Želimo da naša shema bude jednoznačno određena signalima.



**Slika 2.10:** Reflektor

Zadnja konstrukcija koja nam je potrebna je prelaznik. Njegova uloga je ta da signali mogu ne smetano prolaziti, te sačuvati svoje vrijednosti. Ali služe kao i konačni usmjerivači u NAE vrata. Sa ovakvim konstrukcijama možemo napraviti shemu savijanja koja je potpuno određena sa vrijednostima signala. Tako možemo birati varijable i rezultat će nam biti ravno savitljiv origami ili nesavitljiv origami. Stoga smo pokazali da je problem ravnog savijanja teži od NAE 3-SAT. Kao što sam rekao sa ovim dokazom postoji problem koji se otkrio 20 godina nakon objavljivanje. Problem je sa



**Slika 2.11:** Prelaznik

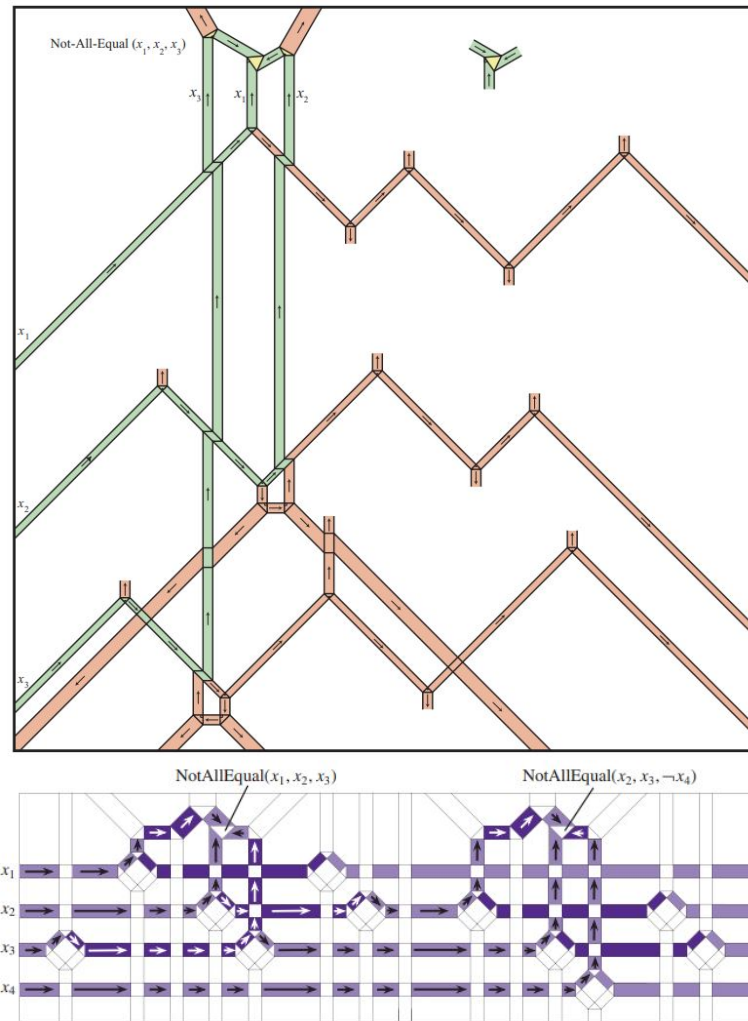
prelazikom kada je kut drugačiji od  $90^\circ$ . Naime narušava se lema Veliko-Malo-Veliko. Dokaz se popravio 2016. radi na isti princip kao i iz 1996, samo ima dva aparata te koristi tehniku unakrsno plisiranje (box-pleating). Takva tehinka omogućava signale utišavanja, što su signali koji zaustavljaju neželjene signale. Tako konačna shema je puno urednija.

Pokazuje se da postoje specijalni slučajevi grafa za koje se lako može pronaći funkcija preslikavanja. To su aciklički grafovi. Naime algoritam krene od bilo kojeg čvora, preslika nabore. Zatim gledamo sve susjed. Probamo preslikati susjeda. Ako brid između susjeda i početnog čvora drugačiji, onda rotiramo susjeda. Odnosno zamijenimo M i V za sve nabore susednog čvora. Što je operacija koja je uvijek moguća. Ovakav algoritam je očit ali se ne nalazi u literaturi.

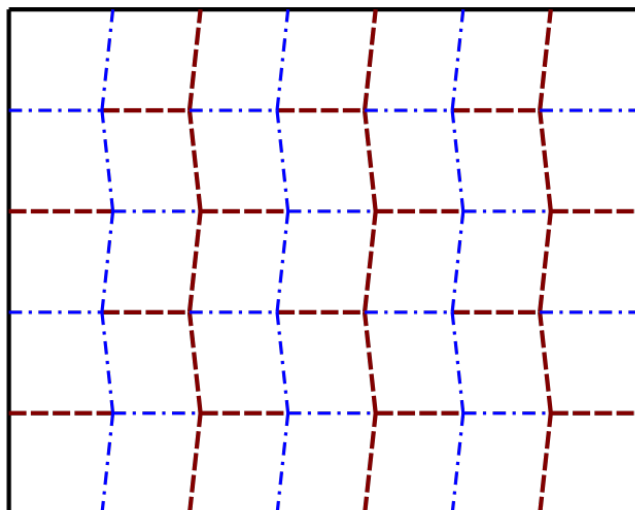
## 2.4. Rigidni origami

Rigidni origami predstavlja posebnu vrstu origamija koja je izuzetno korisna u praktičnoj primjeni. Neformalno rečeno, to je origami u kojem svako lice origamija ostaje nedeformirano, bez neočekivanih bridova. Ako bismo htjeli složiti neki origami model gotovo uvijek bismo morali dodati još neki nabor koji nije očekivan i nije u konačnoj shemi savijanja. Tako da kod rigidnih origami modela možemo zamijeniti lica s čvrstim materijalom poput željeza ili stakla i i dalje bismo mogli složiti origami. Naravno, u praksi moramo obratiti pažnju na zglobove, odnosno mjesta savijanja koja se moraju moći saviti. Takvih modela je puno manje i teorija je znato kompliciranija, no zbog njihove važnosti oni su od posebnog interesa.

Jedna od glavnih primjera rigidnog savijanja je miura ori. Takav model je u literaturi detaljno izučen te je od posebnog interesa. Bio je prvi model koji se razmatrao za projektiranje svemirskih solranih panela. Geografske karte su često savijene prema shemi savijanja miura. Najnoviji radovi koriste dijelove miure kako bi sastavili korisne konstrukcije. Konkretno mrežasta hvataljka. Samo dizajniranje rigidnih origamija je veoma ograničeno te stoga znanstvenici kreću od dobro poznatih rigidnih modela.



**Slika 2.12:** Primjer jedne sheme savijanja napravljene od konstrukcija. Vidimo prema gore logička vrata koja moraju zadovoljavati NAE uvijet. Druga slika predstavlja shemu savijanja napravljenu prema radu iz 2016.



**Slika 2.13:** Shema miura ori.

Shema savijanja nosi sa sobom puno više informacija nego samo vrstu nabora, broj nabora i slično. Do sada smo gledali kuteve između nabora u 2D postoru. Kod rigidnih origamija ih gledamo u 3D postoru. Potreban nam je par kutova  $(\theta_i, \rho_i)$  Gdje je  $\theta_i$  kut između bridova  $l_i$  i  $l_{i+1}$  znači kut koji smo dosad poučavali u Kawasakijevom teoremu. A kut  $\rho_i$  oko kojeg se rotira  $l_i$ , odnosno  $\mu(l_i) = \rho_i$ . Ti kutovi su nam potrebni za daljnje definicije rotacijskih matrica.

$$R_z(\theta_i) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_x(\rho_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\rho_i) & -\sin(\rho_i) \\ 0 & \sin(\rho_i) & \cos(\rho_i) \end{bmatrix}$$

**Teorem 2.3:** Neka je dana shema savijanja uzorak s jednim vrhom  $G$ , koji je rigidno savitljiv. Tada vrijedi:

$$R_z(\theta_1) \cdot R_x(\rho_1) \dots R_z(\theta_n) \cdot R_x(\rho_n) = I$$

Zadnji teorem lako možemo intuitivno shvatiti, no dokaz je nešto tehničkiji. Neformalno se vrtimo u krug, stoga je nužno da vrijedi identiteta jer smo se vratili na početak. Ključni dio ovog teorema leži u tome što smo povezali kutove  $\theta$  i  $\rho$  u jednu formulu. Možemo naslutiti da ćemo ovdje naići na neku konstantnu zakonitost. Naime, kutovi  $\theta$  se ne mijenjaju dok se kutovi  $\rho$  mijenjaju pri rotaciji.

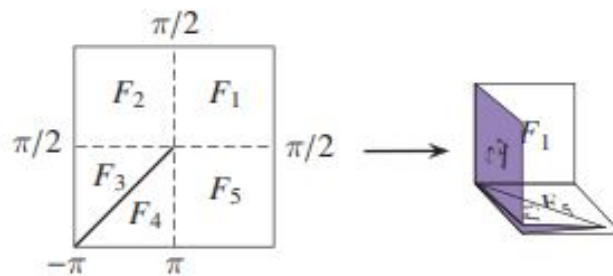
**Teorem 2.4:** Za jednovršnu shemu savijanja  $G$  koja ima stupanj  $n$  rigidno savijanje ima  $n - 3$  stupnjeva slobode.

Dakle, ako imamo stupanj 4, jedan kut  $\rho$  definira sve ostale kuteve. To svojstvo možemo koristiti za jednostavne origami simulacije. Za izračun ostalih kuteva iz jednog

$\rho$ , kod vrha stupnja 4, svodi se na sljedeći izraz:

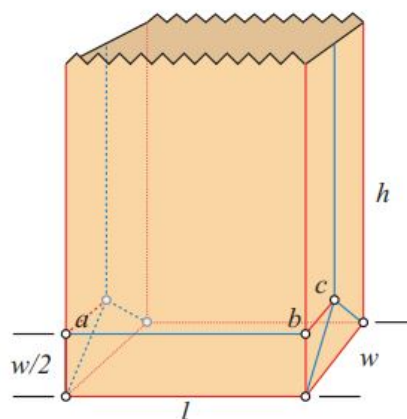
$$\tan\left(\frac{\rho_1}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \tan\left(\frac{\rho_2}{2}\right)$$

$\alpha$  i  $\beta$  su dva susjedna kuta u čvoru. Stoga možemo shvatiti ako bi smo htjeli simulirati savijanje računarskog origamija potrebana nam je samo matrica  $R_x(\rho_i)$ .



**Slika 2.14:** Primjer rigidnog savijanja u 3D.

Jedan od primjera koji se često koristi u kontekstu rigidnih origamija je papirnata vrećica. Čak neke knjige kada pričaju od rigidnosti origamija koriste se terminom Teorem papirnate vrećice. Papirnata vrećica ima svoju rigidnost u dva različita stanja, pri čemu ne postoji mogućnost prijelaza između ta dva stanja bez narušavanja rigidnosti. Drugim riječima, papirnate vrećice se ne mogu napraviti od materijala kao što je metal, bez obzira na spojeve. Naravno postoji istraživanje koje je to fizički i dokazalo, te dotjeralo shemu da je rigino ravno savitljiva.



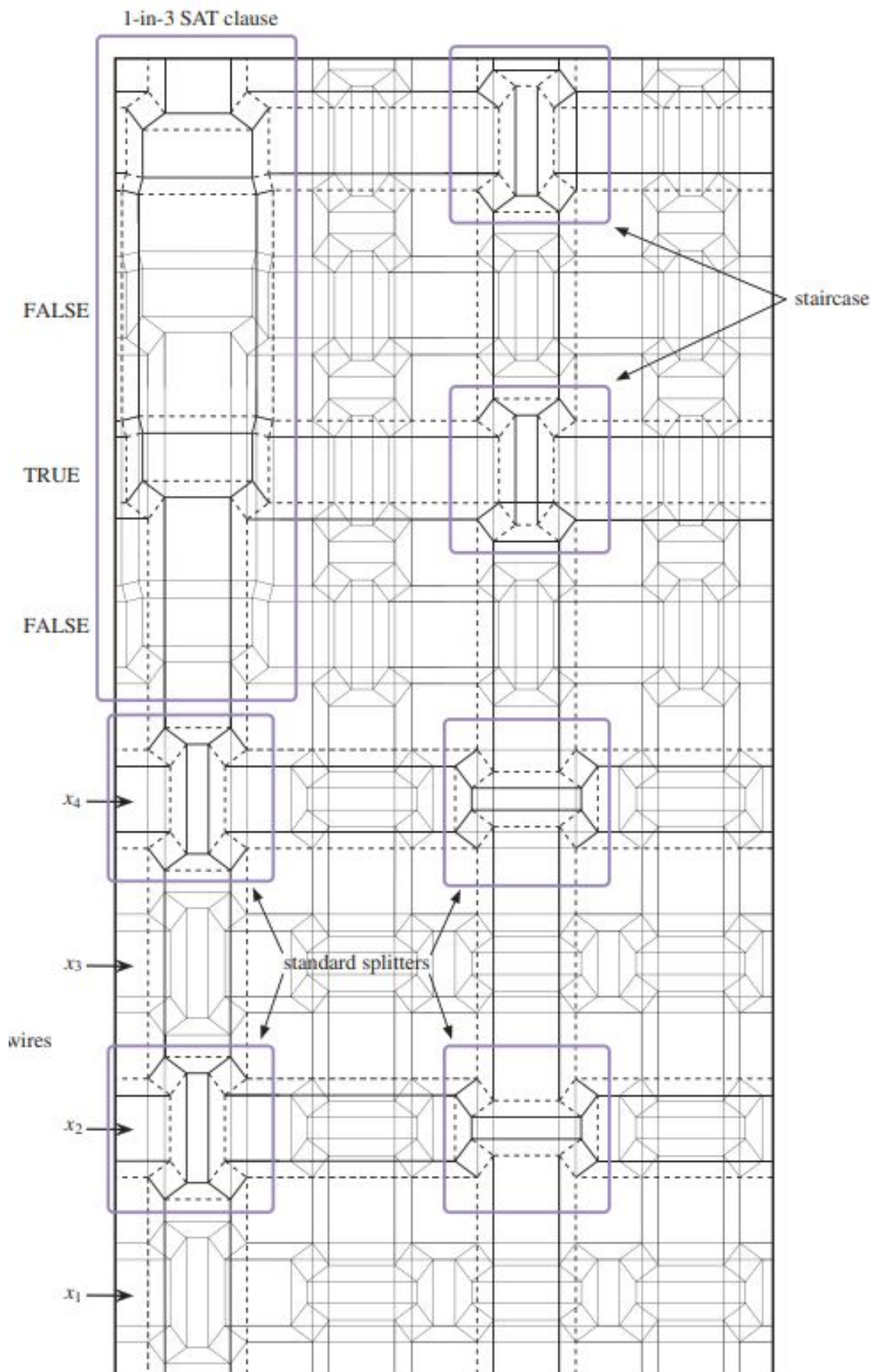
**Slika 2.15:** Shema savijanje vrećice

Sama teorija rigidnosti može se razmatrati neovisno. Ona je česta pojava u području strojarstva i robotike. U literaturi se detaljno istražuje rigidnost, koja nema iz-

ravnu povezanost s origamijem. Teorija se temelji na konceptima teorije lanaca, veza i opruga, dok matematički pristup obuhvaća teoriju grafova, diferencijalne matematike te na kraju linearne algebre. U literaturi se ova teorija temeljito razrađuje te joj je konačni cilj dokazivanje Teorema 2.4. Najnovija istraživanja u području računalnog origamija usredotočena su na pitanje rigidnosti, pri čemu se ističe jedan od novijih teorema koje je lako za shvatiti i daje korisne informacije.

**Teorem 2.5:** Rigidno savijanje sa izbornim naborima je NP-teško.

To je problem koji se odnosi na ravne sheme savijanja bez određene vrste nabora, a tražimo nabore koji omogućuju rigidno savijanje. Dokaz tog problema, koji nećemo detaljno razmatrati, nalazi se u sličnom konstruktivnom dokazu kao i dokaz 2.3, kao što je prikazano na slici 2.16. Taj dokaz pokazuje nam ni da stroži podskup problema ravnog savijanja je i dalje NP-težak.



**Slika 2.16:** Primjer sheme savijanja koja se koristi za dokazivanje Teorema 2.5. Na slici su prikazana logička vrata i ulazni signali.



## **3. Origami problemi**

Ovo poglavlje bavi se općenitim problemima vezanim za origami i problemima koje origami rješava. Važnost ovog poglavlja je ta što nam se ovakvi problemi mogu javljati pri kompleksnijim problemima, stoga trebamo obratiti pozornost na njihovo postojanje i dobro poznavati metode rješavanja i njihova ograničenja.

### 3.1. Koliko puta možemo saviti papir

Savijanje papira predstavlja jedan od starih problema s kojim se mnogi susreću. Vjerojatno ste sami pokušali preklopiti papir i primijetili da nije moguće napraviti više od nekoliko preklopa. Možda ste i čuli legendu ako presavijete papir 17 puta, došli bi ste do mjeseca, a da se vratite nazad morate ga još jednom presaviti.

Origami je umjetnost savijanja papira, i željeli bismo formalno istražiti koliko puta je moguće preklopiti papir. Uobičajena granica koja se navodi je 6 preklopa. Međutim, Brittany Gallivan, još dok je bila u srednjoj školi, fizički dokazala je da je moguće preklopiti papir čak 12 puta. Za to je koristila izuzetno dugačku vrpca, koju je uvijek preklopila oko osi u istom smjeru. Ta vrpca bila je duga oko 1,2 kilometra.

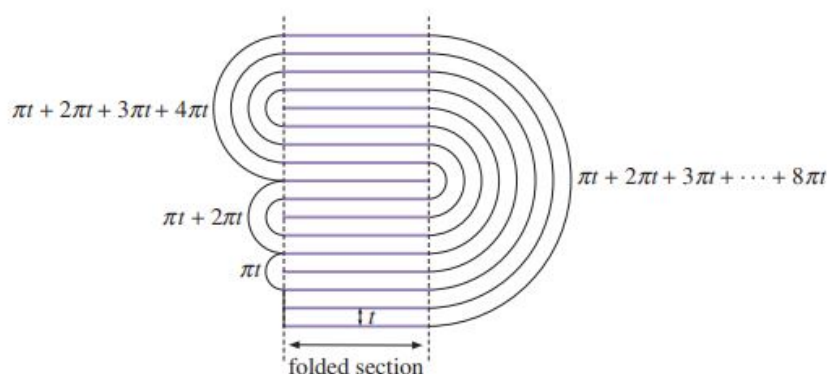
Važno je napomenuti da postoji fizičko ograničenje i praktične poteškoće pri preklapanju papira više od određenog broja puta, te su stoga takvi ekstremni rezultati rijetkost.



Slika 3.1: Reflektor

**Teorem 3.1 Gallivan, 2002:** Minimalna dužina papira sa debljinom  $t$  koju trebamo saviti  $n$  puta je dana formulom.

$$L_n = \frac{\pi t}{6}(2^n + 4)(2^n - 1) \quad (3.1)$$



**Slika 3.2:** Reflektor

Dokaz: Lako je uočiti da za svako preklapanje udvostručimo broj slojeva. Tako za  $n$  presavijanja imamo  $2^{n-1}$  slojeva. Za presavijanje papira potrebno nam je neki polukrug papira. Trebamo dodati  $i\pi t$  papira kako bismo presavili. Stoga imamo sljedeću formulu:

$$L_n = L_{n-1} + \sum_{i=1}^{2^{n-1}} i\pi t = L_{n-1} + \pi t \frac{2^{n-1}(2^{n-1} + 1)}{2} = L_{n-1} + \pi t 2^{n-2}(2^{n-1} + 1)$$

Nakon teleskopiranja dobivamo

$$L_n = \pi t \sum_{i=n}^n 2^{i-2}(2^{i-1} + 1) = \pi t \left( \sum_{i=n}^n 2^{2i-3} + \sum_{i=n}^n 2^{i-2} \right)$$

Ako uvedemo  $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$  dobivamo konačnu formulu.

$$L_n = \pi t \left( \frac{1}{6}(2^{2n-1}) + \frac{1}{2}(2^n - 1) \right)$$

Ta nakon skraćivanja dobivamo

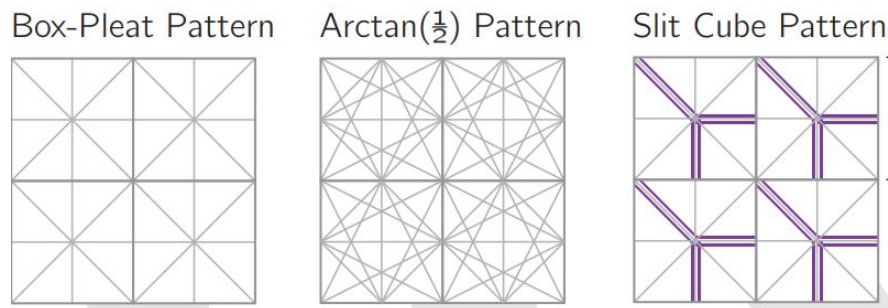
$$L_n = \frac{\pi t}{6}(2^n + 4)(2^n - 1)$$

Bitno je primijetiti kako ovaj teorem daje minimalni dužinu papira. Kada bi smo išli savijati papir u praksi morali bi smo potrošiti papir i na druga mjesta. Tako Gallivani kada je savijala papir 12 puta, u teoriji bi joj bilo potrebno oko 600 metara, a iskoristila je skoro duplo više. Ovaj teorem daje fizikalna ograničenja origamija, te iz njega trebamo shvatiti da u fizikalnom svijtu broj bridova na jedan čvor ne može biti arbitražno velik, stoga nam ovaj teorem olakšava traženje globalne  $\mu$ .

## 3.2. Univerzana shema zglobova

U uvodu smo spomenuli da se origami može koristiti u izradi robota u smislu programabilnih materija. Dok tradicionalne sheme savijanja stvaraju pojedinačne origami modele, u robotici želimo stvarati više modela i omogućiti promjenu tih modela. Stoga tražimo shemu savijanja koja bi nam omogućila stvaranje različitih modela. Srećom, može se dokazati da je za dovoljno velik papir moguće napraviti sve ortogonalne oblike, odnosno oblike koji su diskretizirani u obliku vokselâ.

Prvi korak u ovom procesu je utisnuti fiksnu shemu savijanja. Kao primjer, možemo koristiti shemu unakrsnog plisiranja. Međutim, postoje i druge vrste nabora koje mogu biti efikasnije za postizanje željenih rezultata.



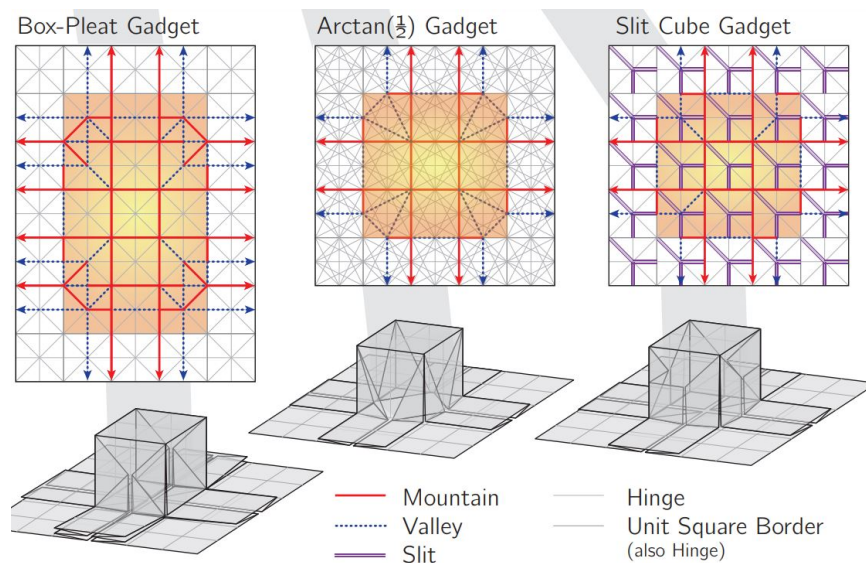
**Slika 3.3:** Utisnute sheme savijanja

Uzimajući u obzir da je naš prvi zadatak stvaranje jedne kocke, ali tako da se ostatak papira ne mijenja, koristiti ćemo shemu savijanja poznatu kao aparat kocke. Ova shema omogućuje nam da oblikujemo kvadratnu baznu strukturu koja će predstavljati našu kocku, dok ostatak papira ostaje neiskorišten.

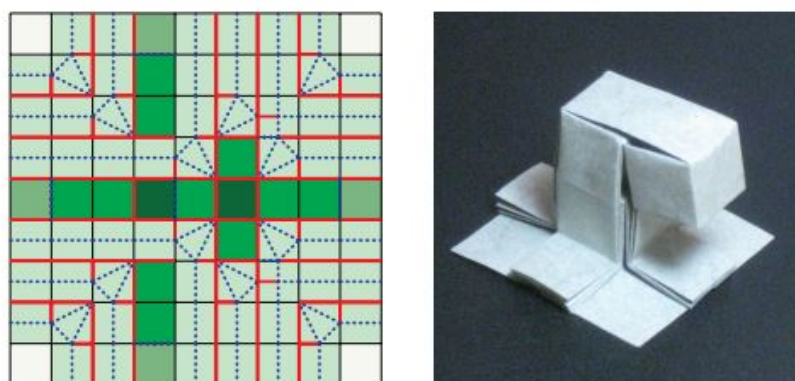
Kada ostatak papira ostaje nepromijenjen, možemo nastaviti raditi s istim aparatom. Jedan od ključnih detalja na koje moramo obratiti pažnju je kako "podići" kocku, odnosno kako bismo podigli strukturu koja predstavlja kocku iz ravne osnove. Ovaj korak može biti izazovan, ali moguće ga je ostvariti kroz odgovarajuću manipulaciju i savijanje papira. Kada jednom podignemo kocku iz ravne osnove, možemo tvrditi da je moguće konstruirati sve ortogonalne objekte. Naravno uz puno planiranja.

Optimizacija korištenja papira je ključna u origamiju, pa su u literaturi navedene metode koje omogućuju slaganje niza kocaka uz pomoć jednog aparata. Bitno je tražiti susjedne kocke kako bi se postigla efikasnost u korištenju papira.

Univerzalne sheme savijanja nisu ograničene samo na kocke. U literaturi se mogu



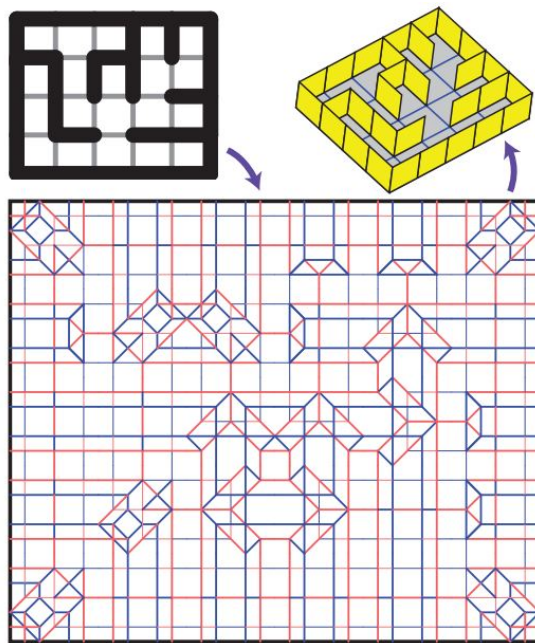
**Slika 3.4:** Aparati kocke za sheme savijanja



**Slika 3.5:** Podignuta kocka

pronaći i sheme savijanja za origami labirint. Labirint se temelji na šest aparata, pri čemu svaki aparat radi na izgradnji jednog zida labirinta. Ova shema omogućuje konstrukciju složenih labirinta kroz koordinirano savijanje papira pomoću različitih aparata.

Problem kod ovakvih shema savijanja je što troše puno papira. Kako su prijašnja rješenja izuzetno jednostavna istraživači su pokušali dizajnirati efikasnije zglobove. Problem je pronaći uzorke koji rade modele, stoga se izučavaju uzorci koji efektivno modeliraju površinu iz vrpce. (5) (8)



Slika 3.6: Primjer labirinta

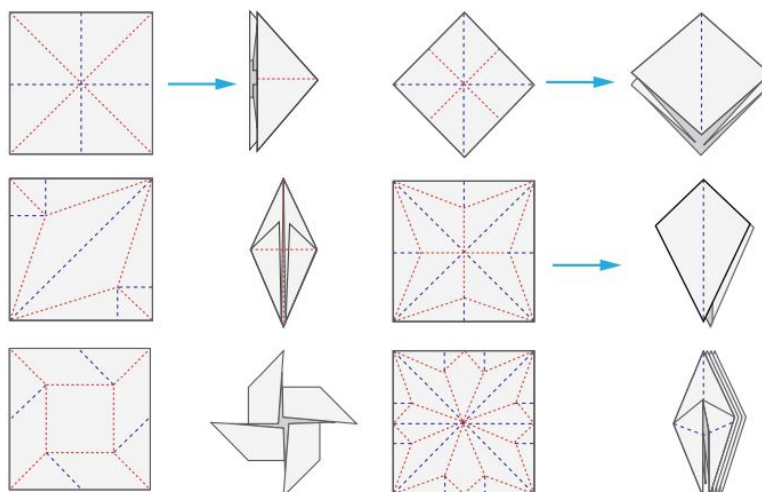
### 3.3. Dizajniranje origamija

Dizajniranje origamija kao umjetnosti igra ključnu ulogu u razvoju matematike origamija i računalnog origamija. Jedno od posebno zanimljivih svojstava koje nas intrigira je mogućnost konstrukcije svih poliedara pomoću origami tehnike. Srećom, dokazano je da je to moguće. Već 2000. godine, Demaine je pružio dokaz koji demonstrira ovu mogućnost. Ideja dokaza temelji se na omotavanju beskonačno dugačke trake oko poliedra. Iako sam dokaz može biti kontroverzan zbog pretpostavki o beskonačno velikom papiru koji se mora omotati oko malene trake - što nije praktično izvedivo u fizičkom smislu, program Origamajzer nam pruža primjer sheme savijanja za svaki poliedar. Najvažnija poruka koju možemo izvući iz toga je: **Sve poliedre možemo konstruirati pomoću origami tehnike.**

Samo je pitanje koliko efektivno

U uvodu sam grubo objašnjavao kako se dizajniranje origamija svede na dizajniranje baze, te se iz te baze lakše dobiva model. Također sam spomenimo problem pri planiranju ekstremiteta na podjeli papira. Rješenje se svelo na upisivanje krugova na papir i granastu strukturu (stick figure). Takva metoda se spominje pod metodom rijeka i krugova te se za nju kaže "Ono što vidiš to savijaš".

Ukratko ćemo objasniti kako raditi *TreeMaker* jer upravo njegov algoritam dovoljno dobro rješava probleme dizana, te danas je on najkorištenij u origami umjetnosti. Ne-



**Slika 3.7:** Tradicionalne origami baze

ćemo ulaziti u sve detalje, ali za rad algoritma potreban nam je teorem o ne elastičnosti papira, koji nam se u praksi javlja kao bitno ograničenje.

Problem koji želimo riješiti je planiranje papira za ekstremitete, korisnik bi izabrao koordinate ekstremiteta te potencijalno njihovu veličinu.

Rješavanje tog problema svode se na definiranje jedno-ravninske baze (uniaxial base).

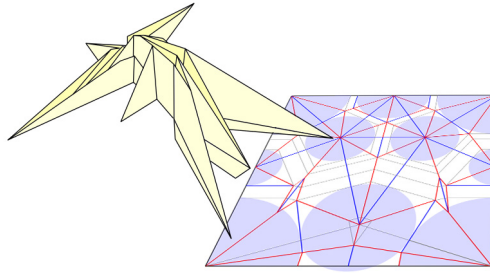
Cilj nam je napraviti projekciju baza na papir.

**Definicija: Jedno-ravninske baze (uniaxial base):**

- leži na  $z \geq 0$  pluprostoru
- presjek sa  $z = 0$  čini projekciju na ravninu
- svaki ekstrem se projecira na liniju
- projekcija zgloba dva ili više ekstremiteta je točka
- graf koji povezuje zglobove je stablo
- samo jedna točka se presavija u jedan list

Bitno je zaključiti da je to baza koja uvijek leži iznad poluprostora, odnosno za svaku koordinatu baze (ona je u 3D) vrijedi  $z \geq 0$ . Ključno je da bazu presijecamo ravninom, ako tu ravninu pomičemo prema gore, presjek između origami baze i ravnine će se smanjivati sve dok ne kolapsira u granastu strukturu. Neformalno baza lići na oblik piramide. Sada možemo shvatiti da će naša baza izgledati kao graf stablo. Na listovima tog stabla će se projicirati koordinate ekstremiteta sa papira. Kod stablaste baze bitno nam je još svojstvo koje govori da između listova postoji točno jedan put.

**Teorem o ne elastičnosti papira:** Za dane dvije točke  $p_i$  i  $p_j$ , njihova euklicka udaljenost  $d(p_i, p_j)$ , savijanja može se samo smanjit.



**Slika 3.8:** Primjer jedno-ravninske baze.

Ovaj teorem je lagan za dokazat i dokaz stoji u imenu, veoma je jednostavan ali je bitna. Ono što još trebamo obratiti pozornost je na udaljenost na bazi. Označimo sa  $t_i, t_j$  koordinate na stablu grafa, odnosno prolazimo kroz rub baze. Tada rješavamo problem makimizacije. Odnosno želimo da nam stablo bude što bliže originalnom.

$$d(p_i, p_j) \geq \lambda d(t_i, t_j)$$

Ovakvom metodom dobivamo osnovnu bazu. Sad trebamo definirati aktivnu putanju i triangulirati. Aktivne putanje su putanje koje su jednake udaljenosti kao i na papiru, nikad se neće sjeći. Nakon tih koraka dobivamo shemu savijanja koja nijra vano savitljiva. Moramo forsirati ravno savitljivost. To se postiže sa postupkom zečjih ušiju (*rabbit – ear*). U literautri se na takve postupke zove molekule. To su načini savijanja za koje od konveksne poligona dobijemo ravnosavitljivu shemu savijanja.

**Teorem začijih ušiju:** Za dani trokut  $ABC$ , neka je  $O$  sjecište tavo da  $AO, BO, CO$  su simetrale kuta. Neka je  $XO$  okomica na bilo koju od tri strane, tada vrijedi da je novi vrh  $O$  ravno savitljiv. Taj teorem je dobio ime jer je prijašnja operacija jednaka kreiranju zečjeg uha, koji je česta operacija. Tako možemo forsirati trokute da budu ravno savitljivi. Osim zečjih ušiju postoji postupak zvan Langova univerzalna molekula koja omogućuje savijanje svih konveksih poligona.

Sa ovavim postupkom dobivamo sheme savijanja, koja daju jedno-ravninsku bazu pogodnu za umjetnička dizajniranja. **Problem savijanja salvete** Poznat i kao Margulinov problem, to je problem u kojemu za zadani četverokut, tipa salvetu,



### 3.4. Origami teselacije

Teselacija je popločavanje ravnog prostora sa nekim uzorcima. Popločavanja mogu biti beskonačna ili konačna. Teselacija i popločavanje obično se spominje u matematici i kemiji kod kristala. U tim branšama pločice su fiksni poligoni (ne nužno jedan). Kod origamija teselacije su od posebnog interesa, možemo periodički popuniti neki prostor, ta ga onda ravno saviti, što je izuzetno moćno svojstvo pri dizajnu origamija a i u tehnologiji. Već spomenuti miura je teselacijski origami koji je napravljen od jedne vrste ponavljajuće pločice. Također u raksi su nam bitne teselacije bazom vodene bombe i teselacija Rona Rescha.

Origami umjetnici koriste teselacije na dijelovima kako bi dodali neku strukturu, tipa ljuske od ribe, nabore tijela ose ili slično.

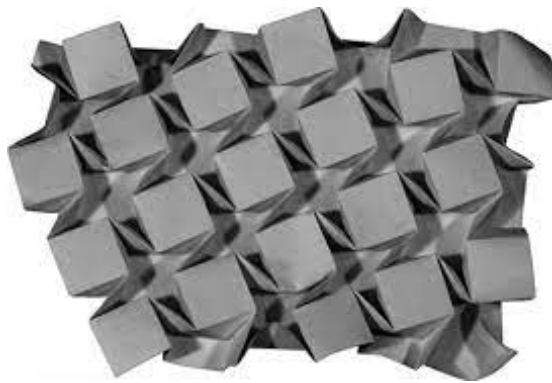
Tehnika teselacije je pogodna za dizajniranje velikih sklopivih modela. Tako pri dizajnu NASA stihade možemo vidjeti pravilna popločavanja. Sa znanstvene strane teselacijama se bavi T. Hull, a i David Huffman ja poznat po svojem doprinosu. Dok se ističe umjetnik Joel Cooper, sa svojim licima.

(6)



Slika 3.9: Joel Cooper, Lice

**Plisiranje(pleating)** je postupak utiskivanja uskih alternirajućih nabora. Obično kod istraživanja plisarenja se javlja kod dizajna odjeće ponajviše suknji. U origamiju je od posebnog interesa jer kod plisiranja možemo pokazati da se papir "želi sam saviti".



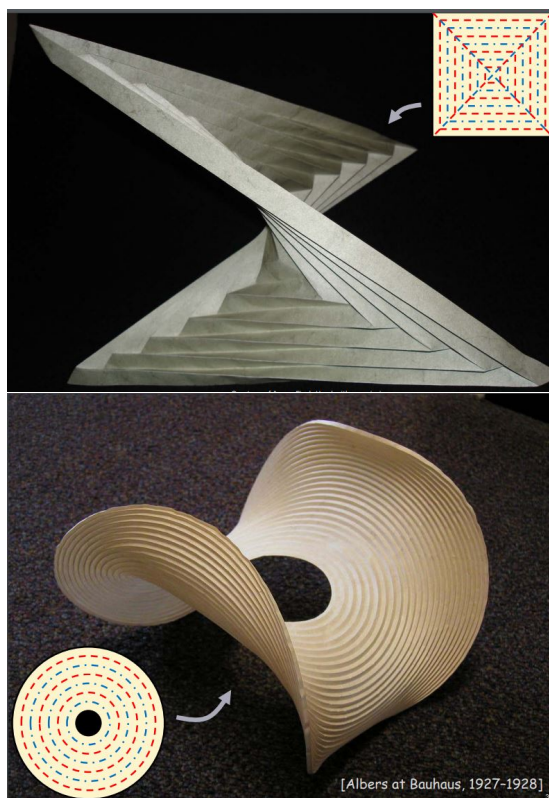
**Slika 3.10:** Huffmanova teselacija

Tako svojstvo nam je korisno tipa kod savijanja na nano razini te su plisari bili od velikog područja istraživanja. Postoje radovi u kojima su se simulirali takvi nabori i pokazano je kako su elastične sile opruga dovoljen za valjano modeliranje, odnosno papir uistinu "želi sam saviti".

Unakrsno plisiranje(box-pleating) je tehinka dizajniranja origamija, osmislio ju je Neal Elias, poznati majstor origamija i mađioničar. Takvom tehnikom se prije *TreeMakera* izrađivali modeli. Već spomenuti Langov sat je napravljen pomoću te tehnike.

Razmatramo koncentrična pilisranja. Do sada smo gledali da papir bude kvadrat ali možemo geldati i da bude drugog oblita tipa kruga ili šesterokuta. Paraleno sa rubom papira upisivat ćemo dva uska alternirajuća brid te ćemo dobiti sljede sheme savijanaj. Po potrebi postvit dijagonalu.

Ako biste probali tako saviti papir, on bi sam od sebe krenio izgeldati na oblik sedala. Jedna čudna stvrak koja se može dokazati je ta, da je taj oblik nemoguć. Znači papir sam od sebe želi doći u oblik koji je prema dosadašnjim zakonima origamija nemoguć. Dokaz je veazan za diferncijanu geometriju i gausu zakivljenost te je prvi pogled u neravne nabore sa kojima se David Huffman bavio. Neformalno postoje valjani nabori, to su dosadašnji jednostavni nabori pod  $\pi$ . Ne možemo papir savinuti preko ne valjanog nabora. A da su nabori nevaljani lako se vidi jer jer je nemoguće da svako lice bude planarno. Ono što se može pretpostaviti je to da papir ima više nabora nego što smo utisnuli. Nakon te prtpostavke možemo dokazati da takav obilik postoji. Premda jednostvno matematički možemo to pokazati, moramo biti vrlo precizni kod računanja.



Slika 3.11: Plisirani origami modeli.

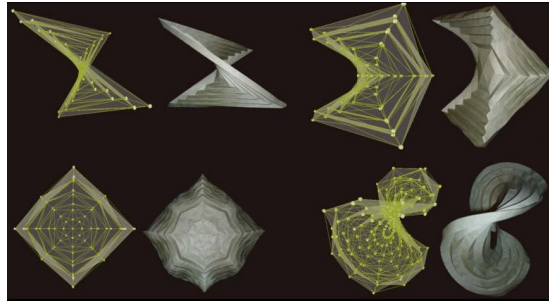
### 3.5. Problem jednog reza

Problem jednog reza predstavlja poseban izazov u origamiju u kojem je dopušteno napraviti samo jedan rez kako bismo dobili dva poligona određenog oblika. Ovaj problem je dugo proučavan, a prvi koji mu se posvetio bio je Harry Houdini. On bi presavijao papir nekoliko puta i zatim izrezo rez, rezultirajući oblicima poput zvijezde, patke i slično. No, postavlja se pitanje možemo li s jednim rezom dobiti bilo koji proizvoljni poligon. Ispostavlja se da je to moguće.

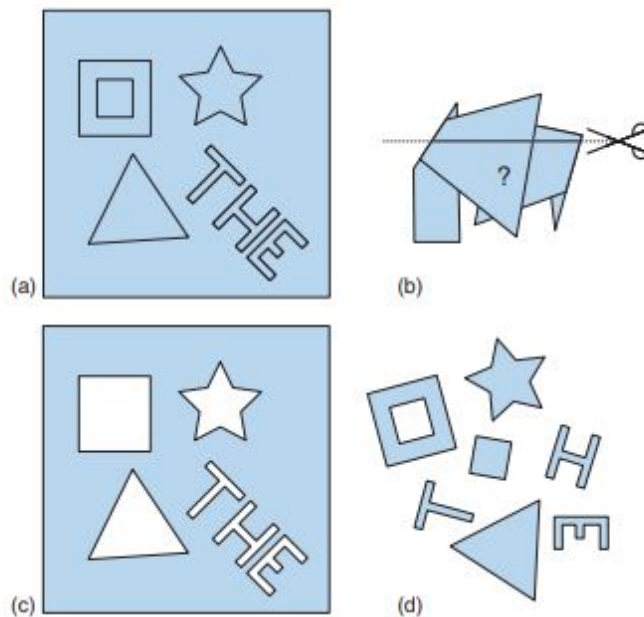
**Problem jednog reza:** Bez obzira na planarni graf na papiru, uvijek možemo pronaći način presavijanja papira koji će postaviti bridove grafa duž linija presavijenog papira, omogućujući nam da ga izrežemo jednim ravnim rezom.

U literaturi postoje dva pristupa dokazivanju ovog rezultata: ravni kostur i pakiranje diskova. Prvi pristup pruža primjenjivije sheme savijanja, ali ne djeluje uvijek za sve grafove. Drugi pristup uvijek funkcionira, ali rezultira nepraktičnim shemama savijanja.

Ukratko ravni kostur (straight skeleton) je metoda koja pruža stablastu shemu sa-



**Slika 3.12:** Simulacije plisiranih modela.

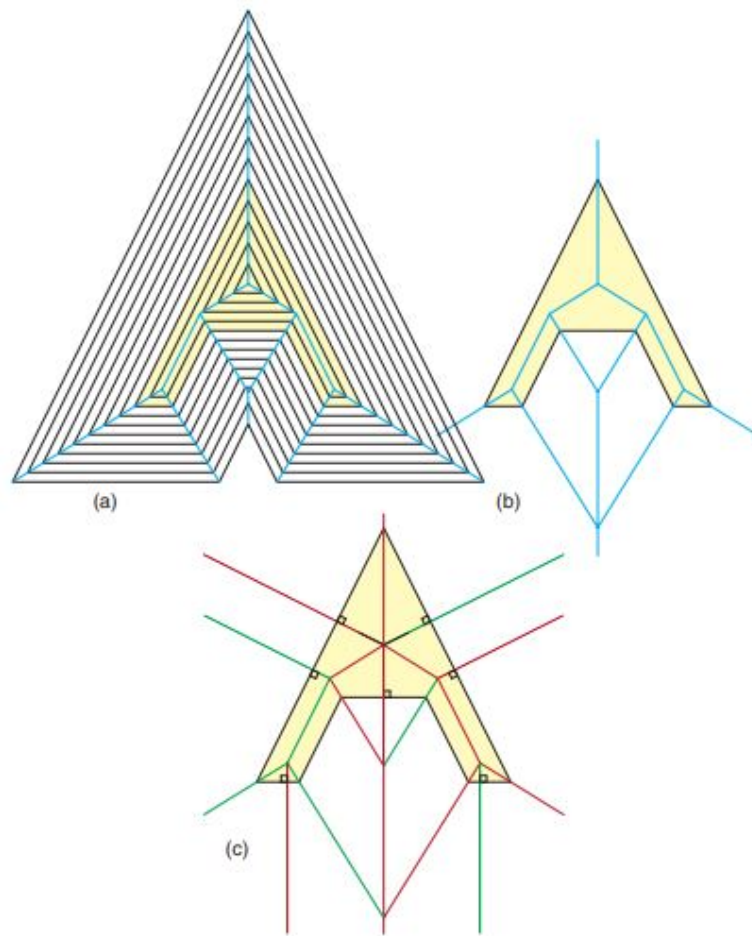


**Slika 3.13:** Problem jednog reza, slika a) prikazuje željene poligone, slika b) savijeni model, c) i d) prikazuju dobivene poligone.

vijanjanja koju dobijemo kolapsiranjem stranica poligona. Stranice poligona se postupno šire ili smanjuju sve dok se ne sudare s drugim stranicama. Kada se sudar dogodi, znamo da je na tom mjestu potrebno napraviti nabor. Međutim, pronalaženje savijanjanja nabora je teško.

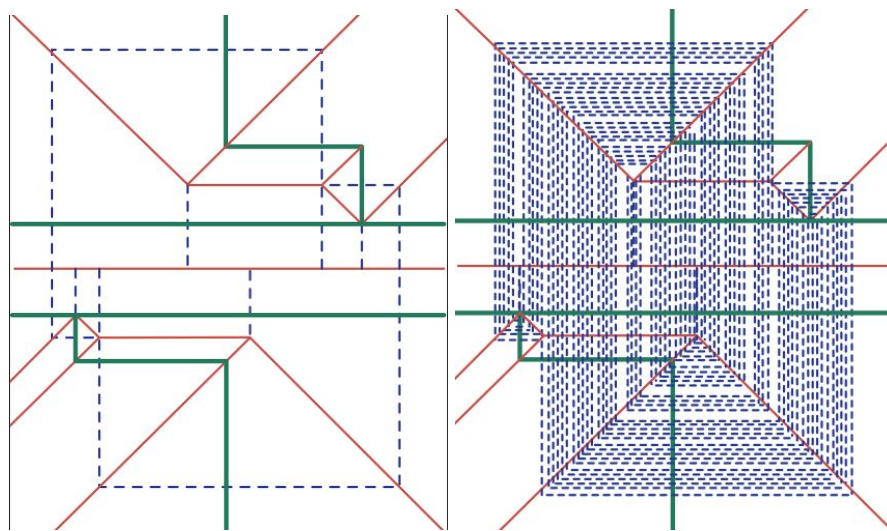
Ravni kostur može narušiti druge zakone ravnog savijanjanja, kao što je zahtjev da stupanj čvora bude paran, običnoj je 3. Rješavanje ovog problema ne postoji uvijek a svede se na postavljanje okomica na svaku regiju. Zanci gledamo čvorove, svaki čvor zatvara neke regije, pokušavamo postaviti okomicu na savku regiju koja kreće od čvora. Kada okomica prijeđe u novu regeiju ponovno se reflektira. Tako nastavimo sve dok ne izađemo iz regija.

Postoje primjeri gdje algoritam ne radi ali takvi primjeri su izuzetno teški za namjes-



**Slika 3.14:** Primjer rada algoritma ravni kostur

titi i male promjene u primjerima omogućuju algoritmu da radi ispravno. Kod takvih primjera paralele će se vijećao reflektirati.



**Slika 3.15:** Primjer u kojem će doći do beskonačnog savijanja, Zelene linije su ciljni poligon.

## **4. Heurisićne metode kreiranja ravnosavitljive sheme savijanja**

Razmotrili smo origami ograničenja. U ovome poglavlju razmatramo metode origami kreiranja. Cilj je napraviti shemu koja je ravno savitljiva.

## 4.1. Slučajna fantomska shema

Kako smo definirali u definiciji 2.5. Fantomska shema je ona shema gdje svaki čvor sheme savijanja zadovoljava Kawasakijev teorem.

Pošto smo pokazali kako je problem globalnoga savijanja NP težak, prvo ćemo pozabaviti lakšim problemom. Želimo generirati slučajnu shemu savijanja tako da bude fantomska.

Rješenje ovog problema postaviti će nam temelje za teže algoritme. Pokazuje se da je i ovaj puno lakši problem težak i da nekada ne uspije naći rješenje. A i kada nađe može neočekivano narušavati uvjete. Zvuči ne obećavajući ali to je često kod vrlo ograničenih problema.

Da ponovimo koji uvjeti moraju vrijediti.

- Svaki čvor mora biti parnog stupnja
- Miakawin teorem,  $M + V = \pm 2$
- Kawasakijev teorem,  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \dots - \alpha_{2n-1} = 0$
- Ako se bridovi sijeku to je čvor.

**Prvi korak** postaviti određeni broj slučajnih čvorova. Bitno je da ih postavimo u granice papira i na rubove ta i na vrhove.

**Drugi korak** povezivanje tih vrhova. To se postiže sa algoritmom Delaunay triangulacije. Ta trijangulacija je česti alat u računarskoj geometriji i grafici. Stoga ćemo je definirati.

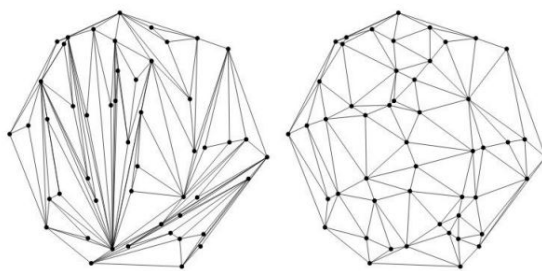
**Delaunayova triangulacija:** Za zadane vrhove Delaunayova triangulacija je ona triangulacija u kojem za svaki vrh vrijedi da se ne nalazi u krugu opisanog trokuta, bilo kojeg trokuta osim onih koje on sam definira.

Također može se pokazati da takva triangulacija maksimizira minimalni kut svakog trokuta. To nam je korisno svojstvo jer su kutovi "balansirani". Kroz iduće korake ćemo frosirat Kawasakijev uvjet optimizacijskim algoritmom, te će takvo proizvest stabilnija rješenja.

**Treći korak** brisanje bridova. Moramo ispuniti teorem o parnosti čvorova. Možemo ili dodati nove bridove ili oduzeti bridove. U poglavlju 3.5. razmatrali smo problem jednog reza gdje smo razmatrali rješenje ravnog kostura. Iz tog rješenja vidjeli smo da je ne praktično dodavati nove bridove. Također uveli bi smo dodatno opterećenje na problem te bi bilo još nestabilnije.

Stoga je nužno brisanje. Primijetimo da ne vrijedi uvjet da graf mora biti Eujelrski. Jer





**Slika 4.1:** Primjer kreiranja trianguliranja bez Delaunayova i sa Delaunayova triangulaciom.

teoremi ne obuhvaćaju rubovima. Stoga krećemo od centra i brišemo bridove prema van sve do rubova. Ovaj korak nije teorečki poktiven u literaturi, no lako možemo pronaći graf za kojeg trebamo obrisati svaki brid. Te ovdje algoritam može past.

**Četvrti korak** Forsiramo Kawasakijev teorem. Sada kad nam je zadovoljen teorem o parnosti možemo zadovoljiti Kawasakijev teorem. Postavljamo optimizaciski problem.

$$E = \sum_i w_i (p_i - p'_i)^2$$

$$C = \pi - \sum \theta_{(k,2j)} = 0$$

$E$  je funkcija koju optimiziramo.  $p_i$  su koordinate svakog čvora.  $w_i$  su težine za svaki vrh. Za vrhove u unutrašnjosti postavljeni su na 1. Na rubu postavljeni su na beskonačno, odnosno njih ne možemo mijenjati. Problem kod njihovog mijenjanja je taj da moraju ostati na rubu, što nije lak posao, jer potencijalno su neparnog stupnja. Znači moramo zaključati jednu ili obje koordinate, dok druga koordinata mora biti u granicama papira. Da se te koordinate pomaknu sa granice to više onda ne mora biti shema savijanja.

Ograničenja  $C$  su vezana za kawasakijev teorem koje moramo raspisati iz vrijednosti  $p'_i$ .

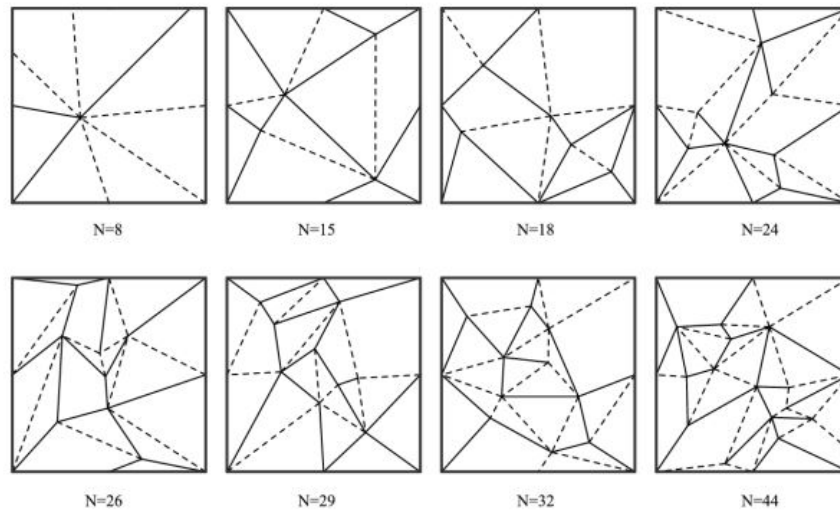
Te konačno riješimo optimizacijski problem sa Lagrangovim multiplikatorima i Newtonom metodom.

$$F = E + \lambda C$$

Moguće je da optimizacija nikad ne konvergira, ako ne konvergira ponovno krećemo od prvog korak.

Sada smo dobili potencijalnu shemu savijanja. U radu se razmatra još jedan korak ali je neformalan. **Peti korak** Konačno radimo preslikavanje nabora. Znamo da za svaki vrh možemo naći valjanu funkciju preslikavanj. Globalno smo dokazali da je NP te-

ško. Stoga pretražujemo graf i pokušavamo naći valjano preslikavanje. U poglavlju dva razmatrali smo nemoguće primjere te iz toga znamo da algoritam ne mora naći preslikavanje. Kada smo pronašli preslikavanje, ručno porbamo saviti papir i provjeriti dali je shema uistinu globalno savijena.



**Slika 4.2:** Primjeri generiranih shema savijanja. N je broj bridova.

Ovakva metoda je predstavljena u literaturi. Ovakav način pomicanja grafa u četvrtom koraku nam je koristan i kod drugih problema. Recimo da dizajniramo program za crtanje sheme savijanja. Naravno da će takvu shemu teško jedan korisnik nacrtati ispravno. Stoga korisnicima želimo pružiti opciju automackog popravljjanja, naravno ako je to moguće.

Važno je napomenuti jednu stvar, koju je autor nije. Čak i da algoritam konvergira i da nađemo preslikavanja, ne znači nužno da smo dobili ispravnu fantomsku shemu. Pod uvjete koje sam ja raspisao imamo jedan više nego autor, a to je da svako presjecanje brida čini vrh. Nakon konvergiranja algoritma nemamo nikavu garanciju da nismo stvorili nove vrhove.

Ovaj problem ilustrira koliko je zapravo teško pronaći ravno savitljivu shemu shemu savijanja. (16)

## 4.2. Proces pucanja leda

Proces pucanja leda (Ice-Cracking Sequence) je postupak generiranja slučajne sheme savijanja. Takva metoda nam je pogodna za genecko progamiranja. Taj postupak je

napravljen sa nekoliko koraka.

**Inicijalizacijski korak.** Slučajno odaberemo neku točku u papiru. Postavimo slučajne bridove. Slučajne bridove biramo tako da nužno vrijedi Kawasakijev teorem. Biramo NOC(number of creases) slučajnih brojeve te prema omjerima razdijelimo  $\pi$ .

$$\alpha_i = \begin{cases} \pi \frac{\kappa_i}{\sum_{j \in \text{paran}} \kappa_j} & \text{if } i \text{ je paran,} \\ \pi \frac{\kappa_i}{\sum_{j \in \text{neparan}} \kappa_j} & \text{if } i \text{ neparan.} \end{cases}$$

Ukratko napravimo slučajan vrh sa NOC bridova za koji vrijedi Kawasakijev teorem.

**Korak grananja** Sada biramo neki brid, te se pomićemo za neku udaljenost po bridu. Ponovno radimo NOC novih bridova. Za svaki brid moramo forsirati Kawasakijev teorem na sličan način.

**Korak grananja** Sada biramo neki brid, te se pomićemo za neku udaljenost po bridu. Ponovno radimo bridove sve dok ih ne bude NOC bridova. Za svaki brid moramo forsirati Kawasakijev teorem na sličan način. Te ostajemo na tom bridu. **Korak rješenja** Ako izabrani brid ima sjecišta. Biramo jedno od sjecišta. Te iz toga brida radimo sve dok nemamo NOC čvorova. Forsiranje Kawasakijev teorem nešto složenije ali je moguće. **Korak rješenja** Sve dok imamo ne posjećenih bridova, dodajemo ih u zapis. Ako brid ima presjek ponavljamo korak rješenja. Sve dok ne potrošimo sve bridove.

Sa ovakvom metodom definirana je shema savijanja za koju smo sigurni da je fantomska.

U radu je objašnjen zapis ovakve metode za primjenu u geneckom programiranju te optimizacija prema određenim željenim uvjetima. Tako možemo optimizirati shemu savijanja da ima određenu površinu nakon savijanja, ili da centar mase bude u određenoj točki.

Takav zapis je detaljno obrađen u literaturi. Kratko, papir je diskretno polje određene rezolucije. Svaka vrijednost se zapisuje Grejev kod. Zapis se sastoji od diskretnih brojeva pozicija, i brojeva koji određuju kutove  $\kappa$ . Također bitan nam je broj NOC za svaki vrh.

(14)

### 4.3. Dizajniranje iz postojećih shema

Vidjeli smo kako je heurističko dizajniranje težak posao koji ne daje uvijek rješenje. A i kad pruži rješenje ono je jednostavno, broj vrhova je malen. Stoga postoje metode

izrade iz dobro poznatih ravno savitljivih shema.

Naime ideja da koristimo teselacijsku shemu poput muira, vodene bombe ili slično. Ali i mogli bi smo dizajnirati simetričnu shemu koja bi se dala teselirati, no takov nešto nisam našao u literaturi. Njih ćemo modificirati ali tako da uvijek ostane sačuvan uvjet ravnositljivosti. Takvu metodu izrade pruža program *FreeformOrigami*.

Ideja je da postavimo sva ograničenja koja vrijede za origami.

### Uvjet mogućnosti(Developability)

$$G_k = 2\pi - \sum_i \theta_{k,i} = 0$$

To je uvjet koji govori da za svaki vrh mora zatvarati ku od  $2\pi$ . U radu objašnjavaju razlog ovome no zahtjeva težu matematiku.

### Kawasakijev teorem

$$F_k = \sum_i \sigma_{k,i} \theta_{k,i} = 0$$

Ovdje  $\theta_{k,i}$  je predznak.

### Ne elastičnost papira

$$\sum_i \ell_{j,i} - \sum_i \ell_{0,j,i} = 0$$

Zatim definiramo da nam je validna deformaicija on deformacija za koju vrijedi.

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle dx = 0$$

To raspisujemo pseudo inverzom.

$$dx = \left( I - \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle^+ \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle \right) dx_0$$

Te trebamo još raspisati.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \theta} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F}{\partial \rho} \right\rangle \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x} \right\rangle$$

Tu dobivamo kutove  $\rho$  i  $\theta$ . Kut  $\rho$  se može zadati. Takvo zadavanje je poručeno u sljedećem poglavlju. Te se kutovi pomiču sa obzirom na ograničenja nabora.

Ovakvom metodom možemo modelirati jako velike origamije i kao takvi su pogodni za tipa generiranje terena.

(18)

## 5. Simulacija origamija

Kako smo spomenuli kod plisiranja, origami se može simulirati, te iz njega možemo dobiti zanimljiva svojstva. Možemo pokazati da plisiranjem, papir se sam želi saviti. Kako je origami jako ograničen pretpostavljamo da i drugi nabori nose za sobom neka zanimljiva svojstva. Premda je simuliranje realnog origamija iznad opsega računarstva, razledat ćemo jednostavniju metodu prema kojoj radi *origamisimulator*. Takav program je dizajniran za brzo simuliranje origamija, te ovakvu metodu možemo iskoristiti u moćnijem softveru kao Unreal Engine za postizanje zanimljivih rezultata.

## 5.1. Postupak simulacij

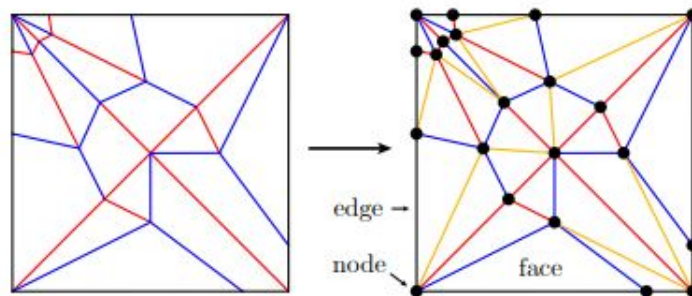
**Ulazni podatci** su nam vrhovi, koji su povezani sa bridovima. Relativno nedavno razvijen je standardizirani zapis origami modela FOLD. To je jednostavan JSON file koji podržava specijalne origami nabore. Tako može zapisivati i neravne napore i kirigami presjeke.

Za simuliranje možemo zamisliti naše podatke kao skup poligona.

U fizici lakše nam je raditi sa trokutima nego sa poligonima. Stoga prvi korak nakon učitavanja nam je podjela na trokute (Meshing).

**Ear cut** je metoda trianguliranja poligona tako da svaki trokut leži potpuno u poligonu. Moramo primjetiti da ovdje ne možemo primjeniti Delaunayovu triangulaciju jer ona ne jamči da novi trokuti neće izaći van. Oko implementacijskih detalja ove metode ne moramo se previše brinuti. Takva operacija je česta kod rada sa poligonima te kao takva je podržana u Unreal engineu kao *PolygonTriangulation :: TriangulateSimplePolygon*, te postoje brze javne biblioteke koje rade tu operaciju.

**Simulacija tkanine, ograničenje linija.** Način na koji se simulira tkanina je da



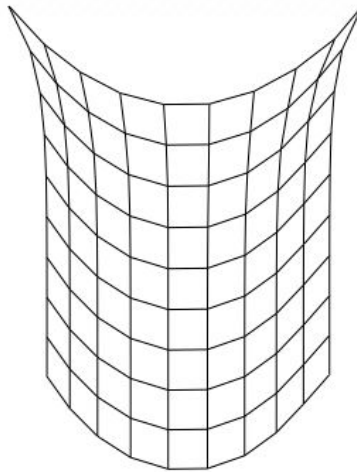
**Slika 5.1:** Primjer triangulacije poligona

imamo neki povezan graf  $G$ , na svakom bridu grafa postavimo opruge. Opruge se ponašaju prema Hookovom zakonu.

$$F = -k(l - l_0)$$

Gdje je  $k$  konstanta opruge,  $l_0$  početno stanje opruge te  $l$  trenutno stanje opruge. Takav model se naziva model mase i opruge (mass-spring). On je temeljni model za kompleksnije simulacije.

Ovaj model može simulirati meka tijela poput gume ili može simulirati kosu. Možemo modelirati izgled tkanine sa obzirom na topologiju  $G$ . Na slici 5.3 topologija  $G$  je jednostavna rešetka. Možemo tipa staviti topologiju da nam odgovara trokutima našeg 3D modela.



**Slika 5.2:** Primjer jednostavne simulacije tkanine.

Tako ako povežemo vrhove u našu trianguliranu shemu savijanja dobivamo usvjete da nam se bridovi ne mogu razići, odnosno elastična opruga ih privalči. Sa tavnim modelom možemo simulirati pisarenje. Formalnije u literaturi je dan sljedeći izovr.

$$\mathbf{F}_{\text{liniska}} = -\nabla V(\mathbf{p}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{liniska}} = -\frac{\partial V}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{p}} = F_l \frac{\partial l}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{liniska}} = -k_{\text{liniska}}(l - l_0) \frac{\partial l}{\partial \mathbf{p}}$$

$V$  je potencijalna energija. Te nam još treba smjer sile kojeg dobivamo

$$\frac{\partial l}{\partial p_1} = -\hat{I}_{12}, \quad \frac{\partial l}{\partial p_2} = \hat{I}_{12}$$

$I$  je jedinični vektor.

**Ograničenja nabora** Sada bledamo koje sile kreira nabor. Formula je relativno iste logike kao i prošla.

$$F_{\text{nabor}} = -k_{\text{nabor}}(\theta - \theta_{\text{ciljni}}) \frac{\partial \theta}{\partial p}$$

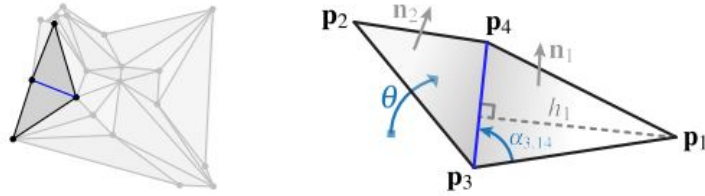
$\theta_{\text{ciljni}}$  je željeni kut savijanja nabora. Njega korisnik bira. Jedno ograničenje koje moramo uvjesti je.

$$\theta_{\text{ciljni}} = \begin{cases} < 0 & \text{za ispupečenja,} \\ > 0 & \text{za udubljenja,} \\ 0 & \text{za novodone naboru pri triangulaciji.} \end{cases}$$

Također moramo voditi računa da na rubove ne djeluje nikava sila nabora. Zatim opet nam trebaju derivacije ovakvih sila.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial p_1} &= \frac{n_1}{h_1} \\ \frac{\partial \theta}{\partial p_2} &= \frac{n_2}{h_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial p_3} &= -\frac{\cot \alpha_{4,31}}{\cot \alpha_{3,14} + \cot \alpha_{4,31}} \frac{n_1}{h_1} - \frac{\cot \alpha_{4,23}}{\cot \alpha_{3,42} + \cot \alpha_{4,23}} \frac{n_2}{h_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial p_4} &= -\frac{\cot \alpha_{3,14}}{\cot \alpha_{3,14} + \cot \alpha_{4,31}} \frac{n_1}{h_1} - \frac{\cot \alpha_{3,42}}{\cot \alpha_{3,42} + \cot \alpha_{4,23}} \frac{n_2}{h_2}.\end{aligned}$$

Pri implementaciji ovog algoritma jedan od korak je paralelno računanje vrijednosti ispred vektora.  $h$  je visina trokuta.



Slika 5.3: Sile nabora.

**Ograničenje lica** Potrebno je ješ uvsti ograničenja koja služe za lica. Odnosno želimo sačuvati kutove trokuta. Ideja je ista kao prije.

$$F_{\text{lice}} = -k_{\text{lice}}(\alpha - \alpha_0) \frac{\partial \alpha}{\partial p}$$

Te konačno derivacije.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_{2,31}}{\partial p_1} &= \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|^2}, \\ \frac{\partial \alpha_{2,31}}{\partial p_2} &= -\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|^2} + \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)}{\|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2\|^2}, \\ \frac{\partial \alpha_{2,31}}{\partial p_3} &= -\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)}{\|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2\|^2}.\end{aligned}$$

Ove derivacije su za jedan kut. Što zanči da nam trebaju derdivacije za svaki  $\alpha$ . **Numerička integracija** Diferencijalne jendbe su nam izuzetno teške za riješiti, stoga su matematičari razvili metode preciznog aproksimiranje. Te motode variraju od svoje brzine i svoje preciznosti. Također ako metoda nije dovoljno dobar može se dogoditi da se simulacija raspadne.

O numeričkim integracija bismo mogli napisati jako puno torije. U literaturi su koristili



najjednostavniju moguću metodu Eulerove integracije. Takva metoda za dobar  $t$  daje dobre rezultate. Stoga imamo sljedeći jednostavn postupak.

$$F_{\text{total}} = \sum_{\text{liniski}} F_{\text{liniski}} + \sum_{\text{nabora}} F_{\text{nabora}} + \sum_{\text{lica}} F_{\text{lica}}$$

$$a = \frac{F_{\text{total}}}{m}$$

$$v_{t+\Delta t} = v_t + a\Delta t$$

$$p_{t+\Delta t} = p_t + v_{t+\Delta t}\Delta t$$

Ova dana metoda nije fizički realan model svijeta. Metode koje realno simuliraju origami koriste puno više ograničenja. Te također postavljaju gruba ograničenja kao na elastičnost papira. Također su znato kompiciranije.

No razog raspisivanje ove metode je taj što je izuzetno brza. Najbrži simulator realnog origamija je MERLIN (13). Taj program je 1000X puta sporiji od predoženog modela simuliranja.

## 5.2. Primjene origamija u računarskim igrama

Idea je da koristimo prethodno naved način simuliranja u računarskim igricama. Spomenili smo kao je simulacija tkanine česta u igrica. Primejtimo da ova simulacije nije daleko od te simulacije tkanine.

Naravno možemo koristii ovakve simulacije za origami model. Na primjer lika koji slaže origami, ili pušku koja puca ravan list papira te se u zraku savije. No ako bismo bili malo kreativniji mogli bismo primijetiti potencijal ove metode. Zamislite da teren igrača bude modeliran kao origami model. To nije animacija nego simulacija. Znači moći ćemo tipa vozit auto po tome ili zabit se avionom. Imati interaktivan odnos igrača i svitljivog terena. Što mislim da je vrijedo za razvoj. U mom istraživanju nisam našao alat ni slčne projekte koji može tako nešto raditi u stvarno vremenu. Kao takav može biti unikatan specijalan efekt koji bi se bez origamija teško animirio ili simuliro.



**Slika 5.4:** Primjer efekta koji bismo potencionalno mogli dobiti korištenjem origamija. Slika iz filma Početak (Inception)

## 6. Zaključak

Računarski origami je našao svoje mjesto u području istraživanja. Dizajniranje origamija sa svojstvima ravnog savijanja je težak zadatak. Heuristične metode i optimizacijski postupci nam mogu pomoći pri tome u kombinaciji sa teseliranjem. Rigidni origamiji su također korisna svojstva ali oni su izuzetno ograničena te njihov razvoj je danas aktualan u području origamija.

Simuliranje origamija sa sobom nosi zanimljive efekte. Dok postoje simulacije koje su teške za izvođenje, jednostavnije modele možemo simulirati u stvarnom vremenu. Takve simulacije bi bile izuzetno korisne kao specijalan efekt, koji bismo bez metode origamija teško modelirali.

# LITERATURA

- [1] Akira yoshizawa. [https://en.wikipedia.org/wiki/Akira\\_Yoshizawa](https://en.wikipedia.org/wiki/Akira_Yoshizawa). Accessed: 2023-6-16.
- [2] Bug wars. [https://en.wikipedia.org/wiki/Bug\\_Wars](https://en.wikipedia.org/wiki/Bug_Wars). Accessed: 2023-6-16.
- [3] The public paperfolding history project. <https://www.origamiheaven.com/historyindex.htm>. Accessed: 2023-6-16.
- [4] Pratik Badagavi, Vinay Pai, and Abhishek Chinta. Use of origami in space science and various other fields of science. In *2017 2nd IEEE International Conference on Recent Trends in Electronics, Information & Communication Technology (RTEICT)*, pages 628–632. IEEE, 2017.
- [5] Nadia M Benbernou, Erik D Demaine, Martin L Demaine, and Aviv Ovadya. Universal hinge patterns for folding orthogonal shapes. *Origami5 (CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL)*, pages 405–419, 2011.
- [6] Eli Davis, Erik Demaine, Martin Demaine, and Jennifer Ramseyer. Reconstructing david huffman’s origami tessellations. 02 2014.
- [7] E.D. Demaine and J. O’Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.
- [8] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, and Jason S. Ku. Folding any orthogonal maze. 2009.
- [9] Amanda Ghassaei, Erik D Demaine, and Neil Gershenfeld. Fast, interactive origami simulation using gpu computation. *Origami*, 7:1151–1166, 2018.
- [10] T.C. Hull. *Origametry: Mathematical Methods in Paper Folding*. Cambridge University Press, 2020.

- [11] Kaori Kuribayashi, Koichi Tsuchiya, and You Zhong. 1217 self-deployable origami patterned stent grafts with tiny shape memory alloy sheet. *The proceedings of the JSME annual meeting*, 2005.5:175–176, 09 2005.
- [12] Robert J. Lang. A computational algorithm for origami design. In *SCG '96*, 1996.
- [13] Ke Liu, Tomohiro Tachi, and Glaucio H Paulino. Invariant and smooth limit of discrete geometry folded from bistable origami leading to multistable metasurfaces. *Nature communications*, 10(1):4238, 2019.
- [14] Daniel A. McAdams and Wei Li. A novel method to design and optimize flat-foldable origami structures through a genetic algorithm. *J. Comput. Inf. Sci. Eng.*, 14, 2014.
- [15] Stefano Mintchev, Marco Salerno, Alexandre Cherpillod, Simone Scaduto, and Jamie Paik. A portable three-degrees-of-freedom force feedback origami robot for human–robot interactions. *Nature Machine Intelligence*, 1:584–593, 12 2019.
- [16] Jun Mitani and Jst Erato. A method for designing crease patterns for flat-foldable origami with numerical optimization. 2011.
- [17] Tomohiro Tachi. 3d origami design based on tucking molecule. 2008.
- [18] Tomohiro Tachi. Freeform variations of origami. *Journal for Geometry and Graphics*, 14, 01 2010.

## Računalni origami

### Sažetak

Origami je tehnika savijanja papira u svrhu izrade origami modela. Origami modeli posjeduju gotovo jedinstvena korisna svojstva za projektiranje različitih objekata. Ta svojstva su ravna savitljivost i rigidnost. Ravna savitljivost je svojstvo koje omogućava da origami model leži potpuno na ravnini, dok je rigidnost princip koji sprječava savijanje lica papira, što znači da bismo mogli napraviti origami model od stakla ili metala. Takva svojstva su nam korisna pri izadi objekata koji se trebaju skopiti te ponovno rasklopiti. Ponajviše u medicinske svrhe, u svemirskoj tehnologiji, robotici. Ova dva svojstva su izuzetno ograničena, ali korisna. U ovom radu razmatramo heurističke metode dizajniranja origamija. Također, prikazujemo metode simuliranja origamija koje imaju potencijalnu primjenu u stvaranju specijalnih efekata u računalnim igricama. Takve simulacije bi bez origamija bile izuzetno teške za ostvariti.

**Ključne riječi:** Origamirano savitljivost, rigidnost, računarska geometrija, heursitke, simulacije, NP-teško, genecko programiranje

## **Computational origami**

### **Abstract**

Origami is the art of folding paper to create origami models. Origami models possess unique useful properties for designing various objects. These properties are flat foldability and rigidity. Flat foldability is the property that allows an origami model to lie completely flat on a plane, while rigidity is the principle that prevents the bending of paper faces, meaning we could make an origami model out of glass or metal. Such properties are useful for creating objects that can be folded and unfolded, especially in medical purposes, space technology, and robotics.

These two properties are highly constrained yet valuable. In this paper, we explore heuristic methods for designing origami. We also present origami simulation methods that have potential applications in creating special effects in computer games. Without origami, such simulations would be extremely challenging to achieve.

**Keywords:** Origami, flat foldability, rigidity, computational geometry, heuristics, simulations, NP-hard, genetic programming