Dinamička analiza 3D scena

procjena parametara modela

Zoran Kalafatić i Siniša Šegvić

Zavod za elektroniku, mikroelektroniku,

računalne i inteligentne sustave

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Sveučilište u Zagrebu

Uvod

Procjena (estimacija) **parametara modela**: jedna od uspješnih paradigmi modernog računalnog vida

Uvod

Procjena (estimacija) **parametara modela**: jedna od uspješnih paradigmi modernog računalnog vida

Vid: ekstrakcija informacije iz slika

- transformacija 2D objekta: translacija, sličnost, homografija
- položaj kamere: relativni (relative), apsolutni (absolute pose)
- geometrija svijeta (scene reconstruction, structure from motion)
- položaj objekata: pronalaženje (detection), praćenje (tracking)
- identitet objekta: prepoznavanje (recognition)

UVOD

Procjena (estimacija) **parametara modela**: jedna od uspješnih paradigmi modernog računalnog vida

Vid: ekstrakcija informacije iz slika

- transformacija 2D objekta: translacija, sličnost, homografija
- položaj kamere: relativni (relative), apsolutni (absolute pose)
- geometrija svijeta (scene reconstruction, structure from motion)
- položaj objekata: pronalaženje (detection), praćenje (tracking)
- identitet objekta: prepoznavanje (recognition)

Ideja:

- informaciju predstaviti parametrima matematičkog modela
- estimirati iz velikog skupa opažanja statističkim metodama!

UVOD (2)

Što bi bio model?

Uvod (2)

Što bi bio model? — **apriorno znanje** o sceni ili efektu

UVOD (2)

Što bi bio model? — **apriorno znanje** o sceni ili efektu

Npr, afina trans. kao model prividnog kretanja planarne značajke

$$I_n(\mathbf{x}) = I_0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d})$$

Uvod (2)

Što bi bio model? — **apriorno znanje** o sceni ili efektu

Npr, afina trans. kao model prividnog kretanja planarne značajke

$$I_n(\mathbf{x}) = I_0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d})$$

Npr, Euklidska trans. kao model gibanja nepokretne scene

$$\mathbf{X_2} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X_1} + \mathbf{T}$$

UVOD (2)

Što bi bio model? — **apriorno znanje** o sceni ili efektu

Npr, afina trans. kao model prividnog kretanja planarne značajke

$$I_n(\mathbf{x}) = I_0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d})$$

Npr, Euklidska trans. kao model gibanja nepokretne scene

$$\mathbf{X_2} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X_1} + \mathbf{T}$$

Npr, epipolarno ograničenje kao model odnosa korespondentnih značajki nepokretne scene

$$\mathbf{x_2}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x_1} = 0$$

UVOD (3)

Estimacijska teorija se bavi **procjenjivanjem** parametara modela iz mnoštva podataka degradiranih šumom

UVOD (3)

Estimacijska teorija se bavi **procjenjivanjem** parametara modela iz mnoštva podataka degradiranih šumom

Šum obično modelira odstupanja uslijed nesavršenog modela

- 2D transformacija ne može precizno objasniti deformacije značajki koje nisu planarne
- pronalaženje korespondencija ne može biti točno u piksel (transformacija izgleda ovisi o paralaksi i 3D strukturi)
- vanjski utjecaji koji ne uzrokuju velika odstupanja: osvjetljenje, zamućenje, termalni šum :-), ...

UVOD (3)

Estimacijska teorija se bavi **procjenjivanjem** parametara modela iz mnoštva podataka degradiranih šumom

Šum obično modelira odstupanja uslijed nesavršenog modela

- 2D transformacija ne može precizno objasniti deformacije značajki koje nisu planarne
- pronalaženje korespondencija ne može biti točno u piksel (transformacija izgleda ovisi o paralaksi i 3D strukturi)
- vanjski utjecaji koji ne uzrokuju velika odstupanja: osvjetljenje, zamućenje, termalni šum :-), ...

Ideja: iz mnoštva djelomično kontradiktornih podataka izvući najvjerodostojniju ili najvjerojatniju interpretaciju!

Uvod (4)

Često pretpostavljamo normalni nepristrani šum
(normalna razdioba obično dobar model znanja o neznanju)

Uvod (4)

Često pretpostavljamo normalni nepristrani šum
(normalna razdioba obično dobar model znanja o neznanju)

Npr, kod stereo vida, položaj značajke često označavamo:

$$\mathbf{q_i} = \overline{\mathbf{q_i}} + \Delta\mathbf{q_i},\ \text{uz}\ q_x, q_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Uvod (4)

Često pretpostavljamo normalni nepristrani šum
(normalna razdioba obično dobar model znanja o neznanju)

Npr, kod stereo vida, položaj značajke često označavamo:

$$\mathbf{q_i} = \overline{\mathbf{q_i}} + \Delta\mathbf{q_i},\ \text{uz}\ q_x, q_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Ideja: dizajnirati metode koje će rezultirati **statistički boljim** rezultatima uz pretpostavljeni model šuma!!

UVOD (5)

Koncept šuma primjenljiv samo za umjerena odstupanja

UVOD (5)

Koncept šuma primjenljiv samo za umjerena odstupanja

Za veća odstupanja potrebno uvesti koncept izvanpopulacijskih podataka (outliera) koji se ne pokoravaju dominantnom modelu

Uvod (5)

Koncept šuma primjenljiv samo za umjerena odstupanja

Za veća odstupanja potrebno uvesti koncept izvanpopulacijskih podataka (outliera) koji se ne pokoravaju dominantnom modelu

Izvanpopulacijske korespondencije za model nepokretne scene:

- korepondencija nastala asocijacijskom pogreškom (upareni su različiti objekti sličnog izgleda)
- ispravna korespondencija projekcije s pokretnog objekta

Uvod (5)

Koncept šuma primjenljiv samo za umjerena odstupanja

Za veća odstupanja potrebno uvesti koncept izvanpopulacijskih podataka (outliera) koji se ne pokoravaju dominantnom modelu

Izvanpopulacijske korespondencije za model nepokretne scene:

- korepondencija nastala asocijacijskom pogreškom (upareni su različiti objekti sličnog izgleda)
- ispravna korespondencija projekcije s pokretnog objekta

Ideja: dizajnirati robustne metode koje mogu **detektirati** i zanemariti izvanpopulacijska mjerenja!

UVOD (6)

Motivacija za teoriju estimacije:

UVOD (6)

Motivacija za teoriju estimacije:

Računalni vid je disciplina u kojoj obično obrađujemo redundantne podatke, u prisustvu šuma i outliera (dobivamo sustav jednadžbi s viškom ograničenja)

UVOD (6)

Motivacija za teoriju estimacije:

Računalni vid je disciplina u kojoj obično obrađujemo redundantne podatke, u prisustvu šuma i outliera (dobivamo sustav jednadžbi s viškom ograničenja)

Želimo **gledati** (izlučivati parametre) na način da:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma bude **statistički** povoljan
3. vanpopulacijski parametri **ne ometaju** točan rezultat

Uvod (6)

Motivacija za teoriju estimacije:

Računalni vid je disciplina u kojoj obično obrađujemo redundantne podatke, u prisustvu šuma i outliera (dobivamo sustav jednadžbi s viškom ograničenja)

Želimo **gledati** (izlučivati parametre) na način da:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma bude **statistički** povoljan
3. vanpopulacijski parametri **ne ometaju** točan rezultat

Okvir za postizanje tih svojstava daje **teorija estimacije**.

LINEARNI SUSTAVI

Primjer broj jedan: provući pravac kroz zadani skup 2D točaka

LINEARNI SUSTAVI

Primjer broj jedan: provući pravac kroz zadani skup 2D točaka

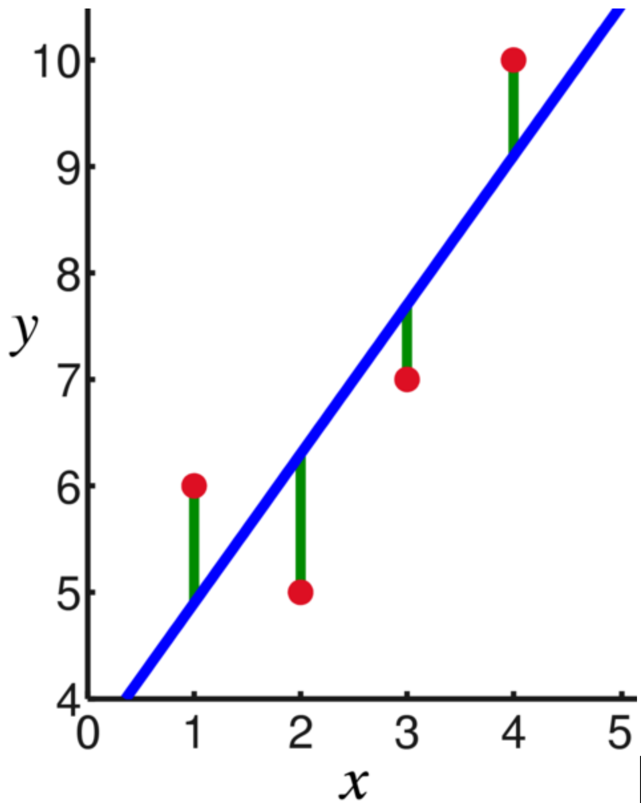
Model **podataka**: pravac

Linearni sustavi

Primjer broj jedan: provući pravac kroz zadani skup 2D točaka

Model **podataka**: pravac

Model **šuma**: djeluje na koordinatu y, nezavisan, identično distribuiran prema $\mathcal{N}(0, \sigma)$



[Wikipedia]

LINEARNI SUSTAVI (2)

Obično je ovakve probleme najlakše i najnepreciznije rješavati u projekcijskoj domeni

LINEARNI SUSTAVI (2)

Obično je ovakve probleme najlakše i najnepreciznije rješavati u projekcijskoj domeni

Ako i-ta točka $\mathbf{q_i}$ prolazi kroz traženi pravac $\mathbf{p}$, vrijedi:

$$\mathbf{q_{Hi}}^\top \cdot \mathbf{p} = p_1 q_x + p_2 q_y + p_3 = 0$$

Linearni sustavi (2)

Obično je ovakve probleme najlakše i najnepreciznije rješavati u projekcijskoj domeni

Ako i-ta točka $\mathbf{q_i}$ prolazi kroz traženi pravac $\mathbf{p}$, vrijedi:

$$\mathbf{q_{Hi}}^\top \cdot \mathbf{p} = p_1 q_x + p_2 q_y + p_3 = 0$$

Ako su sve točke $\mathbf{q_i}, i = 1, 2, ..., n$ elementi pravca $\mathbf{p}$, vrijedi:

$$\mathbf{A}_{m \times 3} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \text{gdje je } \; \mathbf{A}_{i,:} = \mathbf{q_i}^\top$$

Linearni sustavi (2)

Obično je ovakve probleme najlakše i najnepreciznije rješavati u projekcijskoj domeni

Ako i-ta točka $\mathbf{q_i}$ prolazi kroz traženi pravac $\mathbf{p}$, vrijedi:

$$\mathbf{q_{Hi}}^\top \cdot \mathbf{p} = p_1 q_x + p_2 q_y + p_3 = 0$$

Ako su sve točke $\mathbf{q_i}, i = 1, 2, ..., n$ elementi pravca $\mathbf{p}$, vrijedi:

$$\mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \text{gdje je} \ \ \mathbf{A}_{i,:} = \mathbf{q_i}^\top$$

U prisustvu šuma, gornja jednadžba nema rješenja.
Ima stoga smisla tražiti rješenje koje minimizira rezidual:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\min_{\mathbf{p}} (\|\mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p}\|), \quad \text{uz uvjet} \ \ \|\mathbf{p}\| = 1$$

LINEARNI SUSTAVI (3)

Dobili smo linearni homogeni sustav s viškom ograničenja

- homogeneous linear least squares
- overconstrained homogeneous linear system

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{x}_{n\times 1}\|), \quad \text{uz uvjet} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

LINEARNI SUSTAVI (3)

Dobili smo linearni homogeni sustav s viškom ograničenja

- homogeneous linear least squares
- overconstrained homogeneous linear system

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{x}_{n\times 1}\|), \quad \text{uz uvjet} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

Rješenje odgovara desnom singularnom vektoru matrice $\mathbf{A}$ koji odgovara najmanjoj singularnoj vrijednosti!

LINEARNI SUSTAVI (3)

Dobili smo linearni homogeni sustav s viškom ograničenja

- homogeneous linear least squares
- overconstrained homogeneous linear system

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1}\|), \quad \text{uz uvjet} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

Rješenje odgovara desnom singularnom vektoru matrice $\mathbf{A}$ koji odgovara najmanjoj singularnoj vrijednosti!

Singularne vrijednosti i vektore dobivamo singularnom dekompozicijom.

Linearni sustavi (3)

Dobili smo linearni homogeni sustav s viškom ograničenja

- homogeneous linear least squares
- overconstrained homogeneous linear system

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{x}_{n\times 1}\|), \quad \text{uz uvjet} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

Rješenje odgovara desnom singularnom vektoru matrice $\mathbf{A}$ koji odgovara najmanjoj singularnoj vrijednosti!

Singularne vrijednosti i vektore dobivamo singularnom dekompozicijom.

Ekvivalentan rezultat dobivamo svojstvenom dekompozicijom simetrične matrice $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$

Linearni sustavi (4)

Linearni nehomogeni sustav s viškom ograničenja:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1}\| - \mathbf{b}_{n\times 1})$$

Linearni sustavi (4)

Linearni nehomogeni sustav s viškom ograničenja:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1}\| - \mathbf{b}_{n\times 1})$$

Rješenje je umnožak pseudoinverza matrice $\mathbf{A}$ i vektora $\mathbf{b}$:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+} \cdot \mathbf{b}$$

LINEARNI SUSTAVI (4)

Linearni nehomogeni sustav s viškom ograničenja:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1}\| - \mathbf{b}_{n\times 1})$$

Rješenje je umnožak pseudoinverza matrice $\mathbf{A}$ i vektora $\mathbf{b}$:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+} \cdot \mathbf{b}$$

Moore-Penroseov inverz $\mathbf{A}^{+}$ dobivamo singularnom dekompozicijom, ili nekim drugim metodama koje su nešto brže i nešto manje točne

LINEARNA ALGEBRA

Svaka matrica $\mathbf{A}_{m\times n}$ ima singularnu dekompoziciju:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top$$

- $\mathbf{U}_{m\times m}$ ($\mathbf{U}_{m\times n}$) ... ortogonalna matrica (ili ortogonalni stupci)
- $\mathbf{D}_{m\times n}$ ($\mathbf{D}_{n\times n}$) ... dijagonalna pozitivno semidefinitna matrica
- $\mathbf{V}_{n\times n}$ ... ortogonalna matrica

Linearna algebra

Svaka matrica $\mathbf{A}_{m \times n}$ ima singularnu dekompoziciju:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top$$

- $\mathbf{U}_{m \times m}$ ($\mathbf{U}_{m \times n}$) ... ortogonalna matrica (ili ortogonalni stupci)
- $\mathbf{D}_{m \times n}$ ($\mathbf{D}_{n \times n}$) ... dijagonalna pozitivno semidefinitna matrica
- $\mathbf{V}_{n \times n}$ ... ortogonalna matrica

Vrijedi:

- $\mathbf{D}_{i,i} = d_i$ — i-ta singularna vrijednost ($d_i \in {}^{+}_{0}, d_i > d_{i+1}$)
- $\mathbf{V}_{:,i} = \mathbf{v}_i$ — i-ti desni singularni vektor ($\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$)
- $\mathbf{U}_{:,i} = \mathbf{u}_i$ — i-ti lijevi singularni vektor ($\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$)
  - $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\| = (\mathbf{U}\mathbf{x})^\top(\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{U}^\top \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top(\mathbf{U}^\top \mathbf{U})\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|$

LINEARNA ALGEBRA (2)

Malo intuicije: u kakvoj je vezi SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top$ sa svojstvenom dekompozicijom simetrične matrice

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^\top?$$

Linearna algebra (2)

Malo intuicije: u kakvoj je vezi SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top$ sa svojstvenom dekompozicijom simetrične matrice

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^\top ?$$

Za simetrične matrice, SVD odgovara svojstvenoj dekompoziciji:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V}$$

LINEARNA ALGEBRA (2)

Malo intuicije: u kakvoj je vezi SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top$ sa svojstvenom dekompozicijom simetrične matrice

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{V}^\top?$$

Za simetrične matrice, SVD odgovara svojstvenoj dekompoziciji:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V}$$

Uvrštavanjem SVD dekompozicije matrice $\mathbf{A}$ dobivamo:

- $\mathbf{V}$ figurira u svojstvenoj dekompoziciji $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{V}(\mathbf{D}^\top\mathbf{D})\mathbf{V}^\top$
- $\mathbf{U}$ figurira u svojstvenoj dekompoziciji $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{U}(\mathbf{D}\mathbf{D}^\top)\mathbf{U}^\top$
- $d_i^2 = \lambda_i(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \lambda_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)$

Linearna algebra (3)

Svojstva SVD:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$$

Linearna algebra (3)

Svojstva SVD:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$$

SVD pruža osnovne informacije o matrici:

- neka je $d_i > 0, \forall i \leq r$, te $d_i = 0, \forall i > r$
- kodomena (slika) matrice: $\mathcal{K}(\mathbf{A})$= $\mathrm{span}\{\mathbf{u}_i, i = 1, 2, ..., r\}$
- nulprostor (jezgra) matrice: $\mathrm{null}(\mathbf{A})$= $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_i, i = r+1, ..., n\}$
- rang matrice: $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = r$

Linearna algebra (3)

Svojstva SVD:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$$

SVD pruža osnovne informacije o matrici:

- neka je $d_i > 0, \forall i \leq r$, te $d_i = 0, \forall i > r$
- kodomena (slika) matrice: $\mathcal{K}(\mathbf{A})$= $\text{span}\{\mathbf{u}_i, i = 1, 2, ..., r\}$
- nulprostor (jezgra) matrice: $\text{null}(\mathbf{A})$= $\text{span}\{\mathbf{v}_i, i = r+1, ..., n\}$
- rang matrice: $\text{rang}(\mathbf{A}) = r$
- uvjetovanost matrice ($\delta(\mathbf{x})/\delta(\mathbf{b})$): $\kappa(\mathbf{A})$=d_1/d_n

LINEARNA ALGEBRA (4)

Svojstva SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$ (2):

SVD predstavlja djelovanje matrice kao:

- rotaciju u odredišnom prostoru ($\mathbf{U}_{m \times m}$)
- neravnomjerno skaliranje + pad ranga ($\mathbf{D}_{m \times n}$)
- rotaciju u izvornom prostoru ($\mathbf{V}_{n \times n}$)

Linearna algebra (4)

Svojstva SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$ (2):

SVD predstavlja djelovanje matrice kao:

- rotaciju u odredišnom prostoru ($\mathbf{U}_{m \times m}$)
- neravnomjerno skaliranje + pad ranga ($\mathbf{D}_{m \times n}$)
- rotaciju u izvornom prostoru ($\mathbf{V}_{n \times n}$)

Optimalna $\|\|_F$ aproksimacija najbližom matricom nižeg ranga r_a

- dovoljno je postaviti $d_i = 0, i = r_a, ..., \max(m, n)$!

LINEARNA ALGEBRA (4)

Svojstva SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$ (2):

SVD predstavlja djelovanje matrice kao:

- rotaciju u odredišnom prostoru ($\mathbf{U}_{m \times m}$)
- neravnomjerno skaliranje + pad ranga ($\mathbf{D}_{m \times n}$)
- rotaciju u izvornom prostoru ($\mathbf{V}_{n \times n}$)

Optimalna $\|\|_F$ aproksimacija najbližom matricom nižeg ranga r_a

- dovoljno je postaviti $d_i = 0, i = r_a, ..., \max(m, n)$!
- redci matrice $\mathbf{U}$ — sortirana verzija redaka $\mathbf{A}$,

Linearna algebra (4)

Svojstva SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$ (2):

SVD predstavlja djelovanje matrice kao:

- rotaciju u odredišnom prostoru ($\mathbf{U}_{m\times m}$)
- neravnomjerno skaliranje + pad ranga ($\mathbf{D}_{m\times n}$)
- rotaciju u izvornom prostoru ($\mathbf{V}_{n\times n}$)

Optimalna $\|\|_F$ aproksimacija najbližom matricom nižeg ranga r_a

- dovoljno je postaviti $d_i = 0, i = r_a, ..., \max(m, n)$!
- redci matrice $\mathbf{U}$ — sortirana verzija redaka $\mathbf{A}$,
- redci matrice $\mathbf{V}$ — sortirane osi varijabilnosti redaka $\mathbf{A}$
- kriterij sortiranja: istaknutost, značaj pri raspoznavanju
- primjene: PCA, kompresija, analiza linearnih sustava

LINEARNA ALGEBRA (5)

Zašto i kako SVD optimalno (L2) "rješava" homogene sustave?

Linearna algebra (5)

Zašto i kako SVD optimalno (L2) "rješava" homogene sustave?

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\| = \min_x \|\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$$

Linearna algebra (5)

Zašto i kako SVD optimalno (L2) "rješava" homogene sustave?

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\| = \min_x \|\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$$

Neka je $\mathbf{q} = \mathbf{V}^\top\mathbf{x}$; tada vrijedi:

$$\|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\| = \|\mathbf{D}\mathbf{q}\|, \text{ uz } \|\mathbf{q}\| = 1 \qquad (*)$$

LINEARNA ALGEBRA (5)

Zašto i kako SVD optimalno (L2) “rješava” homogene sustave?

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\| = \min_x \|\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$$

Neka je $\mathbf{q} = \mathbf{V}^\top\mathbf{x}$; tada vrijedi:

$$\|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\| = \|\mathbf{D}\mathbf{q}\|, \text{ uz } \|\mathbf{q}\| = 1 \qquad (*)$$

Elementi $\mathbf{D}$ su pozitivni i padajući, pa $\mathbf{q}$ koji minimizira (*) iznosi $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^\top$

Linearna algebra (5)

Zašto i kako SVD optimalno (L2) “rješava” homogene sustave?

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\| = \min_x \|\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\|,\ \text{uz}\ \|\mathbf{x}\| = 1$$

Neka je $\mathbf{q} = \mathbf{V}^\top\mathbf{x}$; tada vrijedi:

$$\|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top\mathbf{x}\| = \|\mathbf{D}\mathbf{q}\|,\ \text{uz}\ \|\mathbf{q}\| = 1 \qquad (*)$$

Elementi $\mathbf{D}$ su pozitivni i padajući, pa $\mathbf{q}$ koji minimizira (*) iznosi
$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^\top$

Odatle slijedi ono što je trebalo dokazati: $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q} = \mathbf{V}_{:,n} \quad \square$

Linearna algebra (6)

Zašto i kako SVD optimalno (L2) “rješava” nehomogene sustave?

LINEARNA ALGEBRA (6)

Zašto i kako SVD optimalno (L2) “rješava” nehomogene sustave?

Promotrimo sustav $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \rightarrow \min$.

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{UDV}^\top \mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \min_x \|\mathbf{Dq} - \mathbf{U}^\top \mathbf{b}\|, \text{ uz } \mathbf{q} = \mathbf{V}^\top \mathbf{x}$$

Linearna algebra (6)

Zašto i kako SVD optimalno (L2) “rješava” nehomogene sustave?

Promotrimo sustav $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \to \min$.

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top \mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \min_x \|\mathbf{D}\mathbf{q} - \mathbf{U}^\top \mathbf{b}\|, \text{ uz } \mathbf{q} = \mathbf{V}^\top \mathbf{x}$$

Izrazimo traženi rezidual zbrojem kvadrata komponenata (L2):

$$\|\mathbf{D}\mathbf{q} - \mathbf{U}^\top \mathbf{b}\| = \sum_i (d_i q_i - \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b})^2 = \sum_{i=1}^{r} (d_i q_i - \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b})^2 + \sum_{i=r+1}^{n} (\mathbf{u}_i^\top \mathbf{b})^2$$

Linearna algebra (6)

Zašto i kako SVD optimalno (L2) "rješava" nehomogene sustave?

Promotrimo sustav $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \rightarrow \min$.

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{UDV}^\top\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \min_x \|\mathbf{Dq} - \mathbf{U}^\top\mathbf{b}\|, \text{ uz } \mathbf{q} = \mathbf{V}^\top\mathbf{x}$$

Izrazimo traženi rezidual zbrojem kvadrata komponenata (L2):

$$\|\mathbf{Dq} - \mathbf{U}^\top\mathbf{b}\| = \sum_i (d_i q_i - \mathbf{u}_i^\top\mathbf{b})^2 = \sum_{i=1}^{r} (d_i q_i - \mathbf{u}_i^\top\mathbf{b})^2 + \sum_{i=r+1}^{n} (\mathbf{u}_i^\top\mathbf{b})^2$$

Sad se vidi da za minimum mora biti $q_i = \mathbf{u}_i^\top\mathbf{b}/d_i, i = 1 : r$
(za ostale i, proizvoljno odabiremo $q_i = 0$)

Linearna algebra (7)

Kako SVD optimalno (L2) "rješava" nehomogene sustave? (2)

Pronašli smo $q_i = \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}/d_i, i = 1 : r$, koliki je $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}$?

Linearna algebra (7)

Kako SVD optimalno (L2) “rješava” nehomogene sustave? (2)

Pronašli smo $q_i = \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b} / d_i, i = 1 : r$, koliki je $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}$?

Uvrštavamo q_i i žongliramo skalarnim produktom...

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} q_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}}{d_i} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{u_i}^\top}{d_i} \cdot \mathbf{b}$$

LINEARNA ALGEBRA (7)

Kako SVD optimalno (L2) “rješava” nehomogene sustave? (2)

Pronašli smo $q_i = \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}/d_i, i = 1 : r$, koliki je $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}$?

Uvrštavamo q_i i žongliramo skalarnim produktom...

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} q_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}}{d_i} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{u_i}^\top}{d_i} \cdot \mathbf{b}$$

Konačno, rješenje sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \to \min$ je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{D}^+\mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$$

LINEARNA ALGEBRA (7)

Kako SVD optimalno (L2) “rješava” nehomogene sustave? (2)

Pronašli smo $q_i = \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b} / d_i, i = 1 : r$, koliki je $\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q}$?

Uvrštavamo q_i i žongliramo skalarnim produktom...

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} q_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}}{d_i} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{u_i}^\top}{d_i} \cdot \mathbf{b}$$

Konačno, rješenje sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \to \min$ je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{D}^+\mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$$

$\mathbf{A}^+$ ... pseudoinverz od $\mathbf{A}$ (Moore - Penrose)

LINEARNA ALGEBRA (8)

Kako SVD “rješava” sustave s manjkom ograničenja?

LINEARNA ALGEBRA (8)

Kako SVD “rješava” sustave s manjkom ograničenja?

Npr: koje sve ravnine prolaze kroz zadane dvije točke?

LINEARNA ALGEBRA (8)

Kako SVD “rješava” sustave s manjkom ograničenja?

Npr: koje sve ravnine prolaze kroz zadane dvije točke?

Homogeni sustav $\min_x \|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$ može imati:

- rješenje u smislu LS, ako $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n$
- točno rješenje, ako $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n - 1$
- beskonačno rješenja, ako $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) < n - 1$

LINEARNA ALGEBRA (8)

Kako SVD "rješava" sustave s manjkom ograničenja?

Npr: koje sve ravnine prolaze kroz zadane dvije točke?

Homogeni sustav $\min_x \|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$ može imati:

- rješenje u smislu LS, ako $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n$
- točno rješenje, ako $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n - 1$
- beskonačno rješenja, ako $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) < n - 1$

U posljednjem slučaju, potprostor rješenja je:
$\mathrm{null}(\mathbf{A})$= $\mathrm{span}\{\mathbf{v}_i, i = r + 1, ..., n\}$

LINEARNA ALGEBRA (8)

Kako SVD "rješava" sustave s manjkom ograničenja?

Npr: koje sve ravnine prolaze kroz zadane dvije točke?

Homogeni sustav $\min_x \|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$ može imati:

- rješenje u smislu LS, ako $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$
- točno rješenje, ako $\text{rang}(\mathbf{A}) = n - 1$
- beskonačno rješenja, ako $\text{rang}(\mathbf{A}) < n - 1$

U posljednjem slučaju, potprostor rješenja je:
$\text{null}(\mathbf{A})$= $\text{span}\{\mathbf{v}_i, i = r + 1, ..., n\}$

Rješenja nehomogenog sustava dobivamo kao zbroj:

- potprostora rješenja homogenog sustava, i
- nekog partikularnog rješenja

Kondicioniranje linearnog sustava

Razmotrimo homogeni preograničeni sustav (koji minimizira algebarski kriterij):

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}| \ , \ \text{uz} \ |\mathbf{x}| = 1$$

Kondicioniranje linearnog sustava

Razmotrimo homogeni preograničeni sustav (koji minimizira algebarski kriterij):

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}| \ , \ \text{uz} \ |\mathbf{x}| = 1$$

$\hat{\mathbf{x}}$ je rješenje sustava $\mathbf{A_F} \cdot \mathbf{x} = 0$, gdje je $\mathbf{A_F}$ defektna matrica najbliža $\mathbf{A}$ (u smislu Frobeniusove norme)

Kondicioniranje linearnog sustava

Razmotrimo homogeni preograničeni sustav (koji minimizira algebarski kriterij):

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \left|\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}\right| \, , \;\; \text{uz} \;\; \left|\mathbf{x}\right| = 1$$

$\hat{\mathbf{x}}$ je rješenje sustava $\mathbf{A_F}\cdot\mathbf{x} = 0$, gdje je $\mathbf{A_F}$ defektna matrica najbliža $\mathbf{A}$ (u smislu Frobeniusove norme)

Ključ kvalitete rješenja je u razdiobi šuma $\mathbf{D}$ u matrici sustava $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}$$

Kondicioniranje linearnog sustava

Razmotrimo homogeni preograničeni sustav (koji minimizira algebarski kriterij):

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}| \ , \ \text{uz} \ |\mathbf{x}| = 1$$

$\hat{\mathbf{x}}$ je rješenje sustava $\mathbf{A_F} \cdot \mathbf{x} = 0$, gdje je $\mathbf{A_F}$ defektna matrica najbliža $\mathbf{A}$ (u smislu Frobeniusove norme)

Ključ kvalitete rješenja je u razdiobi šuma $\mathbf{D}$ u matrici sustava $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}$$

Neravnomjerno raspoređen šum $\Rightarrow$ pristrano rješenje!

KONDICIONIRANJE LINEARNOG SUSTAVA

Razmotrimo homogeni preograničeni sustav (koji minimizira algebarski kriterij):

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}| \;, \;\; \text{uz} \; |\mathbf{x}| = 1$$

$\hat{\mathbf{x}}$ je rješenje sustava $\mathbf{A_F} \cdot \mathbf{x} = 0$, gdje je $\mathbf{A_F}$ defektna matrica najbliža $\mathbf{A}$ (u smislu Frobeniusove norme)

Ključ kvalitete rješenja je u razdiobi šuma $\mathbf{D}$ u matrici sustava $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}$$

Neravnomjerno raspoređen šum $\Rightarrow$ pristrano rješenje!

Obratiti pažnju na razdiobu šuma po stupcima i po redcima matrice sustava!

KONDICIONIRANJE LINEARNOG SUSTAVA (2)

Razdioba šuma u matrici sustava pospješuje se kondicioniranjem

Kondicioniranje linearnog sustava (2)

Razdioba šuma u matrici sustava pospješuje se kondicioniranjem

Teorijski dobro utemeljen pristup je uravnoteživanje [Muehlich98]

Kondicioniranje linearnog sustava (2)

Razdioba šuma u matrici sustava pospješuje se kondicioniranjem

Teorijski dobro utemeljen pristup je uravnoteživanje [Muehlich98]

Matrica sustava se množi s lijeva i s desne prikladnim kvadratnim matricama punog ranga:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \left|\mathbf{A_{eq}} \cdot \mathbf{x}'\right| \text{ , gdje su} \tag{7}$$

$$\mathbf{A}_{eq} = \mathbf{W_L} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W_R}, \tag{8}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{W_R}^{-1} \cdot \mathbf{x} \tag{9}$$

Kondicioniranje linearnog sustava (2)

Razdioba šuma u matrici sustava pospješuje se kondicioniranjem

Teorijski dobro utemeljen pristup je uravnoteživanje [Muehlich98]

Matrica sustava se množi s lijeva i s desne prikladnim kvadratnim matricama punog ranga:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} |\mathbf{A_{eq}} \cdot \mathbf{x}'| \ , \ \text{gdje su} \tag{10}$$

$$\mathbf{A}_{eq} = \mathbf{W_L} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W_R}, \tag{11}$$

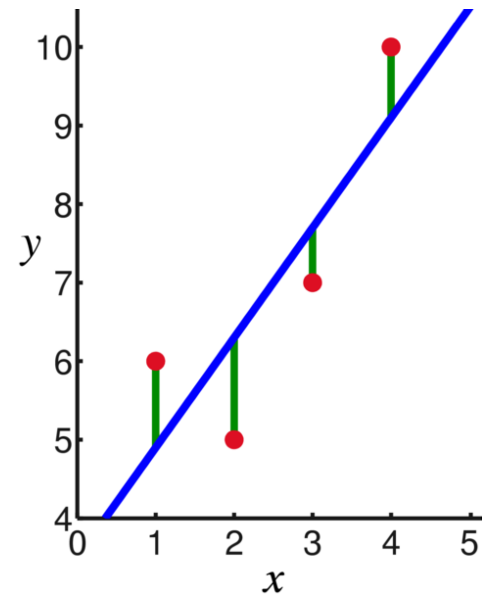
$$\mathbf{x}' = \mathbf{W_R}^{-1} \cdot \mathbf{x} \tag{12}$$

Cilj je ravnomjerno raspoređen **šum** u $\mathbf{A_{eq}}$:

$$E[\mathbf{D_{eq}}^\top \mathbf{D}_{eq}] = c \cdot \mathbf{I}, \ \text{gdje je } \mathbf{D_{eq}} = \mathbf{A_{eq}} - \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{eq}}$$

Kriteriji estimacije

Vratimo se na problem provlačenja $\mathbf{p}(\mathbf{q_i})$



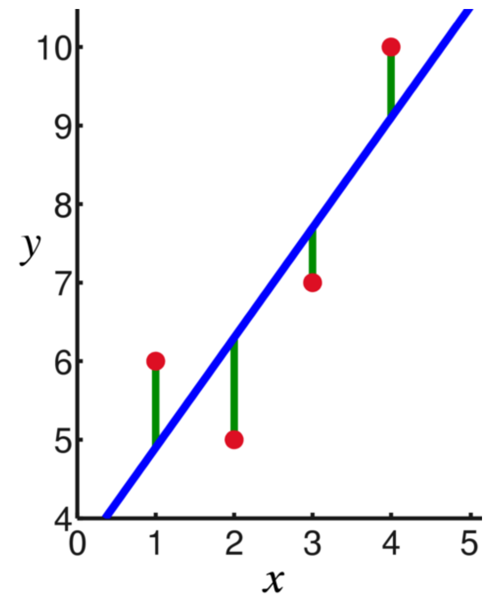
Kriteriji estimacije

Vratimo se na problem provlačenja $\mathbf{p}(\mathbf{q_i})$

Što fali algebarskom projekcijskom kriteriju:

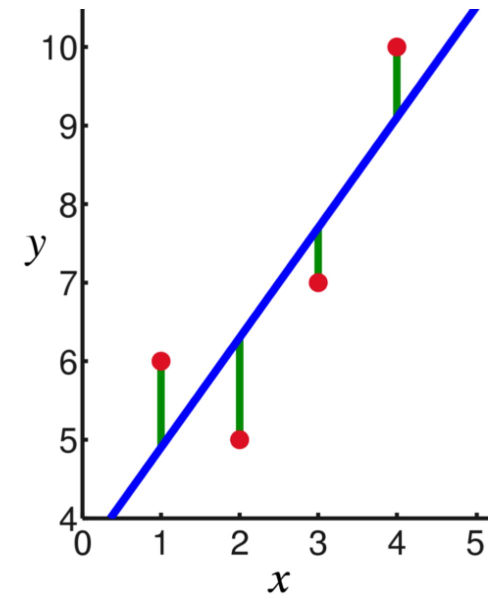
$$\hat{\mathbf{p}}_{alg} = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p}, \quad \text{gdje je} \;\; \mathbf{A}_{i,:} = \mathbf{q_i}^\top$$

- nema eksplicitnog modela šuma
- ne minimizira smislenu funkciju cilja



KRITERIJI ESTIMACIJE

Vratimo se na problem provlačenja $\mathbf{p}(\mathbf{q_i})$



Što fali algebarskom projekcijskom kriteriju:

$$\hat{\mathbf{p}}_{alg} = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p}, \quad \text{gdje je} \ \ \mathbf{A}_{i,:} = \mathbf{q_i}^\top$$

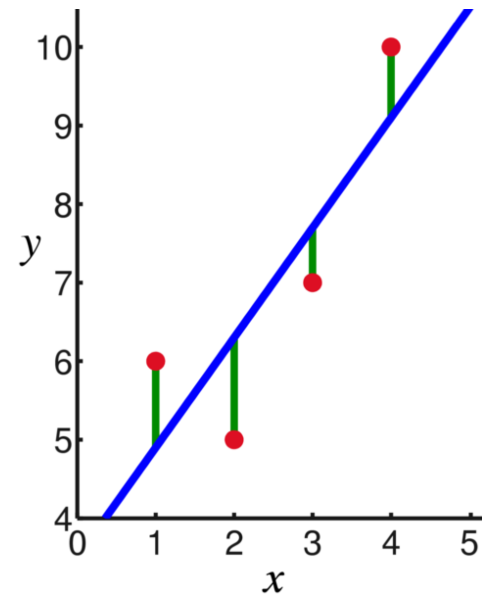
- nema eksplicitnog modela šuma
- ne minimizira smislenu funkciju cilja

Kriterij optimizacije dobivamo uvrštanjem podataka s eksplicitno modeliranim šumom $(x_i, \overline{y_i} + \delta y_i)$:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\min_{\mathbf{p}} p_2 \cdot \sum \Delta {y_i}^2, \quad \text{uz} \ \ \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = 1$$

Kriteriji estimacije

Vratimo se na problem provlačenja $\mathbf{p}(\mathbf{q_i})$



Što fali algebarskom projekcijskom kriteriju:

$$\hat{\mathbf{p}}_{alg} = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p}, \quad \text{gdje je} \;\; \mathbf{A}_{i,:} = \mathbf{q_i}^\top$$

- nema eksplicitnog modela šuma
- ne minimizira smislenu funkciju cilja

Kriterij optimizacije dobivamo uvrštanjem podataka s eksplicitno modeliranim šumom $(x_i, \overline{y_i} + \delta y_i)$:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\min_{\mathbf{p}} p_2 \cdot \sum \Delta {y_i}^2, \quad \text{uz} \;\; \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = 1$$

Kriterij je pristran jer favorizira pravce s malim p_2!

Kriteriji estimacije (2)

Bolje rješenje dobivamo parametrizacijom $\mathbf{p} = (k, l)$, koja dozvoljava modeliranje geometrijskog kriterija:

$$\hat{\mathbf{p}}_{g1} = \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \| p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i \| \tag{13}$$

$$= \mathbf{A}_{m\times 2} \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{y}_m, \quad \text{gdje je } \mathbf{A}_{i,:} = \begin{bmatrix} x_i & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Kriteriji estimacije (2)

Bolje rješenje dobivamo parametrizacijom $\mathbf{p} = (k, l)$, koja dozvoljava modeliranje geometrijskog kriterija:

$$\hat{\mathbf{p}}_{g1} = \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \|p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i\| \tag{15}$$

$$= \mathbf{A}_{m\times 2} \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{y}_m, \quad \text{gdje je } \mathbf{A}_{i,:} = \left[\begin{array}{cc} x_i & 1 \end{array}\right] \tag{16}$$

Kad uvrstimo degradirani podatak $(x_i, \overline{y_i} + \delta y_i)$: vidimo da i-ti rezidual r_i iznosi upravo δy_i

KRITERIJI ESTIMACIJE (2)

Bolje rješenje dobivamo parametrizacijom $\mathbf{p} = (k, l)$, koja dozvoljava modeliranje geometrijskog kriterija:

$$\hat{\mathbf{p}}_{g1} = \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \|p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i\| \tag{17}$$

$$= \mathbf{A}_{m\times 2} \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{y}_m, \quad \text{gdje je } \mathbf{A}_{i,:} = \begin{bmatrix} x_i & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Kad uvrstimo degradirani podatak $(x_i, \overline{y_i} + \delta y_i)$: vidimo da i-ti rezidual r_i iznosi upravo δy_i

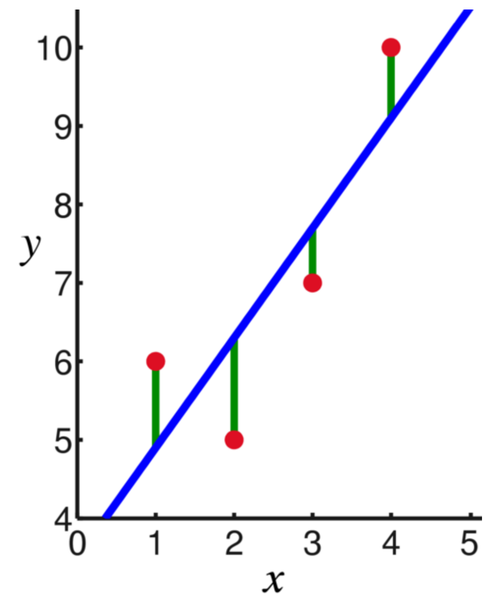
Stoga će rješenje

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{y}$$

biti pravac s minimalnim ukupnim kvadratnim odstupanjem od zadanih točaka (pravac s najvećom *vjerodostojnošću*)

Kriteriji estimacije (3)

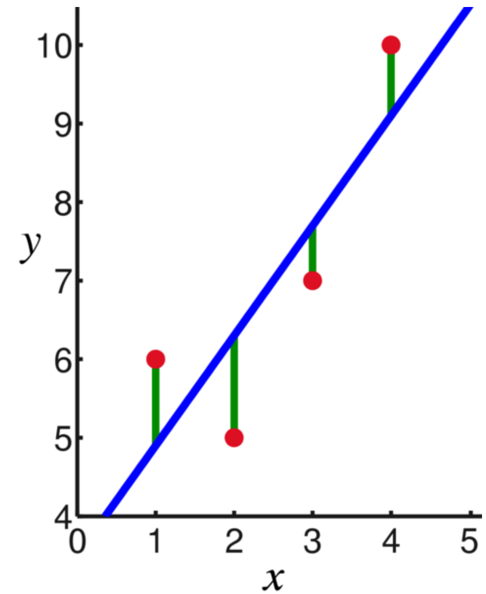
Idemo provjeriti teoriju za točke sa slike:
(1,6); (2,5); (3,7); (4,10)



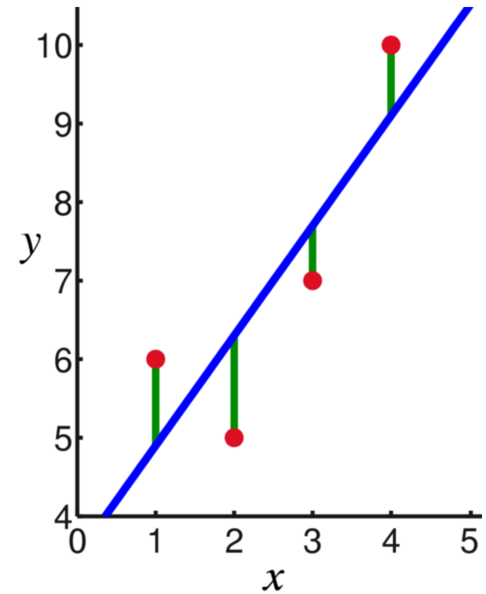
Kriteriji estimacije (3)

Idemo provjeriti teoriju za točke sa slike:
(1,6); (2,5); (3,7); (4,10)

$\mathbf{A}_A$ — matrica algebarske formulacije (4×3)
$\mathbf{A}_G$ — matrica geometrijske formulacije (4×2)



KRITERIJI ESTIMACIJE (3)



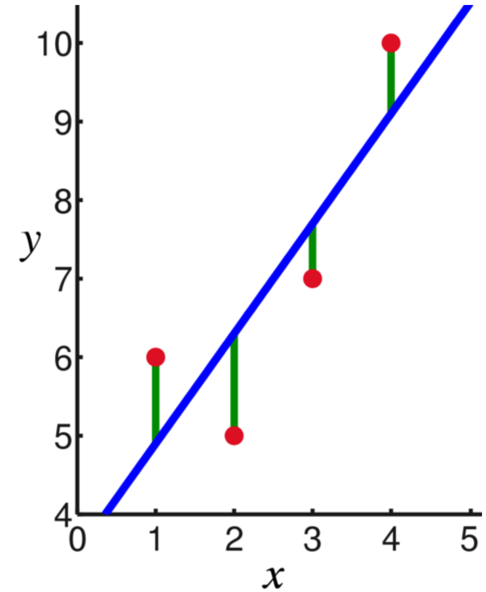
Idemo provjeriti teoriju za točke sa slike:
(1,6); (2,5); (3,7); (4,10)

$\mathbf{A}_A$ — matrica algebarske formulacije (4×3)
$\mathbf{A}_G$ — matrica geometrijske formulacije (4×2)

Izvorni kod u octaveu:

```
Aa=[1 6 1; 2 5 1; 3 7 1; 4 10 1];
[U,D,V]=svd(Aa); v3=V(:,3);
kla=[-v3(1)/v3(2); -v3(3)/v3(2)];

Ag=[1 1; 2 1; 3 1; 4 1];
y=[6;5;7;10];
klg=pinv(Ag)*y;
```

Kriteriji estimacije (3)



Idemo provjeriti teoriju za točke sa slike:
(1,6); (2,5); (3,7); (4,10)

$\mathbf{A}_A$ — matrica algebarske formulacije (4×3)
$\mathbf{A}_G$ — matrica geometrijske formulacije (4×2)

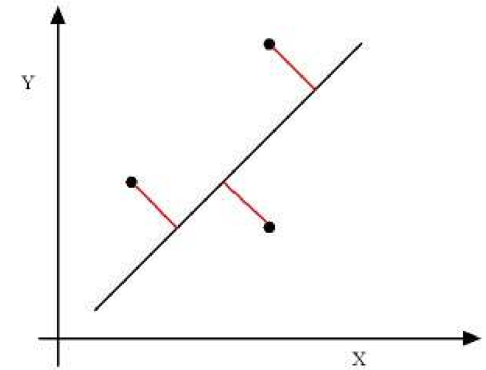
Izvorni kod u octaveu:

```
Aa=[1 6 1; 2 5 1; 3 7 1; 4 10 1];
[U,D,V]=svd(Aa); v3=V(:,3);
kla=[-v3(1)/v3(2); -v3(3)/v3(2)];

Ag=[1 1; 2 1; 3 1; 4 1];
y=[6;5;7;10];
klg=pinv(Ag)*y;
```

```
disp(kla)    // [ 0.9; 5.0 ]

disp(klg)    // [ 1.4; 3.5 ]

disp(norm(Ag*kla-y))  // 2.4

disp(norm(Ag*klg-y))  // 2.0
```

KRITERIJI ESTIMACIJE (4)

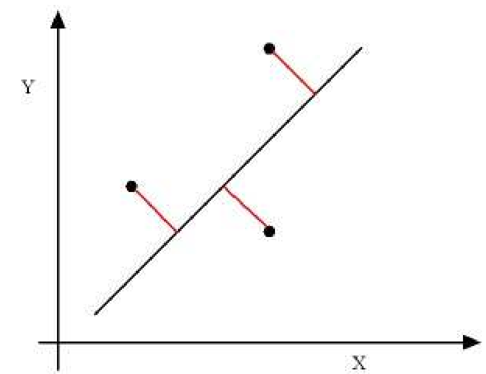
Ali što ako šum djeluje na obje koordinate (TLS)



$$\delta x, \delta y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)?$$

Kriteriji estimacije (4)

Ali što ako šum djeluje na obje koordinate (TLS)



$$\delta x, \delta y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)?$$

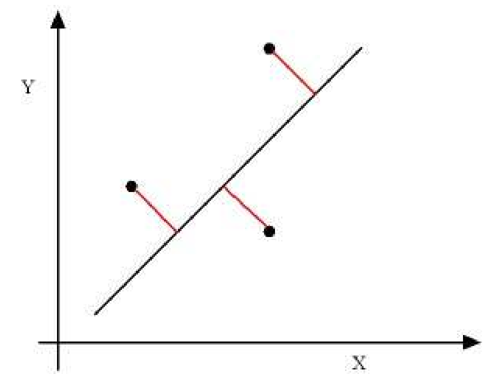
Onda nam prošli kriteriji (alg, g1) neće dati optimalno rješenje

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{g2}} &= \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q_i}) \\ &= \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \frac{(p_1 q_x + p_2 q_y + p_3)^2}{p_1^2 + p_2^2}\end{aligned}$$

KRITERIJI ESTIMACIJE (4)

Ali što ako šum djeluje na obje koordinate (TLS)

$$\delta x, \delta y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)?$$



Onda nam prošli kriteriji (alg, g1) neće dati optimalno rješenje

$$\hat{\mathbf{p}}_{\mathrm{g2}} = \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q_i})$$
$$= \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \frac{(p_1 q_x + p_2 q_y + p_3)^2}{p_1^2 + p_2^2}$$

Novi kriterij (g2) je **nelinearan** pa ga ne možemo optimirati algebarskom minimizacijom!

KRITERIJI ESTIMACIJE (5)

Situacija da se geometrijski kriterij ne da izraziti u okviru linearnog sustava je vrlo česta!

Kriteriji estimacije (5)

Situacija da se geometrijski kriterij ne da izraziti u okviru linearnog sustava je vrlo česta!

Nameće se zaključak da najbolje rezultate nećemo moći dobiti bez **nelinearne optimizacije** (npr, gradijentni spust)

KRITERIJI ESTIMACIJE (5)

Situacija da se geometrijski kriterij ne da izraziti u okviru linearnog sustava je vrlo česta!

Nameće se zaključak da najbolje rezultate nećemo moći dobiti bez **nelinearne optimizacije** (npr, gradijentni spust)

Da li su linearne metode estimacije beskorisne?
(Projective geometry considered harmful, IJCV99)

KRITERIJI ESTIMACIJE (5)

Situacija da se geometrijski kriterij ne da izraziti u okviru linearnog sustava je vrlo česta!

Nameće se zaključak da najbolje rezultate nećemo moći dobiti bez **nelinearne optimizacije** (npr, gradijentni spust)

Da li su linearne metode estimacije beskorisne? (Projective geometry considered harmful, IJCV99)

Ipak, odgovor je po svoj prilici ne, jer:

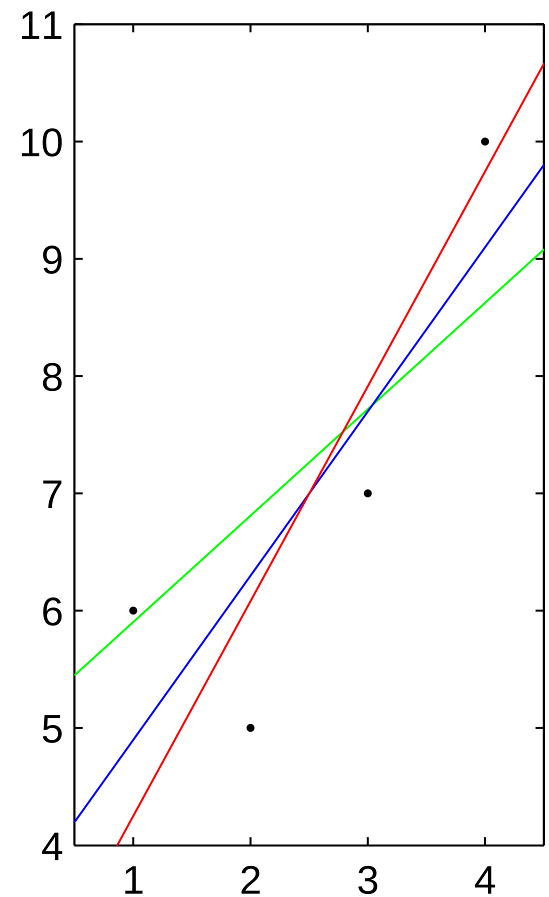
- linearna metoda je često jedini izbor kad nemamo početnu aproksimaciju
- ovisno o problemu, linearni rezultat može biti gotovo jednako upotrebljiv kao i geometrijski
- linearne metode mogu se dramatično poboljšati kondicioniranjem (In Defense of the Eight-Point Algorithm, PAMI1997)

KRITERIJI ESTIMACIJE (6)

Za radoznale, u slučaju pravca, kriterij g2 se da izraziti metodom PCA.

Program u Octave-u (dolje), te tri provučena pravca (desno)

```
A_alg=[1 6 1; 2 5 1; 3 7 1; 4 10 1];
A_g2=A_alg(:,1:2);
mu_g2=mean(A_g2);
A_g2_mu=A_g2 -  [1;1;1;1]*mu_g2;
[U_g2,D_g2,V_g2]=svd(A_g2_mu);
k_g2=V_g2(2,1)/V_g2(1,1)
l_g2=mu_g2(2)-k_g2*mu_g2(1)
```



	alg	g1	g2
$\hat{k}$	0.9	1.4	1.8
$\hat{l}$	5.0	3.5	2.4

KRITERIJI ESTIMACIJE (7)

Statistički kriteriji estimacije

Kriteriji estimacije (7)

Statistički kriteriji estimacije

Pretpostavimo model $\mathcal{M}(\mathbf{p})$, npr, $\mathbf{p} = (k, l)$, te da na temelju mjerenja $\mathbf{o}$ (npr, $\mathbf{o} = \mathbf{y}$) želimo ocijeniti parametre modela $\mathbf{p}$

Kriteriji estimacije (7)

Statistički kriteriji estimacije

Pretpostavimo model $\mathcal{M}(\mathbf{p})$, npr, $\mathbf{p} = (k, l)$, te da na temelju mjerenja $\mathbf{o}$ (npr, $\mathbf{o} = \mathbf{y}$) želimo ocijeniti parametre modela $\mathbf{p}$

Statistički kriterij za vrednovanje $\mathbf{p}$: **maksimizirati** vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$ pod pretpostavkom $\mathcal{M}(\mathbf{p})$!

KRITERIJI ESTIMACIJE (7)

Statistički kriteriji estimacije

Pretpostavimo model $\mathcal{M}(\mathbf{p})$, npr, $\mathbf{p} = (k, l)$, te da na temelju mjerenja $\mathbf{o}$ (npr, $\mathbf{o} = \mathbf{y}$) želimo ocijeniti parametre modela $\mathbf{p}$

Statistički kriterij za vrednovanje $\mathbf{p}$: **maksimizirati** vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$ pod pretpostavkom $\mathcal{M}(\mathbf{p})$!

Uvjetnu vjerojatnost opažanja s obzirom na model nazivamo vjerodostojnošću modela:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

KRITERIJI ESTIMACIJE (7)

Statistički kriteriji estimacije

Pretpostavimo model $\mathcal{M}(\mathbf{p})$, npr, $\mathbf{p} = (k, l)$, te da na temelju mjerenja $\mathbf{o}$ (npr, $\mathbf{o} = \mathbf{y}$) želimo ocijeniti parametre modela $\mathbf{p}$

Statistički kriterij za vrednovanje $\mathbf{p}$: **maksimizirati** vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$ pod pretpostavkom $\mathcal{M}(\mathbf{p})$!

Uvjetnu vjerojatnost opažanja s obzirom na model nazivamo vjerodostojnošću modela:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Kriterij maksimalne vjerodostojnosti (MLE) izražavamo:

$$\hat{\mathbf{p}}_{MLE} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p})$$

Kriteriji estimacije (8)

Izvedimo MLE kriterij za provlačenje pravca kroz skup točaka

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} p(\mathbf{y}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Kriteriji estimacije (8)

Izvedimo MLE kriterij za provlačenje pravca kroz skup točaka

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} p(\mathbf{y}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Izrazimo gustoću vjerojatnosti pojedinačnog mjerenja y_i;
pretp. $y_i \sim \mathcal{N}(\overline{y_i}, \sigma)$) (**normalno distribuirani**, **nepristrani**):

$$p(y_i|\overline{y_i}) \sim e^{-\frac{(y_i - \overline{y_i})^2}{2\sigma^2}}$$

Kriteriji estimacije (8)

Izvedimo MLE kriterij za provlačenje pravca kroz skup točaka

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} p(\mathbf{y}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Izrazimo gustoću vjerojatnosti pojedinačnog mjerenja y_i;
pretp. $y_i \sim \mathcal{N}(\overline{y_i}, \sigma)$) (**normalno distribuirani**, **nepristrani**):

$$p(y_i|\overline{y_i}) \sim e^{-\frac{(y_i - \overline{y_i})^2}{2\sigma^2}}$$

Izrazimo sada gustoću vjerojatnosti cijelog skupa mjerenja, pod pretpostavkama **jednake disperzije** i **nezavisnosti**:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{p}, \mathbf{x}) \sim \prod_i e^{-\frac{(y_i - p_1 \cdot x_i - p_2)^2}{2\sigma^2}}$$

Kriteriji estimacije (9)

Logaritam vjerodostojnosti sada je:

$$\log \mathcal{L}(\mathbf{p}) \sim -(y_i - p_1 \cdot x_i - p_2)^2$$

Kriteriji estimacije (9)

Logaritam vjerodostojnosti sada je:

$$\log \mathcal{L}(\mathbf{p}) \sim -(y_i - p_1 \cdot x_i - p_2)^2$$

Pravac koji maksimira vjerodostojnost sad je:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} (-\log \mathcal{L}(\mathbf{p}))$$

Kriteriji estimacije (9)

Logaritam vjerodostojnosti sada je:

$$\log \mathcal{L}(\mathbf{p}) \sim -(y_i - p_1 \cdot x_i - p_2)^2$$

Pravac koji maksimira vjerodostojnost sad je:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} (-\log \mathcal{L}(\mathbf{p}))$$

Dolazimo do ekvivalencije geometrijskog i MLE kriterija!

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \|p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i\|$$

Kriteriji estimacije (9)

Logaritam vjerodostojnosti sada je:

$$\log \mathcal{L}(\mathbf{p}) \sim -(y_i - p_1 \cdot x_i - p_2)^2$$

Pravac koji maksimira vjerodostojnost sad je:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} (-\log \mathcal{L}(\mathbf{p}))$$

Dolazimo do ekvivalencije geometrijskog i MLE kriterija!

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \|p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i\|$$

Geometrijski kriterij nije MLE, kad god se šum ne može opisati dekoreliranim i identičnim normalnim razdiobama!

Kriteriji estimacije (10)

Kriterij MLE — $\mathbf{p}$ maksimira uvjetnu vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$, neovisno o apriornoj vjerojatnosti parametara:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Kriteriji estimacije (10)

Kriterij MLE — $\mathbf{p}$ maksimira uvjetnu vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$, neovisno o apriornoj vjerojatnosti parametara:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Ako se $p(\mathbf{p})$ može modelirati, estimaciju možemo poboljšati!

Kriteriji estimacije (10)

Kriterij MLE — $\mathbf{p}$ maksimira uvjetnu vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$, neovisno o apriornoj vjerojatnosti parametara:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Ako se $p(\mathbf{p})$ može modelirati, estimaciju možemo poboljšati!

Kriterij MAP — $\mathbf{p}$ maksimira svoju posteriornu distribuciju:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} p(\mathcal{M}(\mathbf{p})|\mathbf{o})$$

Kriteriji estimacije (10)

Kriterij MLE — $\mathbf{p}$ maksimira uvjetnu vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$, neovisno o apriornoj vjerojatnosti parametara:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Ako se $p(\mathbf{p})$ može modelirati, estimaciju možemo poboljšati!

Kriterij MAP — $\mathbf{p}$ maksimira svoju posteriornu distribuciju:

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} p(\mathcal{M}(\mathbf{p})|\mathbf{o})$$

Gustoću vjerojatnosti $p(\mathbf{p}|\mathbf{o})$ kriterija MAP (max. a posteriori) dobivamo primjenom Bayesovog teorema:

$$P(M|O) = \frac{P(O|M)\,P(M)}{P(O)}$$

Kriteriji estimacije (11)

U našem slučaju, u brojniku imamo **vjerodostojnost** i **apriornu vjerojatnost**, a u nazivniku **normalizacijski faktor**

$$p(\mathbf{p}|\mathbf{o}) = \frac{p(\mathbf{o}|\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})}{p(\mathbf{o})} \sim \mathcal{L}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

Kriteriji estimacije (11)

U našem slučaju, u brojniku imamo **vjerodostojnost** i **apriornu vjerojatnost**, a u nazivniku **normalizacijski faktor**

$$p(\mathbf{p}|\mathbf{o}) = \frac{p(\mathbf{o}|\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})}{p(\mathbf{o})} \sim \mathcal{L}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

Konačan izraz za estimator MAP je:

$$\hat{\mathbf{p}}_{MAP} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

KRITERIJI ESTIMACIJE (11)

U našem slučaju, u brojniku imamo **vjerodostojnost** i **apriornu vjerojatnost**, a u nazivniku **normalizacijski faktor**

$$p(\mathbf{p}|\mathbf{o}) = \frac{p(\mathbf{o}|\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})}{p(\mathbf{o})} \sim \mathcal{L}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

Konačan izraz za estimator MAP je:

$$\hat{\mathbf{p}}_{MAP} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

MLE: model = max p(slika|model)
MAP: model = max p(slika|model) · p(model)

Kriteriji estimacije (11)

U našem slučaju, u brojniku imamo **vjerodostojnost** i **apriornu vjerojatnost**, a u nazivniku **normalizacijski faktor**

$$p(\mathbf{p}|\mathbf{o}) = \frac{p(\mathbf{o}|\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})}{p(\mathbf{o})} \sim \mathcal{L}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

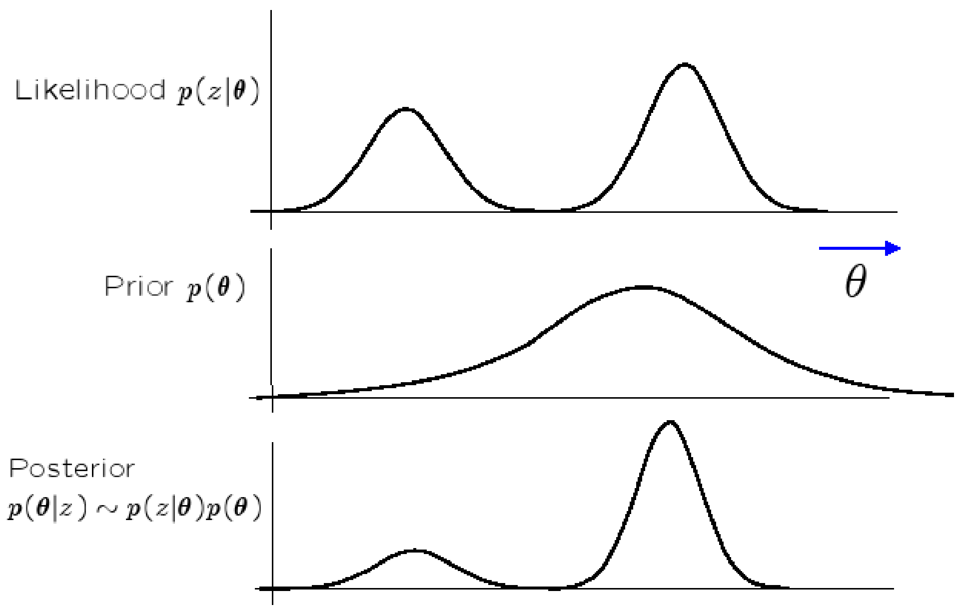
Konačan izraz za estimator MAP je:

$$\hat{\mathbf{p}}_{MAP} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

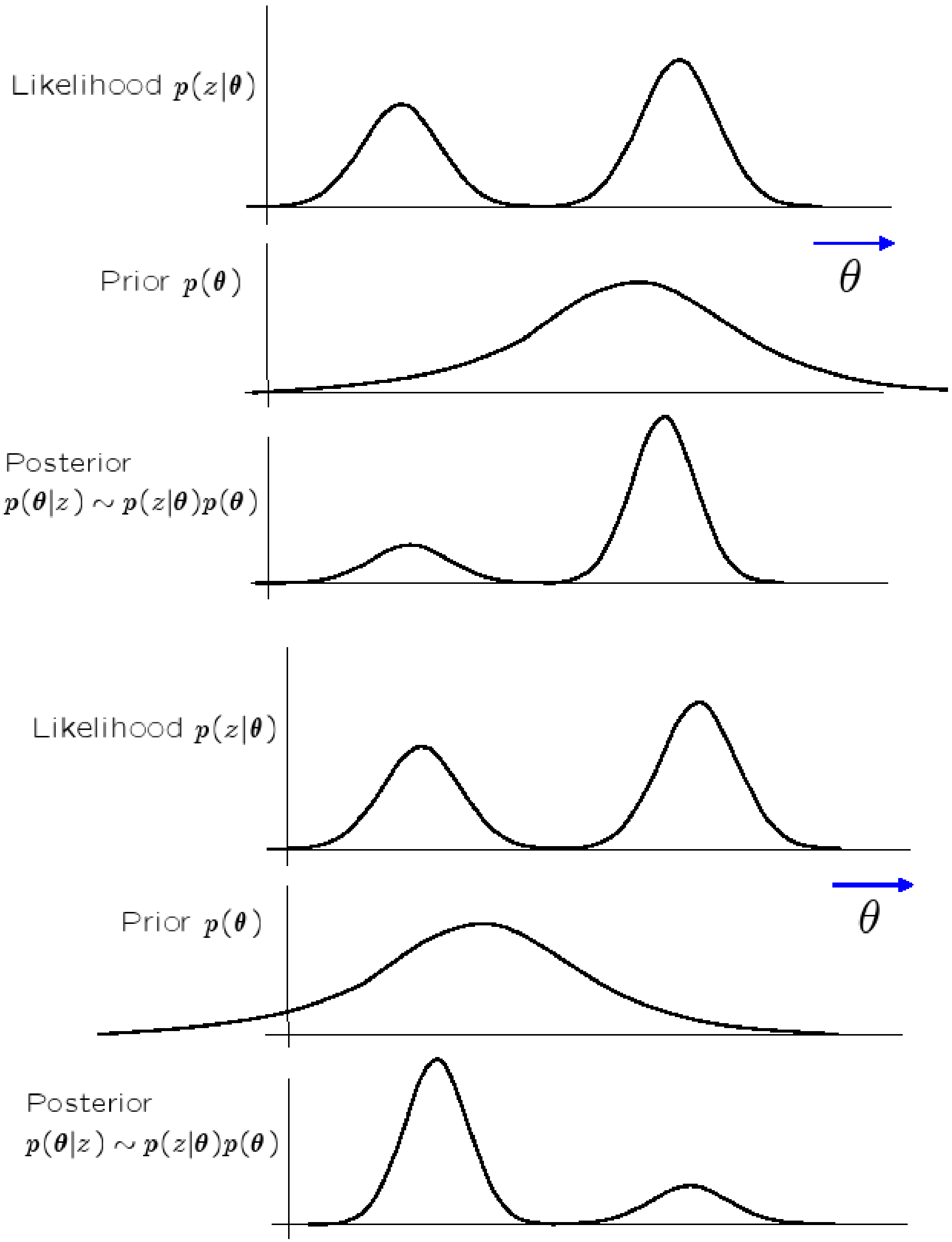
MLE: model = max p(slika|model)
MAP: model = max p(slika|model) · p(model)

Vidjeli smo klokana. Jesmo li u Australiji?
Vidjeli smo nešto što podsjeća na znak. Da li je pokraj ceste?

Kriteriji estimacije (12)



Kriteriji estimacije (12)



[Zisserman01]

ROBUSTNA ESTIMACIJA

Prisjetimo se **motivacije**:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju

ROBUSTNA ESTIMACIJA

Prisjetimo se **motivacije**:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju $\surd$

ROBUSTNA ESTIMACIJA

Prisjetimo se **motivacije**:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju $\surd$
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma **statistički** povoljan

ROBUSTNA ESTIMACIJA

Prisjetimo se **motivacije**:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju $\surd$
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma **statistički** povoljan $\surd$

ROBUSTNA ESTIMACIJA

Prisjetimo se **motivacije**:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju $\surd$
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma **statistički** povoljan $\surd$
3. vanpopulacijski parametri **ne ometaju** točan rezultat

ROBUSTNA ESTIMACIJA

Prisjetimo se **motivacije**:

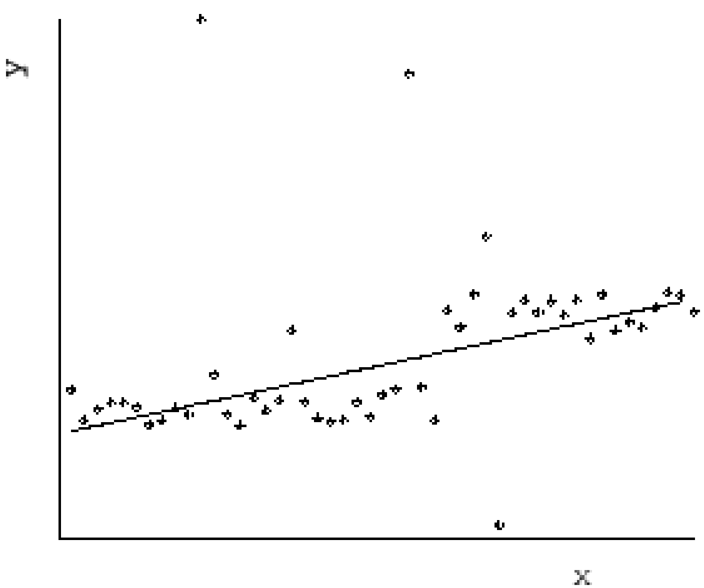
1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju $\surd$
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma **statistički** povoljan $\surd$
3. vanpopulacijski parametri **ne ometaju** točan rezultat
   (to bismo sada, nažalost vrlo ukratko)

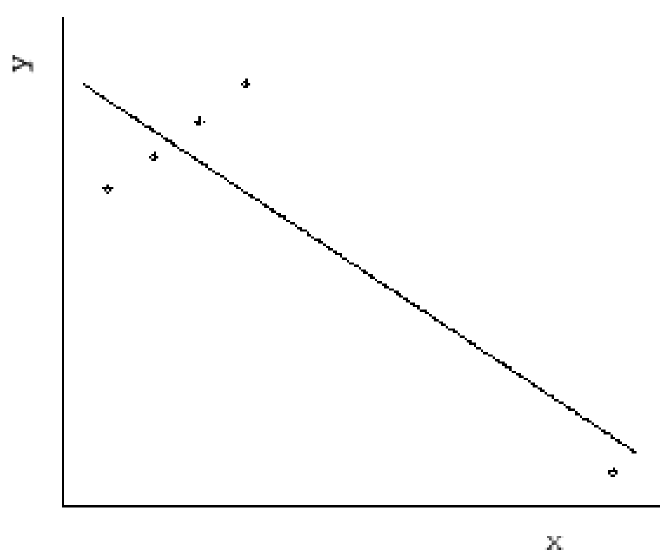
ROBUSTNA ESTIMACIJA

Prisjetimo se **motivacije**:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju √
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma **statistički** povoljan √
3. vanpopulacijski parametri **ne ometaju** točan rezultat
   (to bismo sada, nažalost vrlo ukratko)

Zašto outlieri mogu biti problem [Stewart99]?





ROBUSTNA ESTIMACIJA (2)

Robustni pristupi u računalnom vidu:

1. Houghova transformacija
2. Evaluacija hipoteza dobivenih nad minimalnim slučajnim uzorkom
   Monte Carlo analiza, RANSAC, MLESAC, ***SAC, LMedSqr
3. Iterativno poboljšanje korištenjem robustnih normi:
   IRLS, M-estimacija

ROBUSTNA ESTIMACIJA (2)

Robustni pristupi u računalnom vidu:

1. Houghova transformacija
2. Evaluacija hipoteza dobivenih nad minimalnim slučajnim uzorkom
   Monte Carlo analiza, RANSAC, MLESAC, ***SAC, LMedSqr
3. Iterativno poboljšanje korištenjem robustnih normi:
   IRLS, M-estimacija

(I to je sve...)