Dinamička analiza scena

robusna procjena parametara

Siniša Šegvić i Zoran Kalafatić

UniZg-FER ZEMRIS

Uvod

Procjena (estimacija) **parametara modela**: jedna od uspješnih paradigmi modernog računalnog vida

Vid: ekstrakcija informacije iz slika

- transformacija 2D objekta: translacija, sličnost, homografija
- položaj kamere: relativni (relative), apsolutni (absolute pose)
- geometrija svijeta (scene reconstruction, structure from motion)
- položaj objekata: pronalaženje (detection), praćenje (tracking)
- identitet objekta: prepoznavanje (recognition)

Ideja:

- stvarni svijet predstaviti parametriziranim modelom
- estimirati iz velikog skupa opažanja statističkim metodama!

Uvod: x

Što bi bio model?   --- **apriorno znanje** o sceni ili efektu

Npr, afina trans. kao model prividnog kretanja planarne značajke

$$I_n(\mathbf{x}) = I_0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d})$$

Npr, Euklidska trans. kao model gibanja nepokretne scene

$$\mathbf{X_2} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X_1} + \mathbf{T}$$

Npr, epipolarno ograničenje kao model odnosa korespondentnih značajki nepokretne scene

$$\mathbf{x_2}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x_1} = 0$$

Uvod: x

Estimacijska teorija se bavi **procjenjivanjem** parametara modela iz mnoštva podataka degradiranih šumom

Šum obično modelira odstupanja uslijed nesavršenog modela

- 2D transformacija ne može precizno objasniti deformacije značajki koje nisu planarne
- pronalaženje korespondencija ne može biti točno u piksel (transformacija izgleda ovisi o paralaksi i 3D strukturi)
- vanjski utjecaji koji ne uzrokuju velika odstupanja: osvjetljenje, zamućenje, termalni šum :-), **...**

Ideja: iz mnoštva djelomično kontradiktornih podataka izvući najvjerodostojniju ili najvjerojatniju interpretaciju!

UVOD: X

Često pretpostavljamo normalni nepristrani šum
(normalna razdioba obično dobar model znanja o neznanju)

Npr, kod stereo vida, položaj značajke često označavamo:

$$\mathbf{q_i} = \overline{\mathbf{q_i}} + \Delta\mathbf{q_i}, \text{ uz } q_x, q_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Ideja: dizajnirati metode koje će rezultirati **statistički boljim** rezultatima uz pretpostavljeni model šuma!!

UVOD: X

Koncept šuma primjenljiv samo za umjerena odstupanja

Za veća odstupanja potrebno uvesti koncept izvanpopulacijskih podataka (outliera) koji se ne pokoravaju dominantnom modelu

Izvanpopulacijske korespondencije za model nepokretne scene:

- korepondencija nastala asocijacijskom pogreškom (upareni su različiti objekti sličnog izgleda)
- ispravna korespondencija projekcije s pokretnog objekta

Ideja: dizajnirati robusne metode koje mogu **detektirati** i **zanemariti** izvanpopulacijska mjerenja!

Uvod: x

Motivacija za teoriju estimacije:

Računalni vid je disciplina u kojoj obično obrađujemo redundantne podatke, u prisustvu šuma i outliera
(dobivamo sustav jednadžbi s viškom ograničenja)

Želimo **gledati** (izlučivati parametre) na način da:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma bude **statistički** povoljan
3. vanpopulacijski parametri **ne ometaju** točan rezultat

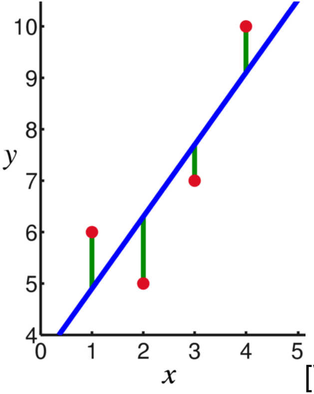
Okvir za postizanje tih svojstava daje **teorija estimacije.**

Linearni sustavi: x

Primjer broj jedan: provući pravac kroz zadani skup 2D točaka

Model **podataka**: pravac

Model **šuma**: djeluje na koordinatu y, nezavisan, identično distribuiran prema $\mathcal{N}(0, \sigma)$



[Wikipedia]

Linearni sustavi: x

Obično je ovakve probleme **najlakše** i najnepreciznije rješavati u projekcijskoj domeni

Ako i-ta točka $\mathbf{q_i}$ prolazi kroz traženi pravac $\mathbf{p}$, vrijedi:

$$\mathbf{q_{Hi}}^\top \cdot \mathbf{p} = p_1 q_x + p_2 q_y + p_3 = 0$$

Ako su sve točke $\mathbf{q_i}$, $i = 1, 2, ..., n$ elementi pravca $\mathbf{p}$, vrijedi:

$$\mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \text{gdje je} \;\; \mathbf{A}_{i,:} = \mathbf{q_i}^\top$$

U prisustvu šuma, gornja jednadžba nema rješenja.
Ima stoga smisla tražiti rješenje koje minimizira rezidual:

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\min_{\mathbf{p}}(\|\mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p}\|), \;\; \text{uz uvjet} \;\; \|\mathbf{p}\| = 1$$

Linearni sustavi: x

Dobili smo linearni homogeni sustav s viškom ograničenja

- homogeneous linear least squares
- overconstrained homogeneous linear system

$$\widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{x}_{n\times 1}\|), \quad \text{uz uvjet} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

Rješenje odgovara desnom singularnom vektoru matrice **A** koji odgovara najmanjoj singularnoj vrijednosti!

Singularne vrijednosti i vektore dobivamo singularnom dekompozicijom.

Ekvivalentan rezultat dobivamo svojstvenom dekompozicijom simetrične matrice $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$

Linearni sustavi: x

Linearni nehomogeni sustav s viškom ograničenja:

$$\widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1}\| - \mathbf{b}_{n\times 1})$$

Rješenje je umnožak pseudoinverza matrice **A** i vektora **b**:

$$\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+} \cdot \mathbf{b}$$

Moore-Penroseov inverz $\mathbf{A}^{+}$ dobivamo singularnom dekompozicijom, ili nekim drugim metodama koje su nešto brže i nešto manje točne

Linearna algebra: x

Svaka matrica $\mathbf{A}_{m \times n}$ ima singularnu dekompoziciju:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top$$

- $\mathbf{U}_{m \times m}$ ($\mathbf{U}_{m \times n}$) ... ortogonalna matrica (ili ortogonalni stupci)
- $\mathbf{D}_{m \times n}$ ($\mathbf{D}_{n \times n}$) ... dijagonalna pozitivno semidefinitna matrica
- $\mathbf{V}_{n \times n}$ ... ortogonalna matrica

Vrijedi:

- $\mathbf{D}_{i,i} = d_i$ --- i-ta singularna vrijednost ($d_i \in \mathbb{R}_0^+, d_i > d_{i+1}$)
- $\mathbf{V}_{:,i} = \mathbf{v}_i$ --- i-ti desni singularni vektor ($\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$)
- $\mathbf{U}_{:,i} = \mathbf{u}_i$ --- i-ti lijevi singularni vektor ($\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$)
  - $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\| = (\mathbf{U}\mathbf{x})^\top (\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{U}^\top \mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top (\mathbf{U}^\top \mathbf{U})\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|$

Linearna algebra: x

Malo intuicije: u kakvoj je vezi SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top$ sa svojstvenom dekompozicijom simetrične matrice

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \cdot \quad \cdot \mathbf{V}^\top ?$$

Za simetrične matrice, SVD odgovara svojstvenoj dekompoziciji:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V}$$

Uvrštavanjem SVD dekompozicije matrice $\mathbf{A}$ dobivamo:

- $\mathbf{V}$ figurira u svojstvenoj dekompoziciji $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{V}(\mathbf{D}^\top\mathbf{D})\mathbf{V}^\top$
- $\mathbf{U}$ figurira u svojstvenoj dekompoziciji $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{U}(\mathbf{D}\mathbf{D}^\top)\mathbf{U}^\top$
- $d_i^2 = \lambda_i(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \lambda_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)$

Linearna algebra: x

Svojstva SVD:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$$

SVD pruža osnovne informacije o matrici:

- neka je $d_i > 0, \forall i \leq r$, te $d_i = 0, \forall i > r$
- kodomena (slika) matrice: $\mathcal{K}(\mathbf{A})= \mathrm{span}\{\mathbf{u}_i, i = 1, 2, ..., r\}$
- nulprostor (jezgra) matrice: $\mathrm{null}(\mathbf{A})= \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i, i = r + 1, ..., n\}$
- rang matrice: $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = r$
- uvjetovanost matrice $(\delta(\mathbf{x})/\delta(\mathbf{b}))$: $\kappa(\mathbf{A})=d_1/d_n$

Linearna algebra: x

Svojstva SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$ (2):

SVD predstavlja djelovanje matrice kao:

- rotaciju u odredišnom prostoru ($\mathbf{U}_{m \times m}$)
- neravnomjerno skaliranje + pad ranga ($\mathbf{D}_{m \times n}$)
- rotaciju u izvornom prostoru ($\mathbf{V}_{n \times n}$)

Optimalna $\|\|_F$ aproksimacija najbližom matricom nižeg ranga r_a

- dovoljno je postaviti $d_i = 0, i = r_a, ..., \max(m, n)$!
- redci matrice **U** --- sortirana verzija redaka **A**,
- redci matrice **V** --- sortirane osi varijabilnosti redaka **A**
- kriterij sortiranja: istaknutost, značaj pri raspoznavanju
- primjene: PCA, kompresija, analiza linearnih sustava

Linearna algebra: x

Zašto i kako SVD **optimalno** (L2) ``rješava" homogene sustave?

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{UDV}^\top \mathbf{x}\| = \min_x \|\mathbf{DV}^\top \mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$$

Neka je $\mathbf{q} = \mathbf{V}^\top \mathbf{x}$; tada vrijedi:

$$\|\mathbf{UDV}^\top \mathbf{x}\| = \|\mathbf{Dq}\|, \text{ uz } \|\mathbf{q}\| = 1 \qquad (*)$$

Elementi $\mathbf{D}$ su pozitivni i padajući, pa $\mathbf{q}$ koji minimizira (*) iznosi
$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^\top$

Odatle slijedi ono što je trebalo dokazati: $\mathbf{x} = \mathbf{Vq} = \mathbf{V}_{:,n} \quad \square$

Linearna algebra: x

Zašto i kako SVD optimalno (L2) ``rješava" nehomogene sustave?

Promotrimo sustav $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \rightarrow \min$.

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{UDV}^\top \mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \min_x \|\mathbf{Dq} - \mathbf{U}^\top \mathbf{b}\|, \text{ uz } \mathbf{q} = \mathbf{V}^\top \mathbf{x}$$

Izrazimo traženi rezidual zbrojem kvadrata komponenata (L2):

$$\|\mathbf{Dq} - \mathbf{U}^\top \mathbf{b}\| = \sum_i (d_i q_i - \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b})^2 = \sum_{i=1}^{r} (d_i q_i - \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b})^2 + \sum_{i=r+1}^{n} (\mathbf{u}_i^\top \mathbf{b})^2$$

Sad se vidi da za minimum mora biti $q_i = \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b} / d_i,\ i = 1 : r$

(za ostale i, proizvoljno odabiremo $q_i = 0$)

Linearna algebra: x

Kako SVD optimalno (L2) ``rješava" nehomogene sustave? (2)

Pronašli smo $q_i = \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}/d_i$, $i = 1 : r$, koliki je $\mathbf{x} = \mathbf{Vq}$?

Uvrštavamo q_i i žongliramo skalarnim produktom...

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} q_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}}{d_i} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{u_i}^\top}{d_i} \cdot \mathbf{b}$$

Konačno, rješenje sustava $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \longrightarrow \min$ je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{+}\mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$$

$\mathbf{A}^+$ ... pseudoinverz od $\mathbf{A}$ (Moore - Penrose)

Linearna algebra: x

Kako SVD ``rješava'' sustave s manjkom ograničenja?

Npr: koje sve ravnine prolaze kroz zadane dvije točke?

Homogeni sustav $\min_x \|\mathbf{A}_{m\times n}\cdot\mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$ može imati:

- rješenje u smislu LS, ako $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n$
- točno rješenje, ako $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = n-1$
- beskonačno rješenja, ako $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) < n-1$

U posljednjem slučaju, potprostor rješenja je:

$\operatorname{null}(\mathbf{A}) = \operatorname{span}\{\mathbf{v}_i, i = r+1, ..., n\}$

Rješenja nehomogenog sustava dobivamo kao zbroj:

- potprostora rješenja homogenog sustava, i
- nekog partikularnog rješenja

Kondicioniranje linearnog sustava: x

Razmotrimo homogeni preograničeni sustav (koji minimizira algebarski kriterij):

$$\widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}| \ , \ \text{uz} \ |\mathbf{x}| = 1$$

$\widehat{\mathbf{x}}$ je rješenje sustava $\mathbf{A_F} \cdot \mathbf{x} = 0$, gdje je $\mathbf{A_F}$ defektna matrica najbliža $\mathbf{A}$ (u smislu Frobeniusove norme)

Ključ kvalitete rješenja je u razdiobi šuma $\mathbf{D}$ u matrici sustava $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}$$

Neravnomjerno raspoređen šum $\Rightarrow$ pristrano rješenje!

Obratiti pažnju na razdiobu šuma po stupcima i po redcima matrice sustava!

Kondicioniranje linearnog sustava: x

Razdioba šuma u matrici sustava pospješuje se kondicioniranjem

Teorijski dobro utemeljen pristup je uravnoteživanje [Muehlich98]

Matrica sustava se množi s lijeva i s desne prikladnim kvadratnim matricama punog ranga:

$$\widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} |\mathbf{A_{eq}} \cdot \mathbf{x}'| \text{, gdje su} \tag{1}$$

$$\mathbf{A}_{eq} = \mathbf{W_L} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W_R}, \tag{2}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{W_R}^{-1} \cdot \mathbf{x} \tag{3}$$

Cilj je **ravnomjerno** raspoređen **šum** u $\mathbf{A_{eq}}$:

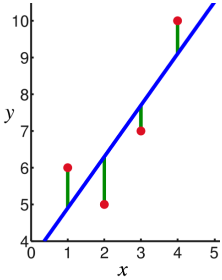
$$E[\mathbf{D_{eq}}^\top \mathbf{D}_{eq}] = c \cdot \mathbf{I}, \text{ gdje je } \mathbf{D_{eq}} = \mathbf{A_{eq}} - \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{eq}}$$

Kriteriji estimacije: x

Vratimo se na problem provlačenja $\mathbf{p}(\mathbf{q_i})$

Što fali algebarskom projekcijskom kriteriju:

$$\widehat{\mathbf{p}}_{alg} = \arg\min_{\mathbf{p}} \mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p}, \quad \text{gdje je} \;\; \mathbf{A}_{i,:} = \mathbf{q_i}^\top$$



- nema eksplicitnog modela šuma
- ne minimizira smislenu funkciju cilja

Kriterij optimizacije dobivamo uvrštanjem podataka s eksplicitno modeliranim šumom $(x_i, \overline{y_i} + \delta y_i)$:

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\min_{\mathbf{p}} p_2 \cdot \sum \Delta {y_i}^2, \quad \text{uz} \;\; \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = 1$$

Kriterij je pristran jer favorizira pravce s malim p_2!

Kriteriji estimacije: x

Bolje rješenje dobivamo parametrizacijom $\mathbf{p} = (k, l)$, koja dozvoljava modeliranje geometrijskog kriterija:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{p}}_{g1} &= \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \|p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i\| && (4) \\ &= \mathbf{A}_{m\times 2} \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{y}_m, \quad \text{gdje je } \mathbf{A}_{i,:} = \begin{bmatrix} x_i & 1 \end{bmatrix} && (5) \end{aligned}$$

Kad uvrstimo degradirani podatak $(x_i, \overline{y_i} + \delta y_i)$: vidimo da i-ti rezidual r_i iznosi upravo δy_i

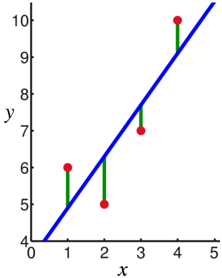
Stoga će rješenje

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$$

biti pravac s minimalnim ukupnim kvadratnim odstupanjem od zadanih točaka (pravac s najvećom *vjerodostojnošću*)

Kriteriji estimacije: x

Idemo provjeriti teoriju za točke sa slike:
(1,6); (2,5); (3,7); (4,10)



$\mathbf{A}_A$ --- matrica algebarske formulacije (4×3)
$\mathbf{A}_G$ --- matrica geometrijske formulacije (4×2)

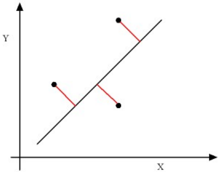
Izvorni kod u octaveu:

```
Aa=[1 6 1; 2 5 1; 3 7 1; 4 10 1];  disp(kla)    // [ 0.9; 5.0 ]
[U,D,V]=svd(Aa); v3=V(:,3);
kla=[-v3(1)/v3(2); -v3(3)/v3(2)];  disp(klg)    // [ 1.4; 3.5 ]

Ag=[1 1; 2 1; 3 1; 4 1];           disp(norm(Ag*kla-y))  // 2.4
y=[6;5;7;10];
klg=pinv(Ag)*y;                    disp(norm(Ag*klg-y))  // 2.0
```

Kriteriji estimacije: x

Ali što ako šum djeluje na obje koordinate (TLS)



$$\delta x, \delta y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)?$$

Onda nam prošli kriteriji (alg, g1) neće dati optimalno rješenje

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{p}}_{\mathrm{g2}} &= \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q_i}) \\ &= \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \frac{(p_1 q_x + p_2 q_y + p_3)^2}{p_1^2 + p_2^2} \end{aligned}$$

Novi kriterij (g2) je **nelinearan** pa ga ne možemo optimirati algebarskom minimizacijom!

Kriteriji estimacije: x

Situacija da se geometrijski kriterij ne da izraziti u okviru linearnog sustava je vrlo česta!

Nameće se zaključak da najbolje rezultate nećemo moći dobiti bez **nelinearne optimizacije** (npr, gradijentni spust)

Da li su linearne metode estimacije beskorisne?
(Projective geometry considered harmful, IJCV99)

Ipak, odgovor je po svoj prilici ne, jer:

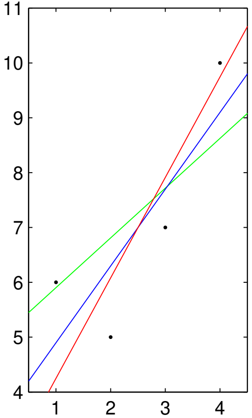
- linearna metoda je često jedini izbor kad nemamo početnu aproksimaciju
- ovisno o problemu, linearni rezultat može biti gotovo jednako upotrebljiv kao i geometrijski
- linearne metode mogu se dramatično poboljšati kondicioniranjem (In Defense of the Eight-Point Algorithm, PAMI1997)

Kriteriji estimacije: x

Za radoznale, u slučaju pravca, kriterij g2 se da izraziti metodom PCA.

Program u Octave-u (dolje), te tri provučena pravca (desno)

```
A_alg=[1 6 1; 2 5 1; 3 7 1; 4 10 1];
A_g2=A_alg(:,1:2);
mu_g2=mean(A_g2);
A_g2_mu=A_g2 -  [1;1;1;1]*mu_g2;
[U_g2,D_g2,V_g2]=svd(A_g2_mu);
k_g2=V_g2(2,1)/V_g2(1,1)
l_g2=mu_g2(2)-k_g2*mu_g2(1)
```



	alg	g1	g2
$\hat{k}$	0.9	1.4	1.8
$\hat{l}$	5.0	3.5	2.4

Kriteriji estimacije: x

Statistički kriteriji estimacije

Pretpostavimo model $\mathcal{M}(\mathbf{p})$, npr, $\mathbf{p} = (k, l)$, te da na temelju mjerenja $\mathbf{o}$ (npr, $\mathbf{o} = \mathbf{y}$) želimo ocijeniti parametre modela $\mathbf{p}$

Statistički kriterij za vrednovanje $\mathbf{p}$: **maksimizirati** vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$ pod pretpostavkom $\mathcal{M}(\mathbf{p})$!

Uvjetnu vjerojatnost opažanja s obzirom na model nazivamo vjerodostojnošću modela:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Kriterij maksimalne vjerodostojnosti (MLE) izražavamo:

$$\widehat{\mathbf{p}}_{MLE} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p})$$

Kriteriji estimacije: x

Izvedimo MLE kriterij za provlačenje pravca kroz skup točaka

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} p(\mathbf{y}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Izrazimo gustoću vjerojatnosti pojedinačnog mjerenja y_i;
pretp. $y_i \sim \mathcal{N}(\overline{y_i}, \sigma)$) (**normalno distribuirani**, **nepristrani**):

$$p(y_i|\overline{y_i}) \sim e^{-\frac{(y_i-\overline{y_i})^2}{2\sigma^2}}$$

Izrazimo sada gustoću vjerojatnosti cijelog skupa mjerenja, pod pretpostavkama **jednake disperzije** i **nezavisnosti**:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{p},\mathbf{x}) \sim \prod_i e^{-\frac{(y_i-p_1\cdot x_i-p_2)^2}{2\sigma^2}}$$

Kriteriji estimacije: x

Logaritam vjerodostojnosti sada je:

$$\log \mathcal{L}(\mathbf{p}) \sim -(y_i - p_1 \cdot x_i - p_2)^2$$

Pravac koji maksimira vjerodostojnost sad je:

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} (-\log \mathcal{L}(\mathbf{p}))$$

Dolazimo do **ekvivalencije** geometrijskog i MLE kriterija!

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \|p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i\|$$

Geometrijski kriterij nije MLE, kad god se šum ne može opisati dekoreliranim i identičnim normalnim razdiobama!

Kriteriji estimacije: x

Kriterij MLE --- $\mathbf{p}$ maksimira uvjetnu vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$, neovisno o apriornoj vjerojatnosti parametara:

$$\mathcal{L}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Ako se $p(\mathbf{p})$ može modelirati, estimaciju možemo poboljšati!

Kriterij MAP --- $\mathbf{p}$ maksimira svoju posteriornu distribuciju:

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} p(\mathcal{M}(\mathbf{p})|\mathbf{o})$$

Gustoću vjerojatnosti $p(\mathbf{p}|\mathbf{o})$ kriterija MAP (max. a posteriori) dobivamo primjenom Bayesovog teorema:

$$P(M|O) = \frac{P(O|M)\,P(M)}{P(O)}$$

KRITERIJI ESTIMACIJE: X

U našem slučaju, u brojniku imamo **vjerodostojnost** i **apriornu vjerojatnost**, a u nazivniku **normalizacijski faktor**

$$p(\mathbf{p}|\mathbf{o}) = \frac{p(\mathbf{o}|\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})}{p(\mathbf{o})} \sim \mathcal{L}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

Konačan izraz za estimator MAP je:

$$\widehat{\mathbf{p}}_{MAP} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

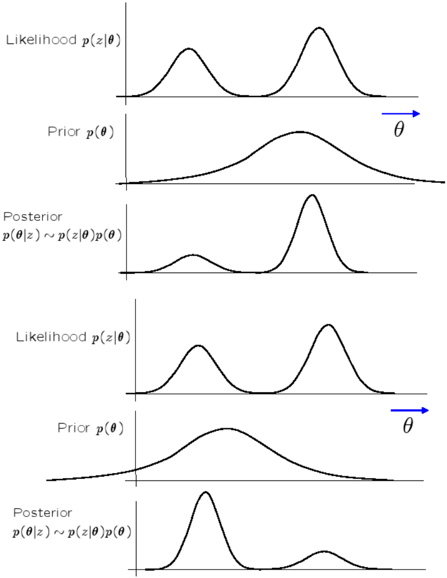
MLE: model = max p(slika|model)

MAP: model = max p(slika|model) · p(model)

Vidjeli smo klokana. Jesmo li u Australiji?

Vidjeli smo nešto što podsjeća na znak. Da li je pokraj ceste?

Kriteriji estimacije: x



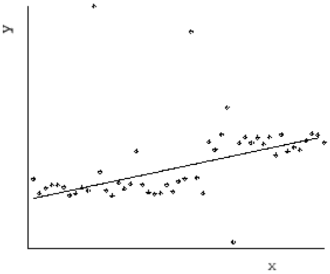
[Zisserman01]

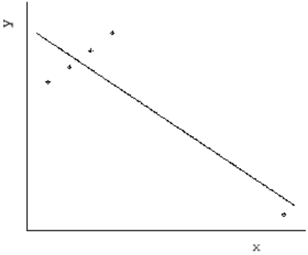
ROBUSNA ESTIMACIJA: X

Prisjetimo se **motivacije**:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju $\surd$
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma **statistički** povoljan $\surd$
3. vanpopulacijski parametri **ne ometaju** točan rezultat
   (to bismo sada, nažalost vrlo ukratko)

Zašto outlieri mogu biti problem [Stewart99]?





ROBUSNA ESTIMACIJA: X

Robusni pristupi u računalnom vidu:

1. Houghova transformacija
2. Evaluacija hipoteza dobivenih nad minimalnim slučajnim uzorkom
   Monte Carlo analiza, RANSAC, MLESAC, ***SAC, LMedSqr
3. Iterativno poboljšanje korištenjem robusnih normi:
   IRLS, M-estimacija

(I to je sve...)

Hvala na pažnji!

Pitanja?