

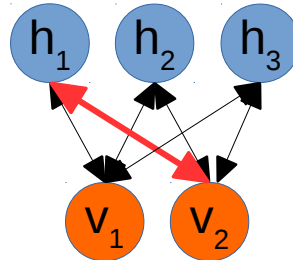
Generativni modeli

Zadaci za ispit

Marko Subašić
2017

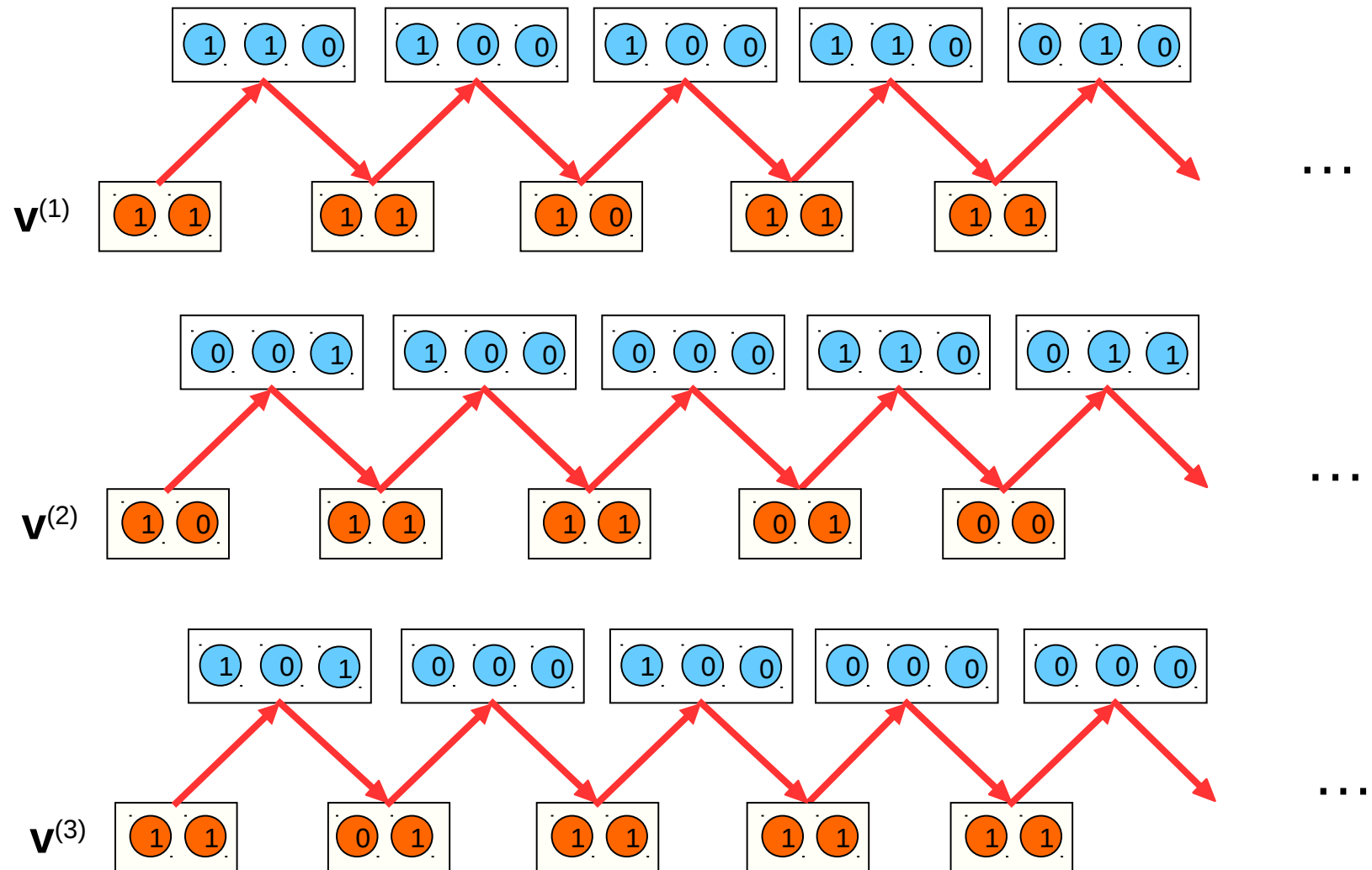
Ograničeni boltzmanov stroj

Zadatak: Za RBM s dva elementa u vidljivom i tri elementa u skrivenom sloju, izačunajte korekciju za težinu koja povezuje drugi element vidljivog sloja v i prvi element skrivenog sloja h (w_{21}). Koristite CD-2 algoritam.



Za trenutnu konfiguraciju matrice težina \mathbf{W} , pretpostavite rezultat Gibbsovog uzorkovanja za mini grupu od tri uzorka $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ i $\mathbf{v}^{(3)}$ prikazan na slijedećem slajdu. Koeficijent učenja neka je $\eta=0.1$.

Ograničeni boltzmanov stroj



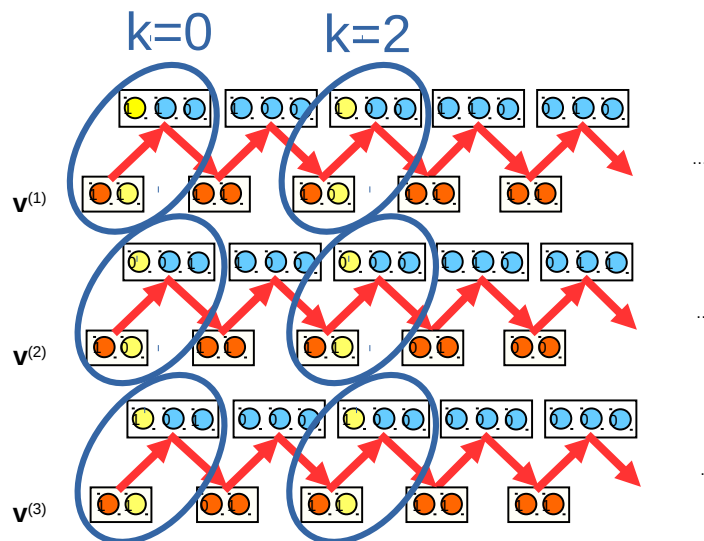
Ograničeni boltzmanov stroj

Rješenje:

- Izraz za korekciju težina za CD-2 je slijedeći:

$$\begin{aligned}\Delta w_{ij} &= \eta \left[\langle v_i^{(n)} h_j^{(n)} \rangle^0 - \langle v_i^{(n)} h_j^{(n)} \rangle^2 \right] \\ &= \eta \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_{i,k=0}^{(n)} h_{j,k=0}^{(n)} - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_{i,k=2}^{(n)} h_{j,k=2}^{(n)} \right] \\ &= \eta \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[v_{i,k=0}^{(n)} h_{j,k=0}^{(n)} - v_{i,k=2}^{(n)} h_{j,k=2}^{(n)} \right]\end{aligned}$$

- Za negativnu fazu bitan je samo par vidljivog i skrivenog sloja nakon dva ($k=2$) Gibbsova uzorkovanja



Ograničeni boltzmanov stroj

- Iz slike očitamo te uvrstimo

$v_{2,k=0}^{(1)} = 1$	$v_{2,k=0}^{(2)} = 0$	$v_{2,k=0}^{(3)} = 1$	$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 v_{2,k=0}^{(n)} h_{1,k=0}^{(n)} = \frac{1}{3} 2$	Pozitivna faza
$h_{1,k=0}^{(1)} = 1$	$h_{1,k=0}^{(2)} = 0$	$h_{1,k=0}^{(3)} = 1$		
$v_{2,k=2}^{(1)} = 0$	$v_{2,k=2}^{(2)} = 1$	$v_{2,k=2}^{(3)} = 1$	$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^3 v_{2,k=2}^{(n)} h_{1,k=2}^{(n)} = \frac{1}{3} 1$	Negativna faza
$h_{1,k=2}^{(1)} = 1$	$h_{1,k=2}^{(2)} = 0$	$h_{1,k=2}^{(3)} = 1$		

$$\Delta w_{21} = \eta \left[\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_{2,k=0}^{(n)} h_{1,k=0}^{(n)} - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N v_{2,k=2}^{(n)} h_{1,k=2}^{(n)} \right]$$

$$= 0.1 * [2/3 - 1/3] = \frac{1}{30} = \mathbf{0.03333}$$

Varijacijski autoenkoder

Zadatak: Ukoliko ulazni podaci predstavljaju npr. fotografije, uputno je da elementi izlaznog sloja imaju normalnu razdiobu $N(\mu, \sigma)$ s dijagonalnom kovarijacijskom matricom, gdje su μ i σ očekivanje i standardna devijacija. Izvedite izraz za komponentu funkcije cilja VAE:

$$E_{q_{\phi}(z|x^{(i)})}[\log(p_{\theta}(x^{(i)}|z))]$$

Pretpostavite da je veličina mini grupe dovoljno velika da je dovoljno samo jednom uzorkovati skriveni sloj.

Varijacijski autoenkoder

Rješenje:

- Ukoliko ćemo očekivanje u zadanom izrazu aproksimirati pomoću samo jednog uzorka skrivenog sloja, ono se svodi na slijedeći izraz

$$\mathbb{E}_{q_{\phi}(\mathbf{z}|\mathbf{x}^{(i)})}[\log(p(\mathbf{x}^{(i)}|\mathbf{z}))] \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \log(p_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}|\mathbf{z}^{(i,k)})) \approx \log(p_{\theta}(\mathbf{x}^{(i)}|\mathbf{z}^{(i)}))$$

- Za odabranu normalnu distribuciju, PDF jednog elementa vektora \mathbf{x} je:

$$p(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Varijacijski autoenkoder

- Zbog dijagonalne kovarijacijske matrice, združena vjerojatnost svih elemenata vektora \mathbf{x} je:

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) = p(x_1, x_2, \dots, x_J|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}) = \prod_{j=1}^J \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}$$

Uvrštavanjem u odabrani izraz očekivanja dobijamo:

$$\begin{aligned} \log(p(\mathbf{x}|\mathbf{z})) &= \log\left(\prod_{j=1}^J \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^J \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^J \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_j} e^{-\frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^J \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) + \log\left(\frac{1}{\sigma_j}\right) + \log\left(e^{-\frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^J -\log(\sqrt{2\pi}) - \log(\sigma_j) - \frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \\ &= -J \log(\sqrt{2\pi}) - \sum_j \log(\sigma_j) + \frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \end{aligned}$$

Varijacijski autoenkoder

- Dobiveni izraz je pribrojnik u funkcije cilja koja se maksimizira s obzirom na parametre distribucije.

$$\log(p(\mathbf{x}|\mathbf{z})) = -J \log(\sqrt{2\pi}) - \sum_j \log(\sigma_j) + \frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2}$$

- Konstantni član u izrazu nije podložan optimizaciji pa ga možemo eliminirati
- Konačni izraz za komponentu funkcije cilja tada je:

$$\begin{aligned}\log(p_\theta(\mathbf{x}|\mathbf{z})) &= -\sum_j \log(\sigma_j) + \frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \\ &= -\sum_j \frac{1}{2} \log(\sigma_j^2) + \frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_j \log(\sigma_j^2) + \frac{(x_j - \mu_j)^2}{\sigma_j^2}\end{aligned}$$

Varijacijski autoenkoder

Komentar:
$$\log(p_{\theta}(\mathbf{x}|\mathbf{z})) = -\frac{1}{2} \sum_j^J \log(\sigma_j^2) + \frac{(x_j - \mu_j)^2}{\sigma_j^2}$$

- Parametre normalnih distribucija, uz zadani skriveni sloj \mathbf{z} , modeliramo pomoću dekoderskog dijela čije parametre označavamo sa θ
- Ukoliko odabrani optimizator traži minimum funkcije cijene, funkciju cilja pretvaramo u funkciju cijene, promjenom predznaka

