

# Duboko učenje 1 - rješenje završnog ispita '22

Josip Šarić

Fakultet elektrotehnike i računarstva  
Sveučilište u Zagrebu  
Zagreb, Hrvatska

3. lipnja 2023.

## Zadatak 1

Binarni klasifikacijski model zadan je nizom slojeva:

- potpuno povezani sloj ( $\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ) s parametrima  $\mathbf{W}_1$  i  $\mathbf{b}_1$ ,
- normalizacija nad grupom (eng. *batchnorm*) bez afine transformacije,
- aktivacija zglobnicom,
- potpuno povezani sloj ( $\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ) s parametrima  $\mathbf{W}_2$  i  $\mathbf{b}_2$ ,
- te aktivacija sigmoidom.

Provedite jedan korak učenja modela gubitkom binarne unakrsne entropije za minigrupu sastavljenu od podataka  $\mathbf{x}^{(1)} = [1, 1]^T$  i  $\mathbf{x}^{(2)} = [-1, 3]^T$  s odgovarajućim točnim oznakama  $y^{(1)} = y^{(2)} = 1$ . Početne vrijednosti parametara modela su:  $\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{b}_1 = [0, 0]^T$ ,  $\mathbf{W}_2 = [1, 1]$ , te  $\mathbf{b}_2 = -1$ . Za izračun statistika koristite pristrane procjenitelje (hint:  $N$  u nazivniku). Prilikom unatražnog prolaza kroz sloj normalizacije nad grupom, statistike grupe promatrajte kao konstante. Pretpostavite da stopa učenja iznosi 1.

## Zadatak 1 - rješenje I

Unaprijedni prolaz kroz prvi potpuno povezani sloj:

$$\mathbf{h}_1^{(1)} = \mathbf{W}_1 \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{h}_1^{(2)} = \mathbf{W}_1 \mathbf{x}^{(2)} + \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

(3)

## Zadatak 1 - rješenje II

Statistike za normalizaciju po grupi:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}(\mathbf{h}_1^{(1)} + \mathbf{h}_1^{(2)}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{h}_1^{(1)} - \boldsymbol{\mu}\right)^2 + \left(\mathbf{h}_1^{(2)} - \boldsymbol{\mu}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

## Zadatak 1 - rješenje III

Normalizacija:

$$\hat{\mathbf{h}}_1^{(1)} = (\mathbf{h}_1^{(1)} - \boldsymbol{\mu}) \oslash \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{h}}_1^{(2)} = (\mathbf{h}_1^{(2)} - \boldsymbol{\mu}) \oslash \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Aktivacija zglobnicom:

$$\mathbf{h}_2^{(1)} = \text{ReLU}(\hat{\mathbf{h}}_1^{(1)}) = \text{ReLU}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{h}_2^{(2)} = \text{ReLU}(\hat{\mathbf{h}}_1^{(2)}) = \text{ReLU}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

## Zadatak 1 - rješenje IV

Unaprijedni prolaz kroz drugi potpuno povezani sloj:

$$s^{(1)} = \mathbf{W}_2 \mathbf{h}_2^{(1)} + b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (11)$$

$$s^{(2)} = \mathbf{W}_2 \mathbf{h}_2^{(2)} + b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (12)$$

Aktivacija sigmoidom:

$$p^{(1)} = \sigma(s^{(1)}) = 0.5 \quad (13)$$

$$p^{(2)} = \sigma(s^{(2)}) = 0.5 \quad (14)$$

$$(15)$$

Unatražni prolaz provest ćemo zasebno za svaki podatak. Prolaz kroz batchnorm ne predstavlja problem jer statistike smatramo konstantama.

## Zadatak 1 - rješenje V

Za prvi podatak... Gradijenti gubitka binarne unakrsne entropije po ulazima sigmoide:

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial s^{(1)}} = p^{(1)} - y^{(1)} = 0.5 - 1 = -0.5 \quad (16)$$

## Zadatak 1 - rješenje VI

Unatražni prolaz kroz drugi potpuno povezani sloj:

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{W}_2} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial s^{(1)}} \frac{\partial s^{(1)}}{\partial \mathbf{W}_2} = -0.5 \cdot \mathbf{h}_2^{(1)T} = [-0.5, 0] \quad (17)$$

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial b_2} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial s^{(1)}} \frac{\partial s^{(1)}}{\partial b_2} = -0.5 \cdot 1 = -0.5 \quad (18)$$

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{h}_2^{(1)}} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial s^{(1)}} \frac{\partial s^{(1)}}{\partial \mathbf{h}_2^{(1)}} = -0.5 \cdot \mathbf{W}_2 = [-0.5, -0.5] \quad (19)$$

$$(20)$$

Unatražni prolaz kroz aktivaciju zglobnicom:

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(1)}} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{h}_2^{(1)}} \frac{\partial \mathbf{h}_2^{(1)}}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(1)}} = [-0.5, -0.5] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [-0.5, 0] \quad (21)$$



## Zadatak 1 - rješenje VII

Unatražni prolaz kroz batchnorm ( $\mu$  i  $\sigma$  smatramo konstantama):

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(1)}} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(1)}} \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(1)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(1)}} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(1)}} \cdot \text{diag}(1/\sigma_i) = [-0.5, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-0.5, 0] \quad (22)$$

## Zadatak 1 - rješenje VIII

Gradijenti po parametrima prvog potpuno povezanog sloja:

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{W}_1} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(1)}} \frac{\partial \mathbf{h}_1^{(1)}}{\partial \mathbf{W}_1} = \dots = \left( \frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(1)}} \right)^T \left( \mathbf{x}^{(1)} \right)^T \quad (23)$$

$$= \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix} [1, 1] = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{b}_1} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(1)}} \frac{\partial \mathbf{h}_1^{(1)}}{\partial \mathbf{b}_1} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(1)}} \mathbf{I} = [-0.5, 0] \quad (25)$$

## Zadatak 1 - rješenje IX

Za drugi podatak... Gradijenti gubitka binarne unakrsne entropije po ulazima sigmoide:

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial s^{(2)}} = p^{(2)} - y^{(2)} = 0.5 - 1 = -0.5 \quad (26)$$

## Zadatak 1 - rješenje X

Unatražni prolaz kroz drugi potpuno povezani sloj:

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{W}_2} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial s^{(2)}} \frac{\partial s^{(2)}}{\partial \mathbf{W}_2} = -0.5 \cdot \mathbf{h}_2^{(2)T} = [0, -0.5] \quad (27)$$

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial b_2} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial s^{(2)}} \frac{\partial s^{(2)}}{\partial b_2} = -0.5 \cdot 1 = -0.5 \quad (28)$$

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{h}_2^{(2)}} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial s^{(2)}} \frac{\partial s^{(2)}}{\partial \mathbf{h}_2^{(2)}} = -0.5 \cdot \mathbf{W}_2 = [-0.5, -0.5] \quad (29)$$

$$(30)$$

Unatražni prolaz kroz aktivaciju zglobnicom:

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(2)}} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{h}_2^{(2)}} \frac{\partial \mathbf{h}_2^{(2)}}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(2)}} = [-0.5, -0.5] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, -0.5] \quad (31)$$

## Zadatak 1 - rješenje XI

Unatražni prolaz kroz batchnorm ( $\mu$  i  $\sigma$  smatramo konstantama):

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(2)}} \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(2)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1^{(2)}} \cdot \text{diag}(1/\sigma_i) = [0, -0.5] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0, -0.5] \quad (32)$$

## Zadatak 1 - rješenje XII

Gradijenti po parametrima prvog potpuno povezanog sloja:

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{W}_1} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}} \frac{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}}{\partial \mathbf{W}_1} = \dots = \left( \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}} \right)^T \left( \mathbf{x}^{(2)} \right)^T \quad (33)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix} [-1, 3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{b}_1} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}} \frac{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}}{\partial \mathbf{b}_1} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{h}_1^{(2)}} \mathbf{I} = [0, -0.5] \quad (35)$$

## Zadatak 1 - rješenje XIII

Parametre ažuriramo s uprosječenim gradijentom preko oba podatka.  
Primjerice:

$$\mathbf{W}_1^{\text{UPD}} = \mathbf{W}_1 - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\partial L^{(1)}}{\partial \mathbf{W}_1} + \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \mathbf{W}_1} \right] \quad (36)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \left[ \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \right] \quad (37)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$= \begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 \\ -0.25 & 1.75 \end{bmatrix} \quad (39)$$

## Zadatak 2

Razmatramo sustav za pretraživanje slika. Zadana su dvodimenzionalna metrička ugrađivanja skupa podataka u obliku matrice  $\mathbf{X}$ , te njihovi identiteti  $\mathbf{y}$ . Na ulaz sustava dolazi upit identiteta  $y_i = 1$ , za kojeg smo izračunali vektor ugrađivanja  $\mathbf{x}_i = [1, 1]^T$ . Zadaci:

- 1 Izračunajte sličnost podatka  $\mathbf{x}_i$  s ostalim podacima iz zadanog skupa, ako za mjeru sličnosti koristimo recipročnu vrijednost L1 udaljenosti vektora ugrađivanja.
- 2 Koristeći izračunate sličnosti skicirajte krivulju preciznosti i odziva za zadani upit i odredite prosječnu preciznost (AP).

$$\text{Zadano je: } \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ -0.5 & 0.5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



## Zadatak 2 - rješenje I

L1 udaljenost  $x_i$  od  $X_1$ :  $d(x_i, X_1) = |1 - 1| + |1 - 0| = 1$

Prema zadatku sličnost je recipročna L1 udaljenost:

$$s(x_i, X_1) = \frac{1}{d(x_i, X_1)} = 1$$

Slično napravimo i za ostale podatke i sličnosti zapišemo u matricu  $S$ :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/(|1 - 3| + |1 - (-1)|) & & \\ & 1/(|1 - (-0.5)| + |1 - 0.5|) & & \\ & & 1/(|1 - 1| + |1 - 4|) & \\ & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1/4 & & \\ & 1/2 & & \\ & & 1/3 & \\ & & & & \end{bmatrix} \quad (40)$$

## Zadatak 2 - rješenje II

Rangirajmo sada podatke iz  $X$  prema sličnosti s podatkom  $x_i$  (u eksponent ćemo zapisati 1 ako je podatak istog razreda kao  $x_i$ , a 0 inače):  
[ $X_1^1, X_3^0, X_4^1, X_2^1$ ]

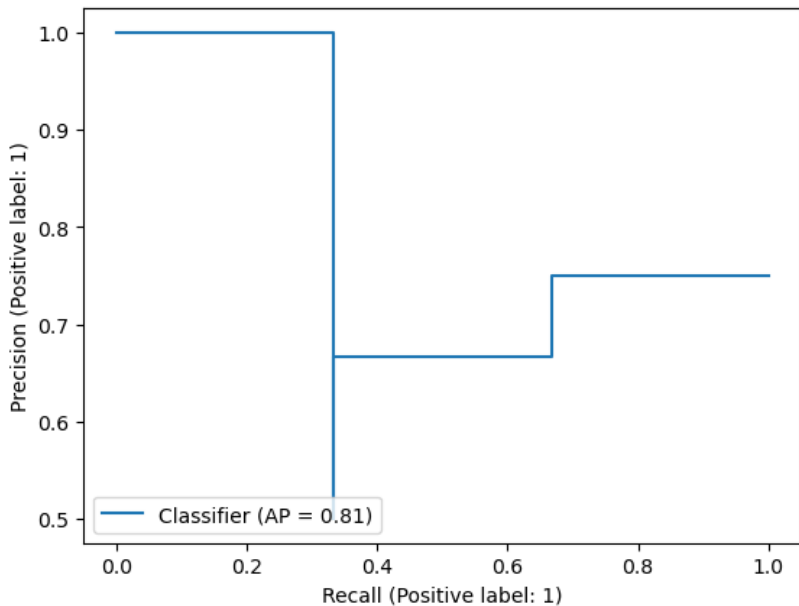
Sada postavljamo prag na svaki podatak i računamo preciznost  $P=TP/(TP+FP)$  i odziv  $R=TP/(TP+FN)$

pozitivne predikcije	TP	FP	FN	P	R
$X_1, X_3, X_4, X_2$	3	1	0	0.75	1.0
$X_1, X_3, X_4$	2	1	1	0.66	0.66
$X_1, X_3$	1	1	2	0.5	0.33
$X_1$	1	0	2	1.0	0.33

## Zadatak 2 - rješenje III

Za niti jedan prag nemamo  $R=0$ . Zato dogovorno dodajemo točku ( $R=0$ ,  $P$ =preciznost za najmanji  $R$ ). Ako za isti  $R$  imamo više  $P$ -ova — smijemo izabrati bolji.

## Zadatak 2 - rješenje IV



## Zadatak 3

Razmatramo konvolucijski klasifikacijski model zadan nizom slojeva:

- 1D konvolucija bez nadopunjavanja s korakom 1, s dvije jezgre  $w_{11} = [1, 0, -1]^T$  i  $w_{12} = [1, 1, -1]^T$  bez pomaka,
- aktivacija zglobnicom,
- globalno sažimanje prosjekom,
- potpuno povezani sloj s parametrima  $W_2 = \begin{bmatrix} \ln 2 & 0 \\ 0 & \ln 2 \end{bmatrix}$  i  $b_2 = [0, \ln 2]^T$ ,
- te aktivacija softmaxom.

Na ulazu modela nalazi se podatak  $x = [4, -1, 2, 0, 1]^T$  koji pripada razredu  $y = 1$ . Zadaci:

- 1 Napravite unaprijedni prolaz kroz model za zadani podatak  $x$ .
- 2 Izračunajte gradijent gubitka unakrsne entropije po parametrima konvolucijskog sloja.

## Zadatak 3 - rješenje I

Unaprijedni prolaz kroz konvolucijski sloj:

$$\mathbf{h}_{11} = \mathbf{x} \star \mathbf{w}_{11} = [4, -1, 2, 0, 1]^T \star [1, 0, -1]^T = [2, -1, 1]^T \quad (41)$$

$$\mathbf{h}_{12} = \mathbf{x} \star \mathbf{w}_{12} = [4, -1, 2, 0, 1]^T \star [1, 1, -1]^T = [1, 1, 1]^T \quad (42)$$

$$(43)$$

Aktivacija zglobnicom:

$$\mathbf{h}_{21} = \text{ReLU}(\mathbf{h}_{11}) = \text{ReLU}([2, -1, 1]^T) = [2, 0, 1]^T \quad (44)$$

$$\mathbf{h}_{22} = \text{ReLU}(\mathbf{h}_{12}) = \text{ReLU}([1, 1, 1]^T) = [1, 1, 1]^T \quad (45)$$

$$(46)$$

## Zadatak 3 - rješenje II

Sažimanje prosjekom (zasebno za svaku mapu značajki):

$$h_{31} = \text{AVG}(\mathbf{h}_{21}) = \text{AVG}([2, 0, 1]^T) = 1 \quad (47)$$

$$h_{32} = \text{AVG}(\mathbf{h}_{22}) = \text{AVG}([1, 1, 1]^T) = 1 \quad (48)$$

$$(49)$$

Vratimo to u jedan vektor prije potpuno povezanog sloja:

$$\mathbf{h}_3 = [h_{31}, h_{32}]^T = [1, 1]^T \quad (50)$$

## Zadatak 3 - rješenje III

Unaprijedni prolaz kroz potpuno povezani sloj:

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}_2 \mathbf{h}_3 + \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} \ln 2 & 0 \\ 0 & \ln 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \ln 2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$= \begin{bmatrix} \ln 2 \\ 2 \ln 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln 2 \\ \ln 4 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$(53)$$

Aktivacija softmaksom:

$$\mathbf{p} = \text{softmax}(\mathbf{s}) = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad (54)$$

Unatražni prolaz:



## Zadatak 3 - rješenje IV

Gradijent unakrsne entropije po ulazima softmaxa:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{p}^T - \mathbf{y}_{oh}^T = [1/3, 2/3] - [0, 1] = [1/3, -1/3] \quad (55)$$

Unatražni prolaz kroz potpuno povezani sloj (gradijent po parametrima se ne traži):

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_3} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{h}_3} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{W}_2 = [1/3, -1/3] \begin{bmatrix} \ln 2 & 0 \\ 0 & \ln 2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$= \ln 2 \cdot [1/3, -1/3] \quad (57)$$

## Zadatak 3 - rješenje V

Unatražni prolaz kroz globalno sažimanje prosjekom:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_{21}} = \frac{\partial L}{\partial h_{31}} \frac{\partial h_{31}}{\partial \mathbf{h}_{21}} = \ln 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right] = \frac{\ln 2}{9} \cdot [1, 1, 1] \quad (58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_{22}} = \frac{\partial L}{\partial h_{32}} \frac{\partial h_{32}}{\partial \mathbf{h}_{22}} = -\ln 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right] = -\frac{\ln 2}{9} \cdot [1, 1, 1] \quad (59)$$

Unatražni prolaz kroz aktivaciju zglobnicom:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_{11}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_{21}} \frac{\partial \mathbf{h}_{21}}{\partial \mathbf{h}_{11}} = \frac{\ln 2}{9} \cdot [1, 1, 1] \odot [1, 0, 1] = \frac{\ln 2}{9} \cdot [1, 0, 1] \quad (60)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_{12}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_{22}} \frac{\partial \mathbf{h}_{22}}{\partial \mathbf{h}_{12}} = -\frac{\ln 2}{9} \cdot [1, 1, 1] \odot [1, 1, 1] = -\frac{\ln 2}{9} \cdot [1, 1, 1] \quad (61)$$

## Zadatak 3 - rješenje VI

Gradijenti po težinama konvolucije:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}_{11}} = \mathbf{x} \star \frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_{11}} = [4, -1, 2, 0, 1] \star \left( \frac{\ln 2}{9} \cdot [1, 0, 1] \right) \quad (62)$$

$$= \frac{\ln 2}{9} [6, -1, 3] \quad (63)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}_{12}} = \mathbf{x} \star \frac{\partial L}{\partial \mathbf{h}_{12}} = [4, -1, 2, 0, 1] \star \left( \frac{-\ln 2}{9} \cdot [1, 1, 1] \right) \quad (64)$$

$$= \frac{-\ln 2}{9} [5, 1, 3] \quad (65)$$

## Zadatak 3 - kod u torchu za provjeru

```
import torch
import numpy as np

x = torch.tensor([4, -1, 2, 0, 1.]).view(1, 1, 5)
w1 = torch.tensor([1, 0, -1, 1, 1, -1.], requires_grad=True)
w1 = w1.view(2, 1, 3)
W2 = torch.tensor([np.log(2.), 0, 0, np.log(2.)]).view(2, 2).float()
b2 = torch.tensor([[0], [np.log(2)]])

h1 = torch.nn.functional.conv1d(x, w1)
h2 = torch.relu(h1)
h3 = torch.mean(h2, dim=-1)

s = W2 @ h3.view(2, 1) + b2
p = s.softmax(dim=0)
L = -p[1].log()

w1.retain_grad()
L.backward()
print(w1.grad)
```

## Zadatak 4

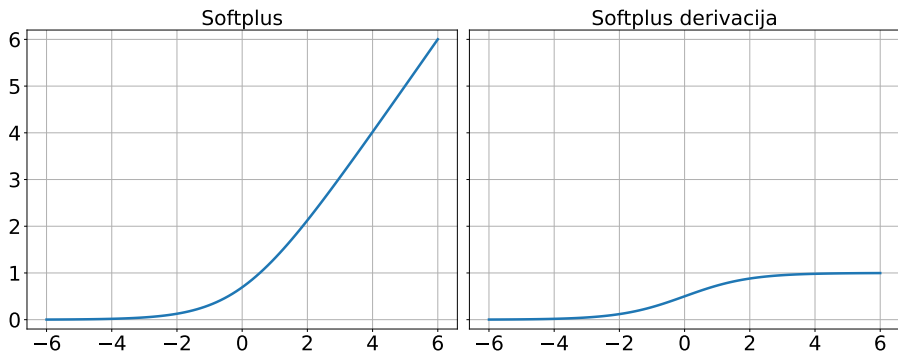
Razmatramo aktivacijsku funkciju  $\text{softplus}(x) = \ln(1 + e^x)$ . Zadaci:

- 1 Skicirajte graf zadane funkcije i njene derivacije.
- 2 Napišite jakobijan aktivacije zadanom funkcijom za 4-dimenzionalni ulaz.
- 3 Za zadanu aktivacijsku funkciju implementirajte sučelje `Layer` po uzoru na drugu laboratorijsku vježbu. Implementirani sloj treba moći raditi s tenzorima različitih redova i dimenzija. Ulaz u funkciju `forward` bit će tipa `np.ndarray`.

## Zadatak 4 - rješenje I

Aktivacijska funkcija:  $\text{softplus}(x) = \ln(1 + e^x)$

Derivacija aktivacijske funkcije:  $\text{softplus}'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$



## Zadatak 4 - rješenje II

Aktivacijsku funkciju na vektor primjenjujemo na svaki element zasebno:

$$\mathbf{y} = \text{softplus}(\mathbf{x}) \quad (66)$$

$$[y_1, y_2, y_3, y_4]^T = [\text{softplus}(x_1), \text{softplus}(x_2), \text{softplus}(x_3), \text{softplus}(x_4)]^T \quad (67)$$

Zbog toga imamo dijagonalni jakobijan:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{e^{x_1}}{1+e^{x_1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{x_2}}{1+e^{x_2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{x_3}}{1+e^{x_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{x_4}}{1+e^{x_4}} \end{bmatrix} \quad (68)$$

## Zadatak 4 - rješenje III

```
class Softplus(Layer):  
    def forward(x):  
        self.exp_inputs = np.exp(x)  
        return np.log(self.exp_inputs + 1)  
  
    def backward_inputs(grad):  
        return grad * (self.exp_inputs / (self.exp_inputs + 1))  
  
    def backward_params(grad):  
        # nema  
        pass
```



## Zadatak 5 I

Potrebno je oblikovati model obične povratne neuronske mreže s prijenosnom funkcijom zglobnice za evidentiranje promjene stanja bankovnog računa. Za taj zadatak koristit ćete trodimenzionalni vektor skrivenog stanja, pri čemu će se u prvom elementu pamtiti ukupan iznos dostupan za isplatu (pozitivno stanje računa + dopušteno prekoračenje), na drugom elementu će biti zapisano dopušteno prekoračenje, dok treći element služi kao zastavica koja provjerava je li račun u “minusu” (0 ako je, bilo koja pozitivna vrijednost inače). Slučajem u kojem korisnik prekorači dozvoljeni minus na računu se trenutačno nećemo baviti. Početno skriveno stanje računa testnog korisnika je:

$$\mathbf{h}^{(0)} = \begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 765 \end{bmatrix}$$

## Zadatak 5 II

Dvodimenzionalni ulazni vektori mreže sadrže iznos uplate na prvom elementu, te iznos isplate na drugom elementu.

- 1 Odredite preostale parametre povratne neuronske mreže ( $W_{hh}$ ,  $W_{xh}$ ,  $b_h$ ) kako bi mreža obavljala navedenu funkcionalnost.
- 2 Provedite unaprijedni prolaz povratne neuronske mreže s navedenim parametrima za iduće ulaze:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 3500 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4000 \end{bmatrix}$$

- 3 Razmatramo pristup istome problemu s dvoslojnom LSTM mrežom, uz jednake dimenzionalnosti ulazne reprezentacije i skrivenog stanja. Odredite ukupan broj parametara takve mreže.

## Zadatak 5 - rješenje I

Parametri:

$$\mathbf{W}_{hh} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_{xh} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_h = \mathbf{0}$$

Unaprijedni prolaz za zadane ulaze:

Općenita jednačba ažuriranja stanja:

$$\mathbf{h}^{(t)} = \text{ReLU}\left(\mathbf{W}_{hh}\mathbf{h}^{(t-1)} + \mathbf{W}_{xh}\mathbf{x}^{(t)} + \mathbf{b}_h\right) \quad (69)$$

## Zadatak 5 - rješenje II

Prvi vremenski korak:

$$\mathbf{h}^{(1)} = \text{ReLU} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10000 \\ 5000 \\ 765 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (70)$$

$$= \begin{bmatrix} 11000 \\ 5000 \\ 6000 \end{bmatrix} \quad (71)$$

## Zadatak 5 - rješenje III

Drugi vremenski korak:

$$\mathbf{h}^{(2)} = \text{ReLU} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11000 \\ 5000 \\ 6000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 3500 \end{bmatrix} \right) \quad (72)$$

$$= \begin{bmatrix} 8500 \\ 5000 \\ 3500 \end{bmatrix} \quad (73)$$

## Zadatak 5 - rješenje IV

Treći vremenski korak:

$$\mathbf{h}^{(2)} = \text{ReLU} \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8500 \\ 5000 \\ 3500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4000 \end{bmatrix} \right) \quad (74)$$

$$= \begin{bmatrix} 4500 \\ 5000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

Broj parametara LSTM-a je četiri puta veći od obične povratne ćelije:

$$4 \cdot (3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2) = 68$$