

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

SEMINAR

Kalmanov filter

Šime Bašić

Voditelj: *Siniša Šegvić*

Zagreb, travanj, 2010

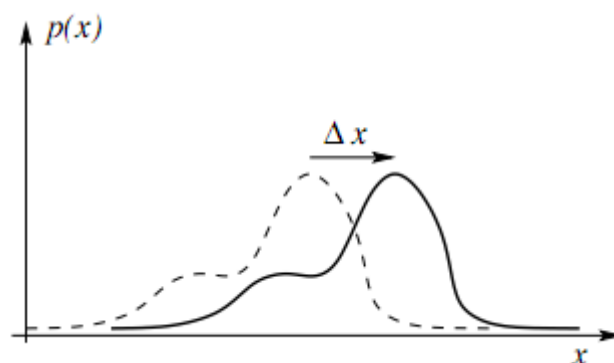
Sadržaj

Uvod	1
1.Rekurzivno estimiranje stanja	5
2.Jednadžbe Kalmanovog filtra	9
3.Proširenja Kalmanovog filtra (EKF)	14
4.Primjene za praćenje prometnog traka	18
4.1. Estimacija pozicije prometnog traka	18
4.2. Estimacija razdiobe vjerojatnosti pravocrtnih segmenata linije traka.....	25
Zaključak	34
Literatura	35
Sažetak.....	37

Uvod

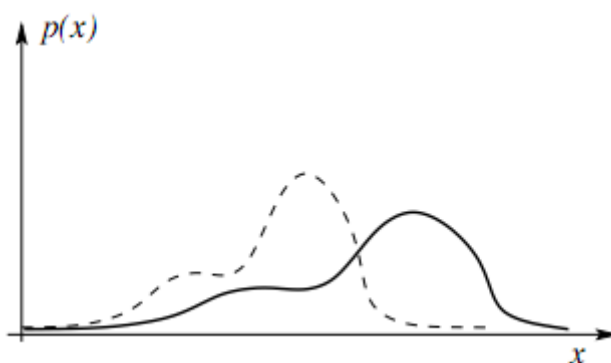
U robotici je često potrebno estimirati stanje u kojem je robot trenutno, odnosno odrediti vrijednosti određenih varijabli potrebnih robotu kako bi odredio stanje svijeta u kojem se nalazi. Te vrijednosti nisu direktno uočljive, nego ih je potrebno procijeniti posrednim tehnikama. Često te posredne tehnike opisuju preciznost informacije o položaju robota funkcijom vjerojatnosti. Algoritmi vjerojatnosne procjene stanja računaju gustoću vjerojatnosti nad svim mogućim stanjima procesa u kojima se objekt može naći u trenutnom koraku. Kretanje robota podliježe nekim fizikalnim zakonima i kao takvo se može aproksimirati odgovarajućim modelom gibanja objekta. Ocjena pozicije robota se najčešće obavlja kroz vremenski diskretne iteracije gdje svaka iteracija uključuje dva uobičajena koraka. Prvi korak je predikcija gdje se na temelju modela gibanja uz primjenu procijenjenih podataka iz prethodnog koraka predviđa novi položaj objekta. U drugom koraku se predviđeno stanje ažurira na temelju pribavljenog mjerenja. Nakon prvog koraka se funkcija gustoće vjerojatnosti (dalje u tekstu f.g.v.), koja govori koliko je vjerojatno da je neko stanje jednako trenutnom stanju, pomiče prema modelu gibanja objekta, ali se njena varijanca povećava jer model nije apsolutno precizan. Neprecizan model unatoč povećanju varijance može biti koristan, npr. kad je gibanje robota opisano konstantnom brzinom prikladno je uvesti slučajni šum kojim će se opisati ubrzanje i usporavanje robota jer je realno da se robot iz trenutne pozicije x_0 neće nakon protoka vremena Δt naći točno na poziciji $x_1 = x_0 + v_{const} \Delta t$, već će zbog mogućih prepreka na putu ili reljefa puta doživjeti usporanja, odnosno ubrzanja pa će konačna pozicija \hat{x}_1 biti različita od pozicije x_1 dobivene idealnim modelom. Nakon drugog koraka ukupna varijanca se

smanjuje jer mjerenje donosi informaciju. Problem je što su mjerenja dobivena iz senzora često parcijalna, nepotpuna i gotovo uvijek sadrže određeni stupanj šuma. U estimaciji stanja procesa cilj je dobiti pouzdane vrijednosti varijabli stanja procesa optimirajući ih podacima dobivenima iz senzorskih očitavanja. Kod kretanja robota potrebno je uvesti sljedeće varijable: varijablu stanja koja opisuje predviđanje stanja u kojem se robot trenutno nalazi, varijablu akcije koju je robot prethodno poduzeo i varijablu procjene očitavanja senzora dobivenu iz estimacije trenutnog stanja. Te varijable stanja i mjerenja se često modeliraju kao slučajne varijable koje se ponašaju prema određenoj f.g.v. koja je u slučaju Kalmanovog filtra Gaussova f.g.v. normalne razdiobe. Okruženje robota je dinamičan sustav koji ima svoje unutarnje stanje. Robot je opremljen sensorima kojima prikuplja informacije iz okoline, a pomoću svojih aktuatora vrši akcije nad tim okruženjem čime mijenja stanje tog okruženja, ali paralelno i vlastito uvjerenje o stanju tog okruženja. Na primjeru jednodimenzionalnog kretanja robota može se vidjeti vjerojatnosno modeliranje preciznosti informacije o položaju robota (Slika 1). Primjer je pregled općenitog pristupa primjene filtara u estimaciji stanja procesa pa ne ilustrira primjenu nekog specifičnog filtra kao što je to Kalmanov filter.



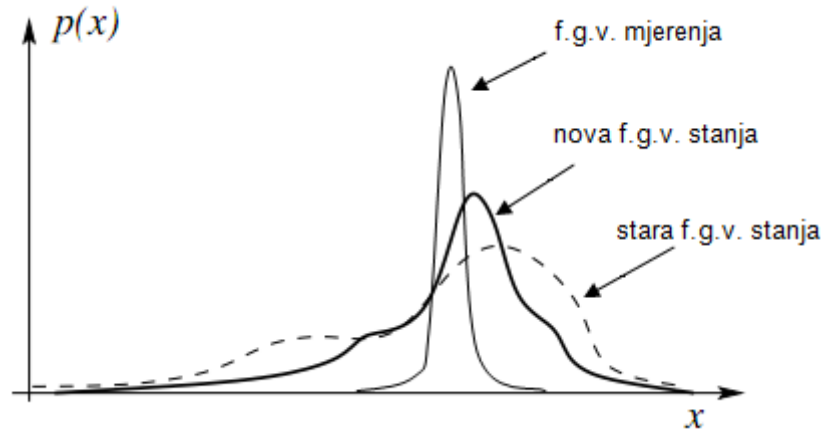
Slika 1: pomicanje f.g.v. uslijed pomicanja robota [2]

Na slici 1, vrijednost na osi apscisa nad kojom se nalazi najveća vrijednost f.g.v. predstavlja najbolju estimaciju položaja robota. F.g.v. opisana crtkanom linijom predstavlja najbolju estimaciju pozicije robota x u prethodnom trenutku. Zbog pomicanja objekta za Δx prema modelu gibanja pomiče se i f.g.v. jer u novom trenutku će se robot nalaziti na nekoj drugoj poziciji na kojoj bi se onda najvjerojatnije trebao nalaziti i maksimum f.g. vjerojatnosti.



Slika 2: povećanje varijance f.g.v. zbog nesigurnosti modela [2]

Na slici 2, f.g.v. opisana punom linijom predstavlja najbolju estimaciju pozicije robota x u sljedećem trenutku dobivenu na temelju dinamičkog modela gibanja robota i prethodne estimacije opisane crtkanom linijom. Varijanca f.g.v. opisane punom linijom se je povećala u odnosu na varijancu f.g.v. opisane crtkanom linijom proporcionalno kretanju robota zbog nesigurnosti modela procesa.



Slika 3: smanjenje konačne varijance nakon dobivanja nove informacije [2]

Nakon uzimanja mjerenja f.g.v. opisana crtkanom linijom prelazi u novu f.g.v. na način da joj se smanjuje varijanca zbog nove informacije koju nosi mjerenje, odnosno f.g.v. mjerenja (Slika 3).

1.Rekurzivno estimiranje stanja

Evoluciju stanja i mjerenja kroz vrijeme opisujemo vjerojatnosnim zakonima. Stanje x_t u vremenskom trenutku t će biti stohastička posljedica stanja x_{t-1} u prethodnom trenutku. Buduće stanje u trenutku t je uvjetovano svim prošlim stanjima, mjerenjima i kontrolnim signalima pa ga izražavamo funkcijom gustoće uvjetne vjerojatnosti:

$$p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) \quad (1)$$

Pretpostavka je da objekt prvo vrši kontrolnu akciju u_t , a zatim pribavlja mjerne rezultate stanja z_t . Ako je stanje x kompletno onda je ono dovoljan zbroj svega onoga što se je dogodilo u prethodnim trenucima. Kompletno stanje je stanje koje je najbolji estimator budućeg stanja procesa, odnosno stanje kojemu nisu potrebni nikakvi podatci iz prošlosti kako bi donio precizniju odluku o budućem stanju procesa. Procesi čija stanja su kompletna sukladno navedenoj definiciji [10] zovu se Markovljevi procesi. Kako je u stvarnosti gotovo nemoguće dobiti vrijednosti svih varijabli kojima bi najpreciznije procijenili budućnost onda se u praksi najčešće radi o nekompletnim stanjima [10]. Uz pretpostavku da je x kompletno stanje iz izraza (1) izbacujemo sve prošle kontrolne signale $u_{1:t-1}$ i sva prošla mjerenja $z_{1:t-1}$ od trenutka 1 do $t-1$:

$$p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t) \quad (2)$$

Ova osobina Markovljevih procesa se može opisati terminom *uvjetna nezavisnost* gdje je jedna grupa varijabli nezavisna u odnosu na drugu ako su poznate vrijednosti treće grupe varijabli. Jednadžba (2)

kaže da se stanje s vremenom mijenja pod utjecajem kontrolnog signala u . Na sličan način se može rezultat mjerenja z_t izraziti stohastički ovisno o svim prošlim stanjima (uključujući i stanje x_t) te o svim dotadašnjim kontrolnim signalima i mjerenjima:

$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) \quad (3)$$

Pod pretpostavkom da je stanje x_t kompletno izraz (3) se može redefinirati kao:

$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t | x_t) \quad (4)$$

Jednadžba (4) opisuje vjerojatnosne zakone prema kojima su mjerenja generirana stanjem x_t . Robot iz uvodnog primjera ne može točno saznati svoje pravo stanje, već on posjeduje vlastito vjerovanje (*bel*) [10] o svome pravom stanju. Distribucija vjerojatnosti vjerovanja je predstavljena kroz uvjetnu vjerojatnost na način da je svakom mogućem stanju pridružena određena vjerojatnost koja kaže koliko je vjerojatno da je baš ono jednako stvarnom stanju. Te vjerojatnosti su uvjetovane svim prošlim mjerenjima i kontrolnim signalima:

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t}) \quad (5)$$

Slično, može se definirati vjerovanje robota uvjetovano istim podacima, ali bez zadnjeg mjerenja z_t :

$$\overline{bel}(x_t) = p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t}) \quad (6)$$

Jednadžba (6) se može nazvati predikcija jer se njome predviđa stanje procesa na temelju aposteriorne vjerojatnosti iz *prethodnog* trenutka bez uzimanja u obzir najnovije mjerenje z_t . Računanje $bel(x_t)$ iz

$\overline{bel}(x_t)$ se naziva korekcija koja se obavlja na temelju mjerenja z_t .

Rekurzivno estimiranje stanja je proces u kojem se za procjenu trenutnog stanja koristi aposteriorna procjena iz prethodnog koraka. Najopćenitiji algoritam za rekurzivnu estimaciju je Bayesov filter dan sljedećim pseudokodom [10]:

```

Bayesov _ filter(bel(xt-1), ut, zt) :
  za _ sve _ xt _ radi _ sljedece
     $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$  → predikcija
     $bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$  → korekcija
  gotovo
  vrati _ bel(xt)
  
```

Ulaz u rekurzivni Bayesov algoritam je aposteriorna estimacija stanja iz prethodnog koraka, akcija koju je robot napravio u trenutnom koraku u_t i mjerenje z_t dobiveno u trenutku t nakon obavljene akcije u_t . U prvom izrazu unutar petlje estimira se apriorno vjerovanje robota u trenutku t , ali bez uzimanja u obzir mjerenja z_t . Apriorna vjerojatnost svakog mogućeg stanja se računa na način da se u integralu zbrajaju umnošci aposteriorne vjerojatnosti svih stanja iz koraka $t-1$ i uvjetne vjerojatnosti da proces iz stanja x_{t-1} uz akciju u_t prelazi u stanje x_t . Prvi izraz unutar petlje je jednak jednadžbi (7) za općeniti slučaj koja kaže kolika je apriorna vjerojatnost $p(x)$ ako uzmemo u obzir apriorne vjerojatnosti svih mogućih pojavljivanja y te izračunamo vjerojatnost pojavljivanja x -a uz uvjet da se realizirao odgovarajući y .

$$p(x) = \int_y p(x | y) p(y) dy \quad (7)$$

Izraz (7) dolazi iz Bayesovog teorema (8):

$$p(A | B) = \frac{p(A, B)}{p(B)} = \frac{p(B | A)p(A)}{p(B)} = \frac{p(B | A)p(A)}{\int_A p(B | A)p(A)dA} \quad (8)$$

U drugom izrazu unutar petlje se vrši korekcija apriornog vjerovanja s mjerenjem z_t na način da se apriorna vjerojatnost svakog stanja x_t množi s vjerojatnosti da je upravo to stanje generiralo mjerenje z_t . Nakon što petlja prođe po svim stanjima, funkcija vraća aposteriornu vjerojatnost za trenutak t . Ta povratna vrijednost je uz akciju robota u_{t+1} u trenutku $t+1$ i mjerenje dobiveno u stanju x_{t+1} ulaz u sljedeći poziv Bayesovog filtra. Na taj način se rekurzivno poziva Bayesov algoritam s ulaznim aposteriornim vjerojatnostima iz prethodnog koraka gdje će rezultat poziva biti ponovno ulaz u sljedeću iteraciju.

2. Jednadžbe Kalmanovog filtra

Godine 1960. je R. E. Kalman opisao optimalno rekurzivno rješenje linearnog filtriranja diskretnih podataka. Od tada je Kalmanov filter postao objekt iscrpnih istraživanja u autonomnoj i potpomognutoj navigaciji. Kalmanov filter omogućava efikasno izračunavanje stanja diskretnog linearnog procesa uz minimiziranje srednje kvadratne pogreške pod pretpostavkom da je f.g.v. svih prisutnih šumova Gaussovog zvonolikog oblika te da su svi šumovi bijeli. Dodatno moraju vrijediti pretpostavke da su modeli procesa i mjerenja linearne funkcije te da je aposteriorna f.g.v. Gaussova normalna razdioba. Filter je rekurzivan pa se nova mjerenja mogu procesirati odmah nakon uzorkovanja. Također podržava estimaciju prošlih, sadašnjih i budućih stanja čak i kada nije poznat precizan model procesa. Ovdje ćemo predstaviti diskretni oblik Kalmanovog filtra koji je pogodan za implementaciju na digitalnom računalu (postoje i kontinuirani oblici Kalmanovog filtra, zanimljiviji u pogledu teorijske rasprave jer nisu ostvarivi na digitalnom računalu).

Kalmanov filter rješava problem estimacije stanja $x \in R^n$ procesa koji se odvija u diskretnom vremenu (dalje u tekstu diskretni proces) prema sljedećoj linearnoj stohastičkoj jednadžbi:

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k \quad (9)$$

Linearna stohastička jednadžba dobivanja mjernih rezultata je:

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (10)$$

gdje vektor $z \in R^m$ predstavlja dobiveno mjerenje. x_k je stanje procesa u vremenskom trenutku k . Slučajne varijable w_k i v_k predstavljaju procesni i mjerni šum. Pretpostavka je da su ta dva šuma bijeli šumovi, međusobno nezavisni čija je f.g.v. jednaka funkciji gustoće normalne razdiobe:

$$p(w_k) \sim N(0, Q_k), \quad (11)$$

$$p(v_k) \sim N(0, R_k) \quad (12)$$

U praksi je moguće da se kovarijantne matrice Q_k i R_k mijenjaju u svakom vremenskom trenutku, ali će se pretpostaviti da su konstantne pa ćemo ih dalje označavati kao Q , odnosno R . Matrica A_k povezuje stanje u trenutku $k-1$ sa stanjem u trenutku k u slučaju nepostojanja kontrolnog signala ili procesnog šuma. Matrica B_k povezuje opcionalni kontrolni signal $u \in R^l$ sa stanjem x_k . Matrica H_k veličine $m \times n$ povezuje stanje x_k sa mjernim rezultatom z_k . U daljnjem tekstu će se pretpostaviti da su matrice A_k , B_k i H_k konstantne. Sada će biti opisan postupak računanja stanja x u trenutku k . Neka je $\hat{x}_k^- \in R^n$ apriorna estimacija stanja u koraku k izračunata samo na temelju znanja procesa prije trenutka k . Neka je $\hat{x}_k^+ \in R^n$ aposteriorna estimacija stanja u koraku k izračunata uz poznavanje mjerenja z_k . Mogu se definirati greške apriorne i aposteriorne estimacije kao:

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-, \quad (13)$$

$$e_k^+ = x_k - \hat{x}_k^+ \quad (14)$$

Kovarijanca greške apriorne estimacije je dana sljedećim izrazom:

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (15)$$

Kovarijanca greške aposteriorne estimacije je:

$$P_k^+ = E[e_k^+ e_k^{+T}] \quad (16)$$

Aposteriornu estimaciju stanja je moguće dobiti kao linearnu kombinaciju apriorne estimacije i otežane razlike dobivenog mjerenja i estimacije mjerenja sljedećim izrazom:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (17)$$

Razlika u gornjem izrazu se naziva inovacija te opisuje neslaganje procijenjenog i dobivenog mjerenja. Matrica K veličine $n \times m$ je izabrana na način da minimizira kovarijancu greške aposteriorne estimacije. Matricu K je moguće dobiti tako da se izraz (17) ubaci u jednadžbu očekivanja kovarijance greške aposteriorne estimacije (16). Taj izraz se zatim derivira po K , izjednači sa 0 i izvuče se najbolja vrijednost matrice K . Tako dobivena matrica jednaka je sljedećem:

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} = \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + R} \quad (18)$$

Gledajući matricu K može se zaključiti da će približavanjem kovariantne matrice mjernog šuma R nuli, matrica K postajati sve veća tako da će davati veći udio inovaciji u izračunu aposteriorne estimacije. To je razumljivo jer smanjenje matrice R znači da je mjerni proces sigurniji i da bi njegove rezultate trebalo jače uzeti u izračun konačne estimacije stanja.

$$\lim_{R_k \rightarrow 0} K_k = H^{-1} \quad (19)$$

S druge strane, ako se kovarijanca greške apriorne estimacije približava 0, matrica K će postajati sve manja i davati će sve manji udio inovaciji u izračunu aposteriorne estimacije. To je jasno jer ako je P_k^- mala onda je točnost apriorne estimacija dobra i nije potrebno mjerenje uzimati previše u obzir.

$$\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0 \quad (20)$$

Kalmanov filter u svakoj iteraciji ažurira 1. i 2. moment vjerojatnosne distribucije stanja:

$$E[x_k] = \hat{x}_k^+ \quad (21)$$

$$E[(x_k - \hat{x}_k^+)(x_k - \hat{x}_k^+)^T] = P_k^+ \quad (22)$$

Aposteriorna estimacija stanja će imati normalnu raspodjelu gustoće vjerojatnosti ako se procesni i mjerni šum ponašaju sukladno normalnoj razdiobi. To znači da se f.g.v. estimacije stanja u koraku k , uz poznavanje mjerenja u koraku k , opisati sljedećim parametrima:

$$p(x_k | z_k) = N(\hat{x}_k^+, P_k^+) \quad (23)$$

Kalmanov filter procjenjuje (estimira) stanje procesa u nekom vremenskom trenutku i zatim dobiva rezultat mjerenja popraćen šumom. Jednadžbe Kalmanovog filtra možemo podijeliti u dvije grupe: jednadžbe vremenskog osvježavanja (predikcije) i jednadžbe osvježavanja (korekcije) mjerenjem. Prva grupa jednadžbi, npr. (9), računa apriornu procjenu stanja u trenutku k iz procjena dobivenih u prethodnom trenutku $k-1$. Druga grupa jednadžbi, npr. (17), računa aposteriornu procjenu optimirajući apriorni rezultat uvođenjem mjerenja. Jednadžbe prve grupe,

odnosno druge grupe se mogu nazvati procjenitelji, odnosno ispravljajući. Zapravo se konačni algoritam diskretnog Kalmanovog filtra može opisati pomoću beskonačne petlje u kojoj se neprestano izmjenjuju obje grupe jednačbi s ciljem procjene trenutnog stanja procesa. Jednačbe vremenskog osvježavanja su sljedeće:

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (24)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (25)$$

Može se vidjeti kako se gornjim jednačbama procjene stanja procesa i odgovarajuće kovarijance greške iz koraka $k-1$ projiciraju u korak k . Druga grupa jednačbi je dana sljedećim izrazima:

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (26)$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (27)$$

$$P_k^+ = (I - K_k H)P_k^- \quad (28)$$

Prvo se izračunava optimalna vrijednost matrice K prema gornjoj jednačbi. Zatim se provodi mjerenje trenutnog stanja procesa i dobiva se z_k . Uvođenjem dobivenog mjerenja u drugu jednačbu dolazimo do aposteriornog stanja. Zadnja jednačba je izračun kovarijance greške estimacije aposteriornog stanja. Može se vidjeti da će konačna kovarijanca greške biti manja od apriorne kovarijance jer smo uveli mjerenje koje uglavnom povećava sigurnost procjene. Nakon jedne iteracije gore navedenih jednačbi, proces se ponavlja tako da je ulaz u sljedeću iteraciju $k+1$ zadnje izračunato aposteriorno stanje i aposteriorna kovarijanca greške \hat{x}_k^+ , odnosno P_k^+ . Rekurzija čini

Kalmanov filter pogodnim za jednostavnu implementaciju jer uvjetuje trenutnu procjenu stanja svim dotadašnjim mjerenjima. Kada su kovarijance šuma procesa Q i mjerenja R konstante, tada će se kovarijanca greške estimacije stanja P_k i matrica K brzo stabilizirati i ostati će zauvijek konstantni.

3.Proširenja Kalmanovog filtra (EKF)

EKF (eng. Extended Kalman filter) rješava slučaj kada jednačbe procesa (9) i mjerenja (10) nisu linearne [10]. Posljedica nelinearnosti jednačbi procesa i mjerenja je što slučajne varijable dobivene nelinearnom transformacijom više nemaju f.g.v. jednaku onoj kod normalne razdiobe. EKF linearizacijom pokušava optimalno aproksimirati Bayesovo pravilo i predstaviti aposteriornu f.g.v. Gaussovom normalnom razdiobom. Problem je kada se stvarna aposteriorna f.g.v. stanja značajno razlikuje od normalne Gaussove (npr. ako je višemodalna) jer tada aproksimacija Gaussovom neće biti dobra. Kod EKF-a se jednačbe *lineariziraju* oko estimacije stanja i kovarijance iz prethodnog koraka $k-1$. Pomoću Taylorovih redova možemo parcijalnim derivacijama nelinearnih funkcija procesa i mjerenja linearizirati estimaciju stanja u k -tom koraku. Uvođenjem nelinearnosti, jednačbe ponašanja procesa i mjerenja su sljedeće:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k, w_k), \quad (29)$$

$$z_k = h(x_k, v_k) \quad (30)$$

Estimacija stanja u sljedećem koraku k se može dobiti pomoću aposteriornog stanja iz koraka $k-1$, a zatim se ta dobivena estimacija koristi u izračunu mjerenja za korak k . To postizemo sljedećim izrazima:

$$\tilde{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) \quad (31)$$

$$\tilde{z}_k = h(\tilde{x}_k, 0) \quad (32)$$

Sljedećim jednadžbama lineariziramo estimaciju stanja i mjerenja oko dobivenih vrijednosti iz izraza (31) i (32):

$$x_k \approx \tilde{x}_k + A_k (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + W_k w_k, \quad (33)$$

$$z_k \approx \tilde{z}_k + H(x_k - \tilde{x}_k) + V_k v_k \quad (34)$$

x_k i x_{k-1} su prave vrijednosti varijabli stanja. A_k je Jacobijeva matrica parcijalnih derivacija funkcije f po varijabli x u trenutku k :

$$A_{[i,j]} = \frac{df_{[i]}}{dx_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) \quad (35)$$

W_k je Jacobijeva matrica parcijalnih derivacija funkcije f po varijabli w u trenutku k :

$$W_{[i,j]} = \frac{df_{[i]}}{dw_{[j]}}(\hat{x}_{k-1}, u_k, 0) \quad (36)$$

V_k je Jacobijeva matrica parcijalnih derivacija funkcije h po varijabli v u trenutku k :

$$V_{[i,j]} = \frac{dh_{[i]}}{dv_{[j]}}(\tilde{x}_k, 0) \quad (37)$$

Sada se mogu definirati novi izrazi za greške procjene:

$$\tilde{e}_{x_k} = x_k - \tilde{x}_k, \quad (38)$$

$$\tilde{e}_{z_k} = z_k - \tilde{z}_k \quad (39)$$

Uz pomoć gornjih izraza, možemo izraze (33) i (34) redefinirati kao:

$$\tilde{e}_{x_k} \approx A_k (x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \varepsilon_k, \quad (40)$$

$$\tilde{e}_{z_k} \approx H\tilde{e}_{x_k} + \eta_k \quad (41)$$

gdje su ε_k i η_k nove nezavisne slučajne varijable sa normalnim f.g.v.:

$$p(\varepsilon_k) \sim N(0, W_k Q W_k^T) \quad (42)$$

$$p(\eta_k) \sim N(0, V_k R V_k^T) \quad (43)$$

Jednadžbe (40) i (41) su linearne i moguće je sada pomoću razlike mjerenja \tilde{e}_{z_k} izračunati procjenu greške \tilde{e}_{x_k} . Zatim se ta procjena greške (\hat{e}_k) može iskoristiti u jednadžbi (38) za izračun *a posteriori* procjene stanja originalnog nelinearnog procesa (44):

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + \hat{e}_k \quad (44)$$

$$p(\tilde{e}_{x_k}) \sim N(0, E[\tilde{e}_{x_k} \tilde{e}_{x_k}^T]) \quad (45)$$

Sljedećom jednadžbom određujemo procjenu greške \hat{e}_k :

$$\hat{e}_k = K_k \tilde{e}_{z_k} \quad (46)$$

Nakon ubacivanja (46) u (44) i korištenja (39) dobijemo sljedeće:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k \tilde{e}_{z_k} = \tilde{x}_k + K_k (z_k - \tilde{z}_k) \quad (47)$$

Uz jednadžbu (31) koja kod EKF-a čini grupu vremenskog osvježavanja estimacije stanja tu još pripada i jednadžba za estimaciju kovarijance greške estimacije:

$$\tilde{P}_k = A_k P_{k-1} A_k^T + W_k Q_k W_k^T \quad (48)$$

Matricu K računamo na sljedeći način:

$$K_k = \tilde{P}_k H_k^T (H_k \tilde{P}_k H_k^T + V_k R_k V_k^T)^{-1} \quad (49)$$

Jednadžbe osvježavanja mjerenjem kod EKF-a su:

$$\hat{x}_k = \tilde{x}_k + K_k (z_k - h(\tilde{x}_k, 0)) \quad (50)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) \tilde{P}_k \quad (51)$$

Kao što se i može vidjeti, EKF nakon linearizacije zadržava ista svojstva kao i običan diskretni Kalmanov filter. I kod EKF-a postoje dvije grupe jednadžbi gdje se u prvoj grupi estimira stanje u koraku k na temelju *a posteriori* estimacije iz prethodnog koraka $k-1$. Zatim se i u EKF-u koristi mjerenje z_k kako bi se poboljšala *a priori* estimacija \tilde{x}_k .

4. Primjene za praćenje prometnog traka

4.1. Estimacija pozicije prometnog traka

Projekt Goldbecka i ostalih [11] opisuje problem detekcije prometnog traka za potrebe autonomne vožnje autom. Kako bi vožnja bila sigurna čak i na zavojitim i grbavim cestama potrebno je poznavati stanje auta i geometriju traka sa visokom preciznošću i pouzdanošću. Sustav senzora koji je korišten u [11] se sastoji od video kamere koja snima vidljive bijele ili žute linije traka te visoko preciznog satelitskog sustava koji određuje poziciju auta. Dobiveni podatci se radi točnosti uspoređuju sa pouzdanom digitalnom mapom. Projekt je nastao na inicijativu Volkswagena i njegov cilj je precizno detektirati i zatim pratiti prometni trak u kojem se nalazi auto kako bi se preciznije odredila pozicija auta na cesti za potrebe autonomne vožnje. Preporuka za sigurnu kontrolu autonomnog upravljanja je da preciznost informacije o poziciji auta generira grešku reda veličine najviše nekoliko centimetara. Video kamera u sustavu snima crno-bijele slike te je postavljena iza vjetrobranskog stakla. Ona dobiveni video signal šalje PC-u na obradu u stvarnom vremenu. Detekcija traka se u [11] bazira na estimaciji parametara predloženog modela traka. Posebna pažnja je posvećena pronalasku točaka koje odgovaraju linijama traka za potrebe procesa estimacije parametara modela.

Važna komponenta kod video detekcije praćenja traka je modeliranje ceste čime se analiza ceste prebacuje na analizu modela. Model kojim je u [11] opisana horizontalna zakrivljenost traka, odnosno paralelnih linija traka je aproksimacija klotoida polinomom trećeg reda (52):

$$Y_E(X_E) = k \frac{B}{2} + c_{h,0} \frac{X_E^2}{2} + c_{h,1} \frac{X_E^3}{6} \quad (52)$$

Parametar $\vec{x}_E = (X_E, Y_E, Z_E)^T$ u izrazima (52) i (53) predstavlja točku u Zemljinom 3D sustavu čije je ishodište projekcija centra stražnje osovine auta na Zemljinu površinu dodatno pomaknuta prema središtu traka. Os X_E pokazuje prema naprijed (ispred auta), os Y_E u lijevu stranu (lijevo od auta), a os Z_E prema gore (iznad auta). Parametar k je jednak +1 za lijevu liniju traka, odnosno -1 za desnu. B predstavlja širinu traka, $c_{h,0}$ je horizontalna zakrivljenost ceste, a $c_{h,1}$ je procjena promjene horizontalne zakrivljenosti ceste. Vertikalna zakrivljenost ceste je opisana slično (53):

$$Z_E(X_E) = c_{v,0} \frac{X_E^2}{2} + c_{v,1} \frac{X_E^3}{6} \quad (53)$$

Parametar $c_{v,0}$ predstavlja vertikalnu zakrivljenost ceste, a $c_{v,1}$ promjenu vertikalne zakrivljenosti ceste.

Kako bi se 3D model precizno preslikao u 2D sustav slike potrebno je izvršiti nekoliko geometrijskih preslikavanja između sustava. Kako bi se saznala pozicija točke \vec{x}_E u 3D koordinatnom sustavu auta potrebno je translirati te zatim rotirati sustav auta tako da se poklopi sa osima Zemljinog 3D sustava (54):

$$\begin{aligned} \vec{x}_V &= R_{EV} (\vec{x}_E - \vec{t}_{EV}) \\ R_{EV} &= R_{X_E} R_{Y_E} R_{Z_E} \\ \vec{t}_{EV} &= (0, Y_{EV}, 0) \end{aligned} \quad (54)$$

Nakon što je dobivena pozicija točke u sustavu auta potrebno je dovesti točku u sustav kamere. To se radi translacijom, odnosno

rotacijom točke za *pan* kut ψ_{VC} oko Z_V osi auta, za *tilt* kut α_{VC} oko osi Y_V te za *roll* kut γ_{VC} oko X_V osi (55):

$$\vec{x}_C = R_{VC}(\vec{x}_V - \vec{t}_{VC}) \quad (55)$$

Parametri $\vec{t}_{VC} = (X_{VC}, Y_{VC}, Z_{VC})^T$ i $(\gamma_{VC}, \alpha_{VC}, \psi_{VC})^T$ su tzv. vanjski parametri kamere koji moraju biti određeni ekstrinzičnom kalibracijom kamere.

Ubacivanjem (54) u (55) dobije se (56):

$$\vec{x}_C = R_{VC}R_{EV}\vec{x}_E - R_{VC}R_{EV}\vec{t}_{EV} - R_{VC}\vec{t}_{VC} \quad (56)$$

Za male kuteve linearizirane matrice su sljedeće (57):

$$R_{VC} = \begin{bmatrix} 1 & \psi_{VC} & -\alpha_{VC} \\ -\psi_{VC} & 1 & \gamma_{VC} \\ \alpha_{VC} & -\gamma_{VC} & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{EV} = \begin{bmatrix} 1 & \psi_{EV} & -\alpha_{EV} \\ -\psi_{EV} & 1 & \gamma_{EV} \\ \alpha_{EV} & -\gamma_{EV} & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{EC} = R_{VC}R_{EV} \quad (57)$$

Pod pretpostavkom da je produkt dvaju kuteva rotacije puno manji od 1, matrica rotacije R_{EC} se pojednostavljuje (58):

$$R_{EC} = \begin{bmatrix} 1 & \psi_{VC} + \psi_{EV} & -(\alpha_{VC} + \alpha_{EV}) \\ -(\psi_{VC} + \psi_{EV}) & 1 & \gamma_{VC} + \gamma_{EV} \\ \alpha_{VC} + \alpha_{EV} & -(\gamma_{VC} + \gamma_{EV}) & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$R_{VC}\vec{t}_{VC} = \vec{m}_{VC} \quad (59)$$

Ubacujući (57) i (58) u (56) uz primjenu (59) dobije se:

$$X_C = X_E + (\psi_{VC} + \psi_{EV})Y_E - (\alpha_{VC} + \alpha_{EV})Z_E - (\psi_{VC} + \psi_{EV})Y_{EV} - m_{x,VC} \quad (60)$$

$$Y_C = -(\psi_{VC} + \psi_{EV})X_E + Y_E + (\gamma_{VC} + \gamma_{EV})Z_E - Y_{EV} - m_{y,VC} \quad (61)$$

$$Z_C = (\alpha_{VC} + \alpha_{EV})X_E - (\gamma_{VC} + \gamma_{EV})Y_E + Z_E + (\gamma_{VC} + \gamma_{EV})Y_{EV} - m_{z,VC} \quad (62)$$

Nakon što imamo točku \vec{x}_C u sustavu kamere tada jednostavno centralnom projekcijom dobivamo 2D koordinate (x,y) na slici (63):

$$x = F_x \frac{Y_C}{X_C} + c_x \quad y = F_y \frac{Z_C}{X_C} + c_y \quad (63)$$

Parametri F_x i F_y označavaju žarišne duljine, a c_x i c_y su koordinate centra slike. Navedeni parametri se određuju intrinzičnom kalibracijom kamere. Ubacujući (52), (53), (60)-(62) u (63) dobije se (64):

$$x = \tilde{g}(X_E, \vec{p}) \quad (64)$$

$$y = \tilde{h}(X_E, \vec{p}) \quad (65)$$

Vektor $\vec{p} = (B, c_{h,0}, c_{h,1}, c_{v,0}, c_{v,1}, Y_{EV}, \alpha_{EV}, \gamma_{EV}, \psi_{EV})^T$ predstavlja parametre modela koje je potrebno estimirati. Zamjenom parametara u (65) dobije se (66):

$$X_E = h(y, \vec{p}) \quad (66)$$

Stavljanjem (66) u (64) imamo (67):

$$x = g(y, \vec{p}) \quad (67)$$

Sa (67) je dobivena konačna relacija pomoću koje se ukoliko je poznat vektor \vec{p} jednostavno odredi koordinata x svih točaka lijeve i

desne linije traka za odgovarajući y . Primjena Kalmanovog filtra je upravo kod estimacije vektora \vec{p} . Budući da sustav ne koristi neke dodatne podatke kao što su kut zaokreta volana i sl. korišten je jednostavni dinamički model sustava (68):

$$\hat{\vec{p}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k \vec{p}_k + \mathbf{\Gamma}_k \vec{u}_k \quad (68)$$

$$\mathbf{\Phi}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & v_k \Delta t_{k,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v_k \Delta t_{k,k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & v_k \Delta t_{k,k+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$\mathbf{\Gamma}_k \vec{u}_k = \vec{0} \quad (70)$$

Izraz (68) je klasični oblik linearnog diskretnog Kalmanovog filtra gdje apriorna estimacija stanja ($\hat{\vec{p}}_{k+1}$) u sljedećem koraku ovisi o aposteriornoj estimaciji u prethodnom koraku \vec{p}_k i aktualnom upravljačkom signalu \vec{u}_k . Matrica (69) opisuje dinamičko ponašanje sustava, odnosno tranziciju sustava kroz diskretne vremenske trenutke k . U (69) v je brzina auta u smjeru X_E osi, a Δt je vremenska razlika između dviju uzastopnih slika. Izraz (70) je jednak nul vektoru jer se u sustavu ne koristi upravljačka informacija. Budući da je preslikavanje 2D mjernih podataka iz 3D točaka okoline nelinearna relacija tada je za dobivanje mjerenja potrebno primijeniti EKF. EKF na osnovi minimalne

srednje kvadratne pogreške estimira optimalan vektor \vec{p} kroz predikciju i korekciju. Pod pretpostavkom da su vremenski invarijantan sustav auta i proces mjerenja podložni šumu konačne jednadžbe su (71) i (72):

$$\vec{p}_{k+1} = \vec{f}_k(\vec{p}_k, \vec{u}_k) + \vec{q}_k \quad (71)$$

$$\vec{x}_k = \vec{g}_k(\vec{p}_k, \vec{y}_k) + \vec{r}_k \quad (72)$$

$$\hat{x}_k = \vec{g}_k(\hat{p}_k, \vec{y}_k) \quad (73)$$

U (71) i (72) slučajne varijable \vec{q} i \vec{r} opisuju šum dinamičkog sustava, odnosno mjerenja. Relacija (72) se linearizira oko vrijednosti (73) pravcem čiji se smjer dobije izračunavanjem Jacobijeve matrice (74):

$$\mathbf{C}_k := \left. \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \vec{g}(\vec{p}, \vec{y}) \right|_k \quad (74)$$

Na početku estimacije u trenutku $t_{k=0}$ moraju biti poznati vektor $\vec{p}_{k=0}$ i kovarijantna matrica $P_{k=0}$. Apriorno stanje sustava se u trenutku t_{k+1} estimira pomoću (68), a kovarijantna matrica sustava pomoću (75):

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1} = \mathbf{\Phi}_k \mathbf{P}_k \mathbf{\Phi}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (75)$$

U (75) matrica \mathbf{Q}_k opisuje kovarijantnu matricu šuma dinamičkog sustava. Uzimanjem mjerenja $(\vec{x}, \vec{y})_{k+1}$ u obzir vrši se korekcija nad apriornom estimacijom stanja sustava te se dobiva odgovarajuća aposteriorna estimacija (76):

$$\vec{p}_{k+1} = \hat{\mathbf{p}}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1}(\vec{x}_{k+1} - \vec{g}_{k+1}(\hat{\mathbf{p}}_{k+1}, \vec{y}_{k+1})) \quad (76)$$

Mjerne točke su dobivene na način da se na slici traže pozicije gradijenata koji su posljedica razlike sivih tonova linija traka i površine ceste. Slika se podijeli na linije (čija je međusobna udaljenost konstantna u Zemljinom 3D sustavu) u kojima se vrši izračun gradijenta. Širina i maksimalna udaljenost linija je određena varijancom apriorne estimacije parametara. Što su varijance manje to su linije uže jer se može jače vjerovati apriornoj estimaciji. Na poziciji centra svake linije gradijent se računa pomoću dvije neparalelne derivacije ulazne slike u smjeru okomitom na estimirano pružanje traka. Među svim dobivenim gradijentima traži se točka čiji je gradijent najbolji s obzirom na amplitudu, orijentaciju i poziciju na slici. Ta točka se zatim koristi u postupku korekcije mjerenjem kao mjerni podatak.

Aposteriorna kovarijantna matrica P dobiva se izrazom (77):

$$\mathbf{P}_{k+1} = \hat{\mathbf{P}}_{k+1} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{P}}_{k+1} \quad (77)$$

U (76) i (77) matrica K je izračunata kao (78):

$$\mathbf{K}_{k+1} = \hat{\mathbf{P}}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}^T (\mathbf{C}_{k+1} \hat{\mathbf{P}}_{k+1} \mathbf{C}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \quad (78)$$

U (78) matrica R_{k+1} je kovarijantna matrica šuma mjerenja. Nakon estimacije svi dobiveni rezultati i sami model sustava dobivaju ocjenu pouzdanosti s obzirom na kovarijantnu matricu P .

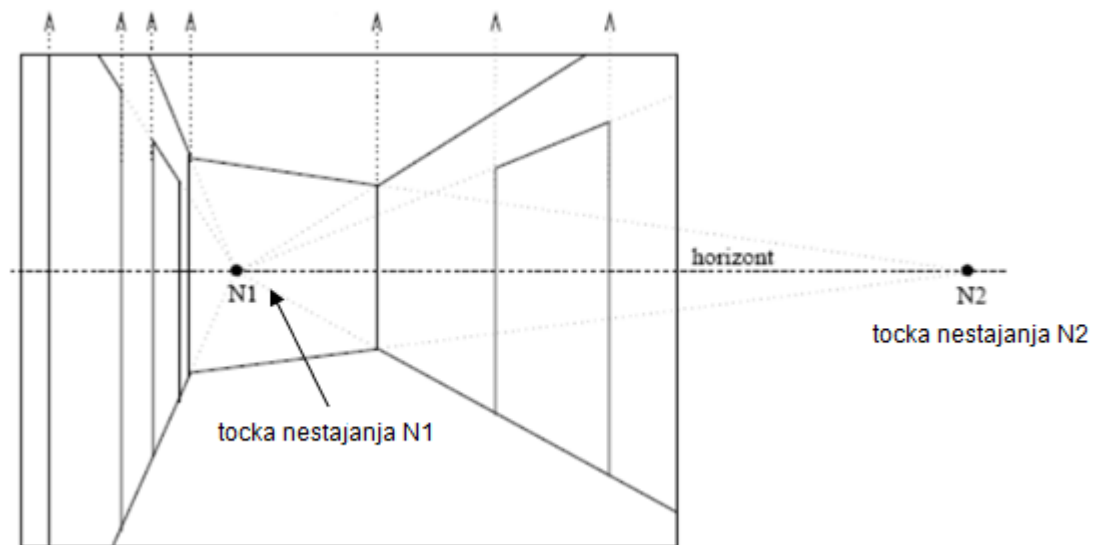
4.2. Estimacija razdiobe vjerojatnosti pravocrtnih segmenata linije traka

Primjer primjene za praćenje prometnog traka se nalazi u [8] gdje su Wang, Bai i Fairhurst predstavili robusnu metodu za detekciju i praćenje prometnog traka. Na početku [8] se pokušavaju estimirati parametri modela prometnog traka, a zatim taj estimirani model inicijalizira čestični filter pomoću kojega se prati prometni trak. Model linije prometnog traka je opisan jednačbom hiperbole (79) kojoj je kasnije pridodan nelinearni član kako bi se model uspješno nosio s varirajućom zakrivljenošću ceste. Linije prometnog traka su na slici predstavljene parom hiperbola (79):

$$u - u_H = a(v - v_H) + \frac{b}{v - v_H} \quad (79)$$

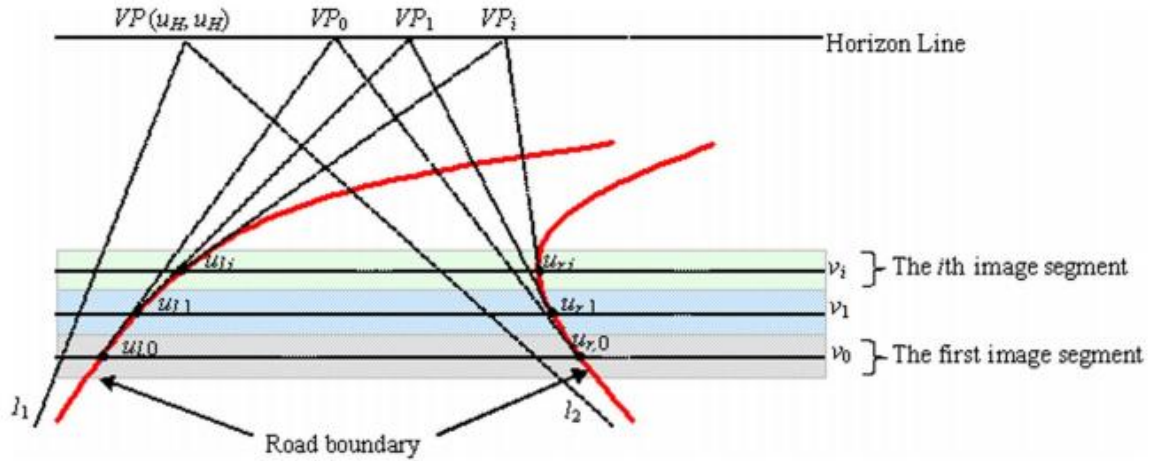
U gornjoj jednačbi (u, v) su koordinate točka linije prometnog traka, b ovisi o zakrivljenosti ceste u 3-D okolini, (u_H, v_H) je pozicija sjecišta asimptota hiperbola na horizontu, a a predstavlja inverznu tangentu asimptote lijeve linije ako je a pozitivna (a_l), odnosno desne linije ako je negativna (a_r). Zbog jednostavnosti obje tangente ćemo označavati sa a . Parametar u predstavlja apscisu 2-D koordinatnog sustava slike, a v ordinatu, odnosno širinu i visinu slike. Navedene parametre modela (u_H, v_H, a, b) je potrebno estimirati na temelju eksperimentalnih slika. Kalmanov filter, odnosno ideja Kalmanovog filtra u [8] je uvedena kod estimacije parametra v_H . Traženje koordinate v_H točke (u_H, v_H) koja se nalazi na horizontu jednako je traženju pozicije horizonta jer je horizont zapravo horizontalna linija na kojoj se nalaze točke nestajanja (točke nedogleda). Točka nestajanja je mjesto na

horizontu gdje se sijeku sve međusobno paralelne linije. Poziciju horizonta je moguće pronaći na način da se prvo pronađu točke nestajanja (eng. *vanishing points*) te da se kroz njih optimalno provuče pravac horizonta s najmanjom greškom odstupanja. Točke nestajanja kojima će se optimirati pozicija horizonta će biti nedogledi paralelnih segmenata linija prometnog traka.



Slika 4: horizont na kojemu se nalaze dvije točke nestajanja za dvije grupe međusobno paralelnih pravaca [9]

Kako bi se točke nestajanja preciznije odredile slika se dijeli na horizontalne pruge jednake širine. Na taj način će jako zakrivljeni segmenti ceste u svakoj pruzi biti približno pravocrtni. Zatim se u svakoj pruzi pronađu svi pravocrtni segmenti te se svrstaju u segmente lijeve, odnosno desne linije traka ovisno o geometriji i o vjerojatnosti koja se dobije primjenom cirkularnog modela (80) . Nakon toga se pomoću parova pravocrtnih segmenata (iz lijevog i desnog prometnog traka) estimiraju točke nestajanja (Slika 5).



Slika 5: podjela slike ceste na horizontalne pruge, prikaz horizonta, sjecišta asimptota na horizontu te hiperbola koje modeliraju linije traka [8]

Cirkularnim modelom (80) se nastoje generirati primjerci za učenje kojima bi se naučila vjerojatnost da li je određeni pravocrtni segment dio linije traka. Ta vjerojatnost se temelji na poziciji segmenta i njegovom gradijentu. Pomoću cirkularnog modela generiraju se točke linija prometnog traka uz prethodno poznavanje pozicije i položaja kamere, intrinzičnih i ekstrinzičnih parametara kamere i parametara ceste. U (80) $\gamma = -1$ za lijevu liniju, a $\gamma = 1$ za desnu liniju traka, f je žarišna duljina kamere, d_u i d_v su širina i visina piksela, $e_u = f/d_u$ je horizontalna žarišna duljina u pikselima, $e_v = f/d_v$ je vertikalna žarišna duljina u pikselima, (u_c, v_c) je pozicija centra slike, z_0 je visina kamere, x_0 je bočni odmak kamere od centra traka, φ je yaw kut kamere relativno prema osi traka, α je pitch kut kamere relativno prema ravnini zemlje, W je širina traka i C_0 je zakrivljenost ceste. Izraz (80) je konzistentan sa modelom (79). Derivacijom (80) po varijabli v_i dobije se gradijent (81).

$$u_i = e_u \left[\frac{e_v z_0 C_0}{2(v_i - v_c + e_v \alpha)} + \frac{\gamma W / 2 - x_0}{e_v z_0} (v_i - v_c + e_v \alpha) + \varphi \right] + u_c \quad (80)$$

$$\frac{du_i}{dv_i} = g_i = e_u \left[-\frac{e_v z_0 C_0}{2(v_i - v_c + e_v \alpha)^2} + \frac{1}{e_v z_0} \left(-x_0 + \frac{\gamma W}{2} \right) \right] \quad (81)$$

Svaki od spomenutih parametara cirkularnog modela se uzorkuje iz empirijski utvrđenog raspona. Za svaku grupu uzorkovanih parametara model (80) generira točke u_i i gradijent g_i za svaku od pruga na slici čija je pozicija v_i . Iz tako generiranog skupa točaka formiraju se očekivanja \bar{u}_i i \bar{g}_i , odnosno varijance $\sigma^2(u_i)$ i $\sigma^2(g_i)$ za svaku v_i . Intervali $[\bar{u}_i - \sigma(u_i), \bar{u}_i + \sigma(u_i)]$ i $[\bar{g}_i - \sigma(g_i), \bar{g}_i + \sigma(g_i)]$ su intervali povjerenja. Svaki pravocrtni segment pronađen u nekoj pruzi na slici se raspoređuje u lijevu ili desnu grupu ovisno o tome da li se koordinate u_1 i u_2 njegovih krajnjih točaka (u_1, v_1) i (u_2, v_2) obje nalaze unutar odgovarajućih intervala povjerenja za točke v_1 , odnosno v_2 .

Nakon što su svi potencijalni pravocrtni segmenti svrstani u grupe, odredi se za svaki par lijevog i desnog segmenta i -te pruge sadržaj vektora $x_i = (u_{l,i}, u_{r,i}, g_{l,i}, g_{r,i})^T$. Parametri $g_{l,i}$ i $g_{r,i}$ predstavljaju gradijente na mjestima gdje segmenti presijecaju centralnu liniju i -te pruge. Vjerojatnosna distribucija vektora x_i određena srednjom vrijednošću \bar{x}_i i kovarijantnom matricom C_{x_i} računa se na temelju uzoraka dobivenih iz (80). Zatim se računa Mahalanobisova udaljenost d (82) vektora x_i od srednje vrijednosti \bar{x}_i . Sjecište samo onih parova segmenata čija je Mahalanobisova udaljenost manja od nekog zadanog praga se smatra potencijalnom točkom nestajanja i -te pruge. Među svim tako dobivenim kandidatima se prema zadanom kriteriju odabire samo jedna točka nestajanja za i -tu prugu. Nakon što su odabrane točke nestajanja za

svaku prugu, pomoću M-estimatora se kroz te točke propusti najoptimalniji pravac horizonta.

$$d = (x_i - \bar{x}_i)^T C_{x_i}^{-1} (x_i - \bar{x}_i) \quad (82)$$

Prethodno opisani postupak ne uzima u obzir rezultate detekcije točaka nestajanja iz susjednih pruga što može dovesti do nekonzistentnosti s rezultatima u sljedećoj pruzi. Zato se kod uspješnijih inačica koristi Kalmanov filter kojim se propagira vjerojatnost iz $(i-1)$ -te pruge u i -tu prugu da je određeni pravocrtni segment iz i pruge dio linije prometnog traka. Funkcija gustoće vjerojatnosti u i -toj pruzi se modelira kao mješavina n_i unimodalnih Gaussovih funkcija gustoće vjerojatnosti (dalje u tekstu f.g.v.) na sljedeći način:

$$f_i(\alpha) = p_i \max_{j=1, \dots, n_i} \{w_{j,i} \kappa(\alpha; \mu_{j,i}, \Sigma_{j,i})\} \quad (83)$$

$$\alpha = (u, g)^T \quad (84)$$

Parametar u kod (84) predstavlja sjecište promatranog pravocrtnog segmenta i -te pruge sa centralnom linijom i -te pruge, dok je g iznos gradijenta u toj točki sjecišta. Svaka od Gaussovih f.g.v. je jednaka sljedećem:

$$\kappa(\alpha; \mu_{j,i}, \Sigma_{j,i}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma_{j,i}|^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2} (\alpha - \mu_{j,i})^T \Sigma_{j,i}^{-1} (\alpha - \mu_{j,i})\right\} \quad (85)$$

U jednadžbi iznad (83) $w_{j,i}$ je težina j -te f.g.v., a $\mu_{j,i}$ i $\Sigma_{j,i}$ su njena srednja vrijednost, odnosno kovarijanca. p_i je konstanta, a d je dimenzija f.g.v. Kako bi mogli primijeniti postupak Kalmanovog filtra svakoj f.g.v.

dodajemo $\dot{g}_{j,i}$ (druga derivacija u_i po v_i) i $(v_H)_{j,i}$ (v koordinata linije nestajanja). Pomoću Kalmanovog filtra se vjerojatnosti, da je određeni pravocrtni segment dio prometnog traka, propagiraju od najniže pruge na slici prema najvišoj. Prva faza u primjeni Kalmanovog filtra je predikcija apriornih gustoća vjerojatnosti $(i+1)$ -te pruge na temelju aposteriornih gustoća vjerojatnosti i -te pruge. Predikcija se vrši na sljedeće načine:

$$f_{i+1|i}(\alpha) = p_{i+1} \max_{j=1, \dots, n_i} \left\{ w_{j,i} \kappa(\alpha; \tilde{\mu}_{j,i+1}, \tilde{\Sigma}_{j,i+1}) \right\} \quad (86)$$

$$\tilde{\mu}_{j,i+1} = H\tilde{s}_{j,i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_{j,i+1} \\ \tilde{g}_{j,i+1} \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$\tilde{s}_{j,i+1} = F(k)s_{j,i} \quad (88)$$

$$(v_H)_{j,i+1} = (v_H)_{j,i} \quad (89)$$

$$F(k) = \begin{pmatrix} 1 & T & \frac{T^2}{\ln \beta} \left(1 - \frac{1}{\ln \beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \right) \\ 0 & 1 & \frac{T}{\ln \beta} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} \quad (90)$$

$$\beta = \left(\frac{k+1}{k} \right)^3 \quad (91)$$

$$k = - \left\lfloor \frac{(v_i - (v_H)_{j,i})}{T} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(v_{\max} - (v_H)_{j,i})}{T} \right\rfloor \leq k < -1 \quad (92)$$

U izrazima (86)-(89) može se vidjeti kako se izračunavaju apriorne vjerojatnosti Gaussovih f.g.v. u $(i+1)$ -oj pruzi na temelju aposteriornih gustoća Gaussovih f.g.v. iz i -te pruge. Također se osvježavaju i

parametri v_H te \tilde{g} . Parametar T je širina jedne pruge. Apriorna estimacija kovarijance j -te f.g.v. dana je sa:

$$\tilde{\Sigma}_{j,i+1} = H\tilde{P}_{j,i+1}H^T + R \quad (93)$$

R je kovarijanca šuma pri mjerenju.

$$\tilde{P}_{j,i+1} = F(k)P_{j,i}F(k)^T = F(k)\begin{pmatrix} \Sigma_{j,i} & \vdots \\ \dots & \sigma_{\tilde{g}_{j,i}}^2 \end{pmatrix}F(k)^T \quad (94)$$

U (94) se vidi kako se kovarijanca j -te f.g.v. u $(i+1)$ -oj pruzi osvježava kovarijancom j -te f.g.v. iz i -te pruge preko varijable $\tilde{P}_{j,i+1}$. Postoje dvije skupine f.g.v., jedna je za estimaciju gustoće vjerojatnosti lijeve linije traka, odnosno desne linije traka.

Kod osvježavanja mjerenjem svi pravocrtni segmenti su potencijalni mjerni podatci za osvježavanje f.g.v.. Pravocrtni segment se smatra valjanim mjerenjem za j -tu f.g.v. ako je njegova Mahalanobisova udaljenost manja od nekog praga γ (95):

$$SR_{j,i+1} = \{\alpha \mid (\alpha - \mu_{j,i+1})^T \tilde{\Sigma}_{j,i+1}^{-1} (\alpha - \mu_{j,i+1}) < \gamma\} \quad (95)$$

U slučaju da je više pravocrtnih segmenata valjano za j -tu f.g.v. tada se ta f.g.v. duplicira za svaki od tih segmenata.

Osvježavanje mjerenjem mijenja težinu $w_{j,i+1}$ j -te f.g.v. nakon prikazivanja mjerenja α na sljedeći način:

$$\hat{w}_{j,i+1} = \frac{w_{j,i+1}}{\sum_i w_{j,i+1}} \quad (96)$$

$$w_{j,i+1} = w_{j,i} \{L_\alpha L_H L_{history}\}(j, i + 1) \quad (97)$$

$$L_{\alpha}(j, i+1) = \left\{ \begin{array}{ll} \kappa(\alpha; \tilde{\mu}_{j,i+1}, \tilde{\Sigma}_{j,i+1}), & \text{ako_je_}\alpha\text{_valjan} \\ \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\tilde{\Sigma}_{j,i+1}|^{1/2}} \exp(-2.0), & \text{inace} \end{array} \right\} \quad (98)$$

L_{α} (98) ocjenjuje vjerodostojnost trenutnog pravocrtnog segmenta koji se ispituje.

$$L_H(j, i+1) = \left\{ \begin{array}{ll} \exp\left(-\frac{\left((v_H)_{j,i+1} - v_{VP_{i+1}}\right)^2}{2\sigma_{v_H}^2}\right), & \text{ako_}D(\alpha, VP_{i+1}) < \varepsilon \\ \exp(-0.5), & \text{inace} \end{array} \right\} \quad (99)$$

L_H (99) procjenjuje vjerodostojnost linije nestajanja gdje je $D(\alpha, VP_{i+1})$ euklidska udaljenost između točke nestajanja VP_{i+1} i uzorka α , v_{VP} je v koordinata od VP_{i+1} , a σ_{v_H} je standardna devijacija pozicije linije nestajanja koja je u [8] postavljena na 20 piksela. Svrha L_H je da naglašava one f.g.v. čija je v koordinata linije nestajanja (horizonta) blizu v koordinate zadnje detektirane točke nestajanja VP .

$$L_{history}(j, i+1) = \left\{ \begin{array}{ll} 0.1, & \text{ako_}n_{survival} < 0.1n_{max} \\ \frac{n_{survival}}{n_{max}}, & \text{ako_}0.1n_{max} \leq n_{survival} \leq n_{max} \\ 1, & \text{ako_}n_{survival} > n_{max} \end{array} \right\} \quad (100)$$

Pomoću $L_{history}$ (100) se naglašavaju f.g.v. proporcionalno broju pruga kroz koje su propagirane gdje $n_{survival}$ sadrži broj propagacija. Računanje apriornih f.g.v. i kasnije njihovih aposteriornih ekvivalenata se vrši rekurzivno kroz svaku sljedeću prugu gdje se apriorne f.g.v. iz i -te pruge računaju na temelju aposteriornih f.g.v. iz $(i-1)$ -te pruge. Završetkom propagacije Kalmanovim filtrom moguće je u svakoj pruzi estimirati gustoću vjerojatnosti segmenata linija traka pomoću izračunatih aposteriornih f.g.v. Pomoću dobivenih f.g.v. jednažba (83) sada može

preciznije vrednovati svaki od uzoraka u pruzi kako bi konačna točka nestajanja za tu istu prugu bila određena onim pravocrtnim segmentima koji zaista i jesu dio linija traka sa najvećom vjerojatnosti. To preciznije određivanje točaka nestajanja će onda rezultirati preciznijom pozicijom horizonta. U [8] je također umjesto čestičnog filtra upotrijebljen EKF za detekciju prometnog traka u sljedu slika. Uočeni su neki problemi kod EKF-a gdje on u fazi osvježavanja mjerenjem nastoji optimizirati predikciju položaja traka neispravnim mjernim podacima, tj. podacima koji nisu dio linije prometnog traka. Također kad auto prelazi u susjedni trak EKF se često izgubi ili jako sporo konvergira prema pravoj estimaciji. Kod praćenja traka sa EKF-om bilo je potrebno oko 4 puta više ponovnog izračunavanja modela traka (nakon što detekcija krene nepovratno u krivom smjeru potrebno je proces detektor ponovno pokrenuti sa preciznijim podacima), nego što je bilo potrebno kod detekcije sa čestičnim filtrom.

Zaključak

Često je potrebno procijeniti pravo stanje nekog procesa na temelju nesigurnih i nepotpunih mjerenja koja sadrže šum. Uz mjerni šum postoji i procesni šum zbog kojeg proces ne završi točno u onom stanju koje je predviđeno samim modelom procesa. Jedan od alata za estimaciju stanja procesa je Kalmanov filter temeljen na poznatom modelu procesa i mjerenja. Kalmanov filter je optimalan u slučaju kada je razdioba vjerojatnosti stanja u kojemu se proces nalazi u nekom diskretnom vremenskom koraku jednaka Gaussovoj razdiobi. To znači da je razdioba unimodalna, odnosno da ima samo jednu izraženu hipotezu o mogućem stanju procesa. Optimalnost također ovisi o pretpostavci da je trenutno stanje linearno ovisno o prethodnom stanju te da je mjerenje linearno ovisno o trenutnom stanju. Ukoliko su navedeni uvjeti zadovoljeni Kalmanov filter za takve procese daje najbolje moguće rezultate. Ako su modeli procesa nelinearni onda se raznim tehnikama poput EKF-a pokušavaju optimalno linearizirati uz prisutnost neizostavne aproksimacijske greške. Linearizacija je onoliko ispravna koliko je stvarno ponašanje procesa moguće opisati Gaussovom razdiobom jer u slučaju aproksimacije višemodalnog procesa unimodalnom razdiobom estimacije su najčešće netočne. Prednost Kalmanovog filtra je rekurzivnost jer nije potrebno pamtiti sva prethodna mjerenja, već se u trenutnoj iteraciji koristi samo najbolja estimacija prethodnog stanja procesa koja je rekurzivno određena na temelju svih prethodnih mjerenja. Iako navedena ograničenja Kalmanovog filtra sužavaju mogući prostor primjene, dobiveni su zadovoljavajući rezultati za većinu zanimljivih i korisnih procesa poput upravljanja objektima u avionskoj i automobilskoj industriji.

Literatura

- [1] Kleeman, L., Understanding and Applying Kalman Filtering, <http://www.ecse.monash.edu.au/centres/irrc/LKPubS/Kalman.PDF>, 4.3.2010.
- [2] Kalafatić, Z., Šegvić, S., predavanja iz kolegija Analiza dinamičkih scena, 2008./2009., 4.3.2010.
- [3] Perić, N., Petrović, I., Diskretni linearni Kalmanov fitar, 9. poglavlje iz kolegija Teorija estimacije, http://www.fer.hr/download/repository/TE_Poglavlje09_01.pdf, 4.3.2010.
- [4] Perić, N., Petrović, I., Kontinuirani i nelinearni oblici Kalmanovog filtra, 10. poglavlje iz kolegija Teorija estimacije http://www.fer.hr/download/repository/TE_Poglavlje10_01.pdf, 4.3.2010.
- [5] Maybeck, S. P., chapter 1 Introduction, *Volume 1 Stochastic models, estimation and control*, New York, Academic Press, http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/maybeck_ch1.pdf, 1979.
- [6] Welch, G., Bishop, G., Course 8 An Introduction to the Kalman filter, http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf, 4.3.2010.
- [7] Bai, L., Wang, Y., Fairhurst, M., An extended hyperbola model for road tracking for video-based personal navigation, *Knowledge-Based Systems* 21 (2008), str. 265-272
- [8] Wang, Y., Bai, L., Fairhurst, M., Robust Road Modeling and Tracking Using Condensation, *IEEE Transactions on intelligent transportation systems*, Volume 9 (prosinac 2008), str. 570-579
- [9] Šegvić, S., Uporaba projekcijske geometrije i aktivnog vida u tumačenju scena, magistarski rad, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2000.
- [10] Thrun, S., Burgard, W., Fox, D., Probabilistic robotics, The MIT Press, 1.9.2005.

[11] Goldbeck, J., Huertgen, B., Ernst, S., Kelch, L., Lane following combining vision and DGPS, *Image and Vision Computing*, 18 (2000), str. 425-433

Sažetak

U ovom radu je opisan Kalmanov filter, alat kojim se pokušava precizno estimirati točno stanje procesa na temelju poznatog modela procesa i niza nepotpunih i netočnih mjerenja. To je vrsta rekurzivnog diskretnog filtra koji za optimalnost rezultata pretpostavlja linearnost procesa i mjerenja, Gaussovu razdiobu ponašanja procesa te međusobno nezavisne Gaussove bijele šumove procesa i mjerenja. Sljedeće stanje procesa se estimira na temelju estimacije prethodnog stanja. U uvodu rada je predstavljen primjer uporabe Kalmanovog filtra, u sljedećem poglavlju je opisana rekurzivnost filtra i njen doprinos jednostavnosti uporabe i implementacije filtra. Zatim je detaljno opisan diskretni oblik Kalmanovog filtra uz pregled odgovarajućih jednažbi. Nakon toga je obrađen prošireni Kalmanov filter EKF za rad sa nelinearnim procesima. Na kraju je opisan znanstveni članak gdje je Kalmanov filter korišten u detekciji prometnog traka.