ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA

iz

INTERAKTIVNE RAČUNALNE GRAFIKE

Hrvoje Gradečak
Tomislav Lugarić
Goran Narančić
Zvonimir Pavlić

Predgovor

Ovu zbirku riješenih zadataka iz IRG-a odlučili smo napraviti kako bismo svima olakšali pripreme za ispite. Nadamo se da će vam ovo što smo do sada napravili pomoći u pripremi za ispite i da će vam olakšati savladavanje predmeta Interaktivna računalna grafika.

Ova je zbirka „otvorenog“ formata, što znači da ste svi pozvani popravljati je te proširivati novim zadacima. Ukoliko ste voljni uložiti svoj trud i vrijeme u nadogradnju ove zbirke, obratite se prof. Mihajlović kako bi se te „nadogradnje“ mogle objaviti na službenim stranicama predmeta.

Zvonimir Pavlić
Goran Narančić
Tomislav Lugarić
Hrvoje Gradečak

2. Međuispit

Grupa B

II Među-ispit iz Interaktivne računalne grafike

1. Zadana je dužina točkama u radnom prostoru V_1=(100 0 20) t=0 i V_2=(500 0 50) t=1. Odrediti perspektivno ispravnu z-koordinatu točke čija je vrijednost parametra u=0,8 u prostoru projekcije. Centar projekcije je u ishodištu, udaljenost do ravnine projekcije je H=20.

a) 37,46 b) 31,25 c) 38,46 d) 44 e) ništa od navedenog

2. Zadane su početna i završna točka. V_0=(10 20 10), V_2=(5 30 10), Bezierove krivulje u radnom prostoru i derivacija u završnoj točki V_2'=(5 10 0). Odrediti kvadratnu aproksimacijsku Bezier-ovu krivulju upotrebom Bernstein-ovih težinskih funkcija. Odrediti točku krivulje za iznos parametra t=0.3. $b_{i\,n}(t)=\dfrac{n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i}$

a) P(6,4 22 10) b) P(7,4 22 10) c) P(6,4 23,5 15) d) P(6,4 23 10) e) ništa od navedenog

3. Poligonalni objekt je zadan strukturom krilatog brida. Koji su susjedni bridovi vrhu V_2?

Tablica vrhova		
V1	x y z	e1
V2	x y z	e1
V3	x y z	e3
V4	x y z	e3

Tablica bridova								
e1	V2	V1	P4	P1	e6	e2	e4	e5
e2	V2	V3	P1	P3	e1	e6	e5	e3
e3	V3	V4	P2	P3	e5	e2	e4	e6
e4	V4	V1	P2	P4	e3	e6	e5	e1
e5	V3	V1	P1	P2	e2	e3	e1	e4
e6	V4	V2	P4	P3	e4	e3	e1	e2

Tablica poligona	
P1	e1
P2	e3
P3	e3
P4	e1

a) e1, e2, e3 b) e1, e4, e5 c) e1, e3, e6 d) e1, e2, e6 e) ništa od navedenog

4. Zadan je pravac p točkama V_0=(10 10 10) i V_1=(50 40 20). Odrediti rotiranu točku T' koju dobijemo rotacijom točke T= (0 10 10) oko pravca p za +30° (+ znači suprotno smjeru kazaljke na satu) gledano iz V_1 u V_0.

a) T'(1,9 6 14,3) b) T'(0,5 8,4 12,7) c) T'(0,5 9,4 9,1) d) T'(1,9 9,4 4,1) e) ništa od navedenog

5. Napisati jednadžbu u parametarskom obliku za bilinearnu interpolaciju kroz 4 točke. Odrediti parametarski oblik bilinearne interpolacije V(u,v) ako su poznate vrijednosti u točkama V(0,0) = 2, V(0,1) = 3, V(1,0) = 5, V(1,1) = 4. Kolika je vrijednost za V(1.5, 1.5)?

a) 4,5 b) 3 c) 5 d) 3,5 e) ništa od navedenog

6. Kronološki poredati sljedeće aktivnosti koje se pojavljuju u stvaranju i prikazu jednog okvira 3D scene (nanižite redne brojeve slijeva nadesno): **1.** pozivanje OpenGL funkcija iz procesa operacijskog sustava; **2.** preslikavanje teksture na poligone **3.** pretvorba informacije iz slikovne prikazne memorije u analogni oblik; **4.** FSAA (engl. *full screen anti aliasing*); **5.** projekcija 3D prostora na 2D ravninu.

a) 1 5 4 3 2 b) 1 2 5 4 3 c) 5 2 4 1 3 d) 1 5 2 4 3 e) ništa od navedenog

7. Neka je očište (kamera) u točki O = (0, 0, 0) radnog 3D prostora, os kamere usmjerena prema pozitivnom dijelu z-osi, a projekcijska ravnina kamere $z = 4$. Izračunati xy koordinate točke koja se dobije perspektivnom projekcijom točke T = (8, 3, 7).

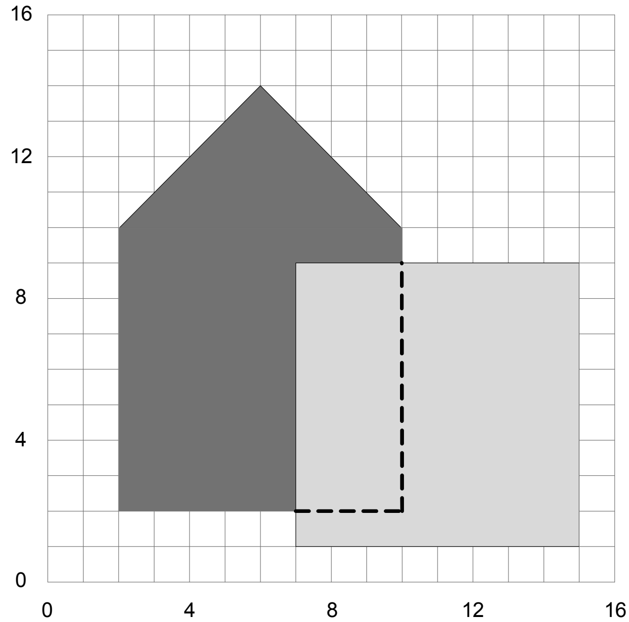
a) (7/32, 7/12) b) (12/7, 32/7) c) (32/7, 12/7) d) (7/32, 12/7) e) ništa od navedenog

8. Odredite kakav je odnos točaka T_1=(1 3 7) , T_2=(-1 4 5) i trokuta zadanog vrhovima: V_1=(-3 5 3), V_2=(-2 6 3) i V_3=(8 -5 17).

a) T_1 nije u ravnini trokuta, T_2 je unutar trokuta, u ravnini trokuta
b) T_1 je izvan trokuta, u ravnini trokuta, T_2 nije u ravnini trokuta
c) T_1 je izvan trokuta, u ravnini trokuta, T_2 je unutar trokuta, u ravnini trokuta
d) T_1 je unutar trokuta, u ravnini trokuta, T_2 nije u ravnini trokuta
e) ništa od navedenog

9. Napraviti podjelu prostora Warnock-ovim postupkom (quadtree) za poligone prikazane na slici. Dubina rekurzije je 4. Nacrtati sliku i označiti dobivene prozore sa
(1) poligon je izvan prozora
(2) poligon siječe prozor ili je u prozoru
(3) poligon prekriva prozor
(4) više poligona prekriva prozor

Površina označena brojem 3 je:
a) 21
b) 35
c) 29
d) 47
e) ništa od navedenog




```
GLint faces [6][4] = {
  {0, 1, 2, 3}, {3, 2, 6, 7}, {7, 6, 5, 4},
  {4, 5, 1, 0}, {5, 6, 2, 1}, {7, 4, 0, 3} };
GLfloat v[8][3] = {
  {0.0, 0.0, 0.0}, {1.0, 0.0, 0.0}, {1.0, 1.0, 0.0}, {0.0, 1.0, 0.0},
  {0.0, 0.0, 1.0}, {1.0, 0.0, 1.0}, {1.0, 1.0, 1.0}, {0.0, 1.0, 1.0}
};
void display (void)
{
  int i;
  for (i = 0; i < 3; i++) {
    glBegin(GL_QUADS);
    glVertex3fv(&v[faces[i][0]][0]);
    glVertex3fv(&v[faces[i][1]][0]);
    glVertex3fv(&v[faces[i][2]][0]);
    glVertex3fv(&v[faces[i][3]][0]);
    glEnd();
  }
}
```

10. Što će biti nacrtano na ekranu, izvršavanjem slijedećeg programskog odsječka

a) 3 kocke
b) 3 kvadrata koji imaju zajednički vrh
c) 3 odvojena kvadrata
d) 3 povezana kvadrata
e) ništa od navedenog

+++2. Domaća Zadaća+++

1. Zadane su dvije dužine u ravnini. Dužina p1 zadana je točkama V1(-7.19 , 7.25) i V2(-9.65 , 5.66), a dužina p2 točkama V3(-5.32 , -18.75) i V4(0.35 , -20.29). Dužina p1 preslikava se u p2 translacijom,rotacijom i jednolikim skaliranjem (tim redosljedom). Naći matricu transformacije.

2. Za pravac G1 zadan u parametarskom obliku te ravninu R u imlpicitnom obliku, odredite sjecište u homogenom prostoru:

$$G1 = [t\ 1]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

R = [-2, 1, 1, 1]Odredite sjecište (x1, x2, x3, x4) u homogenom prostoru.

3. Zadani su centar projekcije C(43, 36, 41), dužina V1(34, 17, 27) - V2(28, 30, 18) te ravnina projekcije R: 16x + 4y + 14z + 6 = 0. Odrediti perspektivnu projekciju dužine na ravninu.

4. Odredite koje su transformacije obavljene i tablicu upišite parametre tih transformacija! Ako je broj transformacija manji od broja redaka u tablici, preostale retke ostavite prazne. Retci se ne smiju preskakati! Originalni objekt iscrtan je crnom bojom, a objekt dobiven transformacijama kombinacijom boja. U slučaju rotacije, kut upisivati u treći stupac tablice, a četvrti ostaviti prazan! Nakon unosa svakog retka tablice kliknite na prvi stupac iste.

5. Izgradite BSP stablo

6. Odaberite redoslijed iscrtavanja

7. Izaberite čvor u kojem se nalazi očište

8. Zadana je pravac s karakterističnom matricom G i točka T: (0, -15, 14). Odredite udaljenost d točke T od pravca p.

$$G = \begin{bmatrix} -15 & 6 & -12 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Odredite parametarski oblik bilinearne interpolacije V(u, v), ako su poznate vrijednosti u točkama:

V(0.00,0.00)=14.00
V(1.00,1.00)=14.00
V(0.00,1.00)=15.00
V(1.00,0.00)=17.00

Kolika je vrijednost za V(0.75, 0.23)?

10. DDA algoritmom nacrtati liniju na rasteru između zadanih točaka T0 i T1. U kućice upisati vrijednost parametra Xf iz algoritma. Vrijednost u kućici mora biti jednaka vrijednosti Xf prije "IF" grananja. Podatke za T0 i T1 nije potrebno unositi.
NAPOMENE: 1) u svakom RETKU između zadanih točaka smije postojati TOČNO JEDAN slikovni element!
2) Ishodište (točka (0, 0)) se nalazi u gornjem lijevom kutu prikaza, a y koordinata RASTE prema dolje
3) Točnost rješenja provjerava se na dvije decimale. Decimalne brojeve pisati s decimalnom točkom.

RJEŠENJA:

*****1. (2.MI)*****

V1(100, 0, 20) t=0
V2(500, 0, 50) t=1
H=20
Potreban je pravac koji prolazi točkama V1 i V2. On se dobije iz vektora između te dvije točke, te jedne od tih točaka. Za traženu točku V3 znamo da je na tom pravcu.
Xu = xv2 – xv1
Yu = yv2 – yv1

$$u = 400\vec{i} + 30\vec{k}$$

$$p = \begin{bmatrix} 400 & 0 & 30 & 0 \\ 100 & 0 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{V3} = (x, y, z, h) = (x, 0, 30t + 20, 1) = (400t + 100, 30t + 20, 1)$$

$$\text{V1} \cdot \text{M1} = (100,0,0,1)$$

$$\text{V2} \cdot \text{M2} = (500,0,0,\frac{5}{2}) = (200, 0, 0, 1)$$

$$\vec{u} = 100\vec{i}$$

$$p' = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$u = 0.8$$

$$x' = 100u + 100 = 180$$

$$y' = 0$$

$$z' = 0$$

$$h' = 1$$

Dvije originalne točke se translatira na zadanu udaljenost. Parametar *u* je zapravo samo parametar *t*, ali u pravcu koji je određen translatiranim točkama. Translatiraju se točke, te se iz njih izračuna pravac p'. Nakon toga se uvrsti parametar *u* i izračunaju se podaci točke koja je ekvivalentna translatiranoj V3.
Sada znamo V3'. V3 znamo u ovisnosti o parametru *t* pomoću jednadžbe pravca između netranslatiranih V1 i V2. Obavi se translacija parametarski ovisne V3, te se translatirane koordinate izjednače s onima koje su izračunate iz jednadžbe translatiranog pravca.

$$x = 400 + 100$$

$$x' = \frac{x}{h'}$$

$$h' = \frac{Z}{H} = \frac{3}{2}t + 1$$

$$180 = \frac{400t}{\frac{3}{2}t + 1}$$

$$270t + 180 = 400t + 100$$

$$130t = 80$$

$$t = \frac{8}{13}$$

$$z = 30t + 20 = 38.46$$

Na kraju se izračuna parametar *t*, a pomoću njega i originalne jednadžbe pravca, tražena perspektivno korektna koordinata z.

2. (2.MI)

Zadane su početna i završna točka. V_0=(10 20 10), V_2=(5 30 10) , Bezierove krivulje u radnom prostoru i derivacija u završnoj točki V_2'=(5 10 0). Odrediti kvadratnu aproksimacijsku Bezier-ovu krivulju upotrebom Bernstein-ovih težinskih funkcija. Odrediti točku krivulje za iznos parametra t=0.3.

$$b_{i\,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i}$$

- krivulja je određena s tri točke (V_0, V_1, V_2) i njezin stupanj (n) = 2

- računamo Bernstein-ove težinske funkcije prema formuli (1)

$$b_{0,2} = \frac{2!}{0!\cdot 2!} \cdot t^0 \cdot (1-t)^2 = (1-t)^2$$
$$b_{1,2} = \frac{2!}{1!\cdot 1!} \cdot t^1 \cdot (1-t)^1 = 2t(1-t)$$
$$b_{2,2} = \frac{2!}{2!\cdot 0!} \cdot t^2 \cdot (1-t)^0 = t^2$$

- pomoću težinskih funkcija određujemo Bezier-ovu funkciju

$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \vec{r}_i \cdot b_{i,n}(t)$, gdje su:

n – stupanj krivulje
$\vec{r}_i$ – vrhovi kontrolnog poligona (radijus – vektori zadanih točaka)
t – parametar
$\vec{p}(t)$ – točka na krivulji

$$\vec{p}(t) = \sum_{i=0}^{2} \vec{r}_i \cdot b_{i,n}(t) = \vec{r}_0 \cdot (1-t)^2 + \vec{r}_1 \cdot 2 \cdot t \cdot (1-t) + \vec{r}_2 \cdot t^2$$

nepoznanica je $\vec{r}_1$

$$p'(t) = \vec{r}_0 \cdot (-2 + 2 \cdot t) + 2 \cdot \vec{r}_1 \cdot (1 - t - t) + \vec{r}_2 \cdot 2 \cdot t$$

završna točka ima parametar t = 1

$$\begin{aligned} \vec{p}\,'(1) &= \vec{r}_0 \cdot (-2+2) + 2 \cdot \vec{r}_1 \cdot (-1) + 2 \cdot \vec{r}_2 \\ &= -2 \cdot \vec{r}_1 + 2 \cdot \vec{r}_2 \\ &= V_2' \end{aligned}$$

$$-2 \cdot \vec{r}_1 + 2 \cdot (5 \quad 30 \quad 10) = (5 \quad 10 \quad 0)$$
$$\vec{r}_1 = \frac{(5 \quad 10 \quad 0)}{-2} + (5 \quad 30 \quad 10)$$
$$\vec{r}_1 = (2.5 \quad 25 \quad 10)$$

---

kad znamo $\vec{r}_1$, možemo uvrstiti zadani parametar t = 0.3 u jednadžbu

p (0,3) = $(0.7)^2$ (10 20 10) + 2·0.3·0.7 (2.5 25 10) + $(0.3)^2$ (5 30 10)
= (0.7^2 ·10 + 2 ·0.3·0.7 ·2.5 + 0.3^2 ·5 | 0.7^2 ·20 + 2 ·0.3·0.7 ·25 + 0.3^2 ·30 | 0.7^2 ·10 + 0.2 ·0.3·0.7 ·10 + 0.3^2 ·10)
= (6.4   23   10)

*****3. (2.MI)*****

Za rješavanje ovog zadatka zapravo nije potrebno znati toliko o krilatim bridovima. Zadatak se može riješiti tako da se pregleda zapis svakog brida, specifično, njegove krajnje točke. Bridovi susjedni zadanom vrhu su oni kojima taj vrh pripada, te je samo potrebno malo pripaziti i izdvojiti te bridove.
Za one koji pak žele znati što je to „krilati brid", to je način zapisa bridova. Naizgled se čini složenim zapisivati više od osnovnog podatka (dvije rubne točke), ali u praksi se isplati zapisati malo više podataka o susjedima svakog brida.
Svaki brid je određen sa dvije točke, stoga su one zapisane. Uz točke, brid određuju i dva poligona, dio čijih rubova on određuje. U zapis stavljamo i te poligone jer je to koristan podatak u nekim slučajevima.
Iz krajnjih točaka brida izlazi nepoznati broj bridova, ali rubne točke brida također su i vrhovi poligona između kojih se nalazi. Iz svake točke, također, izlaze dva brida, koji dalje određuju poligone. Ako bi njih zapisali, bilo bi moguće pronaći sve bridove nekog poligona krećući se po samo po zapisima bridova, bez potrebe za skakanjem na zapis vrhova i natrag. Stoga se u zapis za trenutni brid se zapisuju i „kazaljke" na ta četiri brida. Zapis se zove „krilati brid" jer svaki brid, ako se istaknu ta četiri bridovi zapisana u njegovom opisnom polju, izgleda kao da ima krila.

4. (2.MI) – PRVI NAČIN

V_0 (10 20 10)
V_1 (50 40 20) zadaju P

T (0 10 10) $\rightarrow$ oko P za +30 (counter clockwise)

<u>IDEJA:</u>
1. dovesti pravac u ishodište (V_0 u ishodište)
2. poklopiti pravac sa x-osi (točka T leži u ravnini zy)
3. rotacija oko x-osi za 30°
4. obrni 2 i 1
5. izmnoži sve matrice

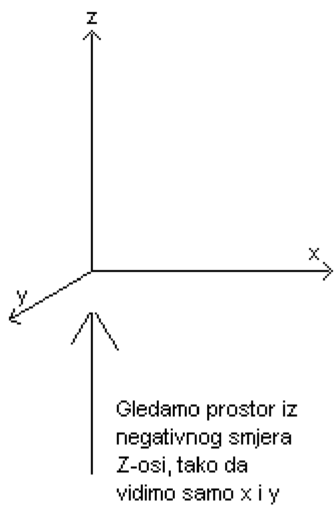
$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -10 & -10 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pomak pravca u ishodište}$$

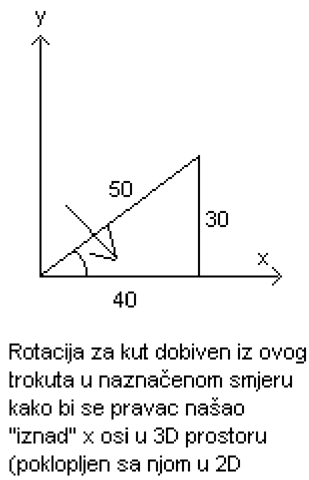
2. Rotiramo pravac oko z-osi da dođe iznad x-osi, a zatim oko y-osi da se poklopi sa x-osi.

Određujemo kut rotacije oko z-osi:
(gledamo samo x i y koordinate)

$V_0' = V_0T_1 = (0, 0, 0)$
$V_1' = V_1T_1 = (40, 30, 10)$

negativan smjer!
α = - arctg 30/40
α = - 36,86
sin α = - 3/5
cos α = 4/5
sliku gledamo iz -z





$$T_2 = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 & 0 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rotacija oko z osi u smjeru kazaljke na satu za alfa = -36,87 (suprotno}$$
od kazaljke na satu za 36,87)

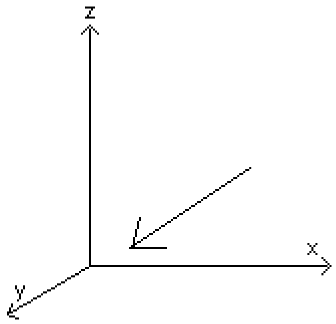
Određujemo kut rotacije oko y-osi:
(gledamo x i z koordinate)

$V_0'' = V_0'T_2$
$V_0'' = (0, 0, 0)$ (zanemarujemo y kasnije)

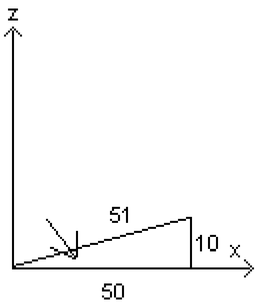
$V_1'' = V_1'T_2$
V_1 = 50 0 10 1

Kut:

$\beta = \text{arctg } 10/50$
$\beta = +\,11{,}31$ (smjer suprotno od kazaljke na satu je pozitivan!)
$\sin \beta = 0{,}196$
$\cos \beta = 0{,}98$



Sliku gledamo iz negativnog smjera y osi, tako da vidimo samo x i z os. Pravac je sada postavljen iznad x osi, i treba ga "spustiti na nju"



Pravac je "iznad" x osi ako se gleda iz -z smjera. Rotacijom za označeni kut kad se gleda iz smjera -y on se poklapa sa x osi u 3D prostoru. Važno je napomenuti da se pri ovoj rotaciji uzimaju u obzir koordinate izračunate NAKON prethodne rotacije (y koordinata mora biti 0 ili blizu nule)

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & -0.196 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.196 & 0 & 0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ rotacija oko y za } +11{,}31 \text{ } (11{,}31^\circ \text{ u smjeru kazaljke na satu})$$

$\cos 30 = 0{,}866$ $\sin 30 = 0{,}5$

$$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ rotacija oko x-osi za } +30^\circ \text{ (x se sada poklapa s pravcem)}$$

$$T_5 = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 & 0.196 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.196 & 0 & 0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ oko y za } -11{,}31^\circ$$

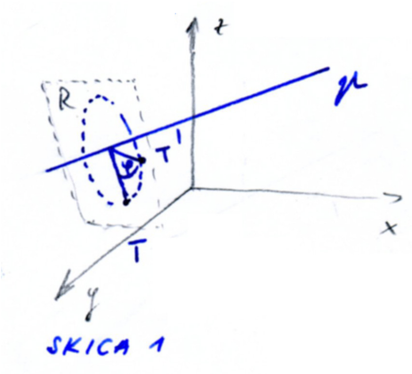
$$T_6 = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ oko z za } +36{,}87^\circ$$

$$T_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 10 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow T_5, T_6, T_7 \text{ obrću } T_3, T_2, T_1$$

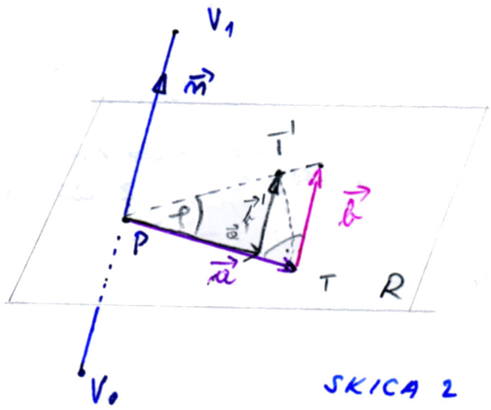
*****4. (2.MI) – DRUGI NAČIN*****

Zadan je pravac p točkama $V_0 = (10\ \ 10\ \ 10)$ i $V_1 = (50\ \ 40\ \ 20)$. Odrediti rotiranu točku T' koju dobijemo rotacijom točke $T = (0\ \ 10\ \ 10)$ oko pravca p za +30˚ (+ znači suprotno smjeru kazaljke na satu) gledano iz V_1 u V_0.

VELIKA mana prethodnog postupka je u tome što se mora računati 3 inverza matrice i potom množiti 7 matrica; drugi postupak je malo kompliciraniji za shvatiti, ali zato iziskuje mnogo manje računa.



Rotirati točku oko pravca je isto što i rotirati točku u ravnini oko neke druge točke, s time da se radi o ravnini kojoj pripada točka T (koju želimo rotirati) i proizvoljna točka pravca p, a pravac je okomit na ravninu



- vektor normale odredimo iz točaka V_0 i V_1

$\vec{n} = \overrightarrow{(V_1 - V_0)} = (40\ \ 30\ \ 10) = (4\ \ 3\ \ 1)$

- odredimo ravninu R pomoću vektora normale $\vec{n}$ i točke T

$$R\ \ldots\ 4x + 3y + z + D = 0$$

$$T = (0\ \ 10\ \ 10)$$

$$30 + 10 + D = 0$$

$$D = -40$$

R ... 4x + 3y + z - 40 = 0

- odredimo jednadžbu pravca p

$$p...\begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 10 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ vektor nosioc pravca} \\ \rightarrow \text{ jedna točka pravca} \end{array}$$

Sada možemo odrediti točku p koja je zajednička pravcu p i ravnini R

4 (4t + 10) + 3 (3t + 10) + t + 10 – 40 = 0

26 t = – 40

x = 4t + 10 = 50/13 y = 3t + 10 = 70/13 z = t + 10 = 110/13 n = 1

$$P = \begin{pmatrix} \frac{50}{13} & \frac{70}{13} & \frac{110}{13} \end{pmatrix}$$

Prvo definiramo točku T':

$$T' = P + \vec{a} \cdot \cos\varphi + \vec{b} \cdot \sin\varphi = P + \vec{a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \vec{b} \cdot \frac{1}{2}$$

☼ koga zanima zašto se ovo radi na ovaj način, neka pogleda pojašnjenje, a ostali neka naštrebaju formulu i zapamte sliku 2 da znaju što znači koja oznaka

2. Odredimo vektor $\vec{a} = \left(\overrightarrow{PT}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{50}{13} & \frac{60}{13} & \frac{20}{13} \end{pmatrix}$

3. Odredimo vektor $\vec{b}$ $\quad \vec{b} = \vec{n}_a \times \vec{a}$

4. Radi lakšeg izračuna normiramo vektor n da bude jedinični

$$\vec{n}_a = \frac{\vec{n}}{|n|} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{\vec{n}}{\sqrt{26}}$$

5. $\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ -\frac{50}{13} & \frac{60}{13} & \frac{20}{13} \end{pmatrix} = \frac{10}{13 \cdot \sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ -5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{10}{13 \cdot \sqrt{26}} \cdot \left(0 \cdot \vec{i} - 13\vec{j} + 39\vec{k}\right)$

6. Izračun točke T

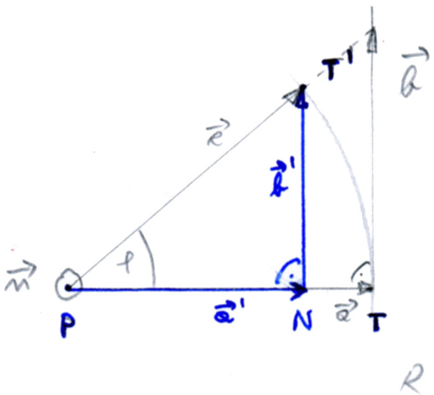
$$T' = \begin{pmatrix} \frac{50}{13} & \frac{70}{13} & \frac{110}{13} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{50}{13} & \frac{60}{13} & \frac{20}{13} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{13 \cdot \sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -13 & 39 \end{pmatrix}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 5 & 7 & 11 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -13 & 39 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{10}{13} \cdot \begin{pmatrix} 0.6696 & 10.9214 & 16.55 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.51 & 8.40 & 12.74 \end{pmatrix}$$

☼ Izvod



SKICA 3

U ravnini **R** točka **T** rotira oko točke **P**, zato su vektori $\vec{a}$ i $\vec{c}$ jednake duljine $|\vec{a}| = |\vec{c}|$

Odredimo vektor $\vec{b}$ koji pripada ravnini **R** i okomit je na vektor $\vec{a}$**.** Kako pripada ravnini, okomit je i na normalu ravnine $\vec{n}$, pa ga možemo dobiti iz vektorskog umnoška istih

$\vec{b} = \vec{a} \times \vec{n}$

Naš cilj je dobiti točku **T'** iz točke **P** kao zbroj vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$**.** Međutim, vidimo da nas taj zbroj ne može dovesti u **T'**. Stoga određujemo vektore $\vec{a}\,'$ i $\vec{b}\,'$, $\vec{a}\,' \parallel \vec{a} \wedge \vec{b}\,' \parallel \vec{b}$

Promotrimo **Δ PNT'** čije su stranice $|\vec{c}|$, $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$**.**

Kako je trokut pravokutan, vrijedi:

$|\vec{a}| = |\vec{c}| \cdot \cos\varphi$ $\quad |\vec{b}\,'| = |\vec{c}| \cdot \sin\varphi$ iz $\quad |\vec{c}| = |\vec{a}|$ => $\quad |\vec{a}\,'| = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$ $\quad |\vec{b}\,'| = |\vec{a}| \cdot \sin\varphi$

Smjer vektora $\vec{a}\,'$ je isti kao i smjer od $\vec{a}$, pa $\vec{a}\,'$ možemo dobiti kao umnožak njegove duljine i jediničnog vektora u smjeru $\vec{a}$, $\hat{a}$

$$\vec{a}\,' = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \cdot \hat{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a} \cdot \cos\varphi$$

slično

$$\vec{b}\,' = |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a}| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Da bismo si olakšali račun, pri dobivanju vektora $\vec{b}$ možemo umjesto $\vec{n}$ uzeti $\hat{n}$, tj jedinični vektor u smjeru $\vec{n}$, time će vrijediti:

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \qquad \vec{b} = \hat{n} \times \vec{a} \qquad |\vec{b}| = |\vec{a}|$$

Račun za $\vec{b}\,'$ nam sada glasi:

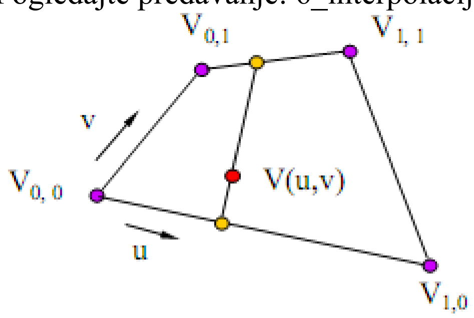
$$\vec{b}\,' = \frac{\vec{b} \cdot |\vec{a}| \cdot \sin\varphi \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} \cdot \sin\varphi$$

*****5. (2.MI)*****

V(0,0) = 2
V(0,1) = 3
V(1,0) = 5
V(1,1) = 4
V(1.5, 1.5)=?

Postupak:
Blilinearna interpolacija – radimo sa 4 točke.
U svakoj je neka vrijednost
Mozemo ih gledati kao da razapinju neki četverokut (vidi priloženu sliku).
Ovisno o tome gdje se nalazimo u polju oko njih gledamo doprinos pojedine točke
Doprinos se računa po sljedećoj formuli. Potrebno je uočiti da će podebljani članovi formule osigurati da točka V(0,0) daje najveći doprinos kad a se nalazimo blizu nje. Sukladno tome, i ostale tri točke daju najveći doprinos kada smo bliže njima (bliže ovdje znači da su u i v parametri funkcije bliže parametrima zadane točke).
V(u,v) = (**1-u**)*(**1-v**)*V(0,0) + (**1-u**)***v***V(0,1) + **u***(**1-v**)*V(1,0) + **u*****v***V(1,1)

Pogledajte predavanje: 6_interpolacija_krivulje, slajd 3. ak.god. 2007/2008



Vrijednost koju funkcija vrati je pozicija na dužini omeđenoj žutim točkama na slici.
Ukratko – za točno riješiti ovaj zadatak na ispitu dovoljno je samo ubaciti zadane podatke u formulu.

V(u,v) = (1-1.5)*(1-1.5)*2 + (1-1.5)*1.5*3 + 1.5*(1-1.5)*5 + 1.5*1.5*4 = 3.5

*****6. (2.MI)*****

d)

*****7. (2.MI)*****

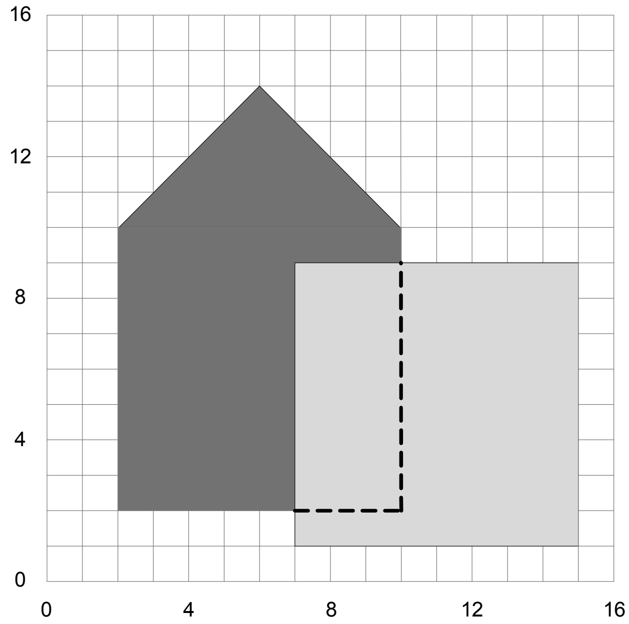
Pogledaj 2. DZ, 3. zadatak - isti postupak, drugaèiji parametri

*****8. (2.MI)*****

U IZRADI

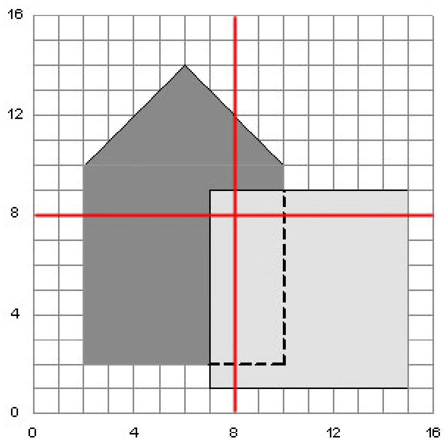
*****9. (2.MI)*****

9. Napraviti podjelu prostora Warnock-ovim postupkom (quadtree) za poligone prikazane na slici. Dubina rekurzije je 4. Nacrtati sliku i označiti dobivene prozore sa
(1) poligon je izvan prozora
(2) poligon siječe prozor ili je u prozoru
(3) poligon prekriva prozor
(4) više poligona prekriva prozor
Odrediti površinu označenu brojem 3.

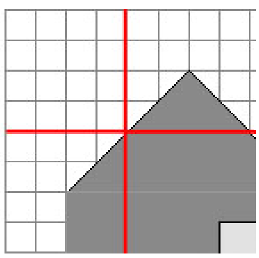


Warnock-ov algoritam je rekurzivan algoritam koji služi uklanjanju skrivenih površina. Može ga se (pojednostavljeno) prikazati ovako:

```
Warnock(kvadrat){
        AKO (uvjet 1) označi kvadrat sa 1;
        INAČE AKO (uvjet 2) označi kvadrat sa 2;
        INAČE AKO (uvjet 3) označi kvadrat sa 3;
        INAČE AKO (uvjet 4) označi kvadrat sa 4;
        INAČE {     podijeli kvadrat na 4 manja;
                    Warnock(kvadrat_1);
                    Warnock(kvadrat_1);
                    Warnock(kvadrat_1);
                    Warnock(kvadrat_1);
              }
        povratak;
}
```

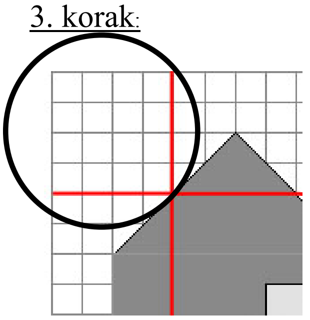


1. korak: Cijeli kvadrat
Nemamo zadovoljene uvjete pa se on dijeli na 4 dijela i rekurzivno se poziva algoritam za svakoga od njih.

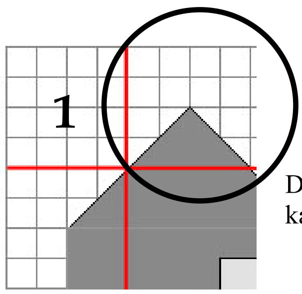


2. korak: Gornji lijevi kvadrat. I ovdje nemamo čistu situaciju pa se kvadrat opet dijeli.

3. korak:

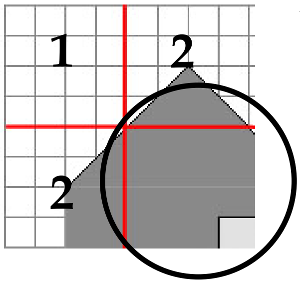


Gornji lijevi kvadrat, poligon izvan prozora (1. uvjet) zapišemo 1

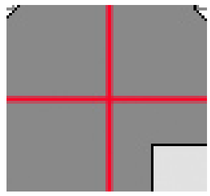


Gornji desni kvadrat, poligon siječe prozor ili je u prozoru (2. uvjet), zapišemo 2.

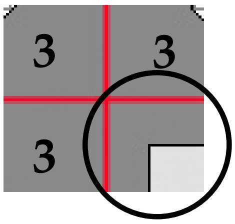
Donji lijevi kvadrat, ista situacija kao i ranije, zapišemo 2.



U donjem desnom kvadratu nemamo čistu situaciju, moramo opet dijeliti…

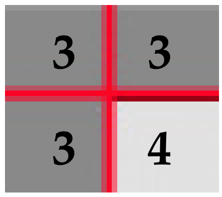


<u>4. korak</u>



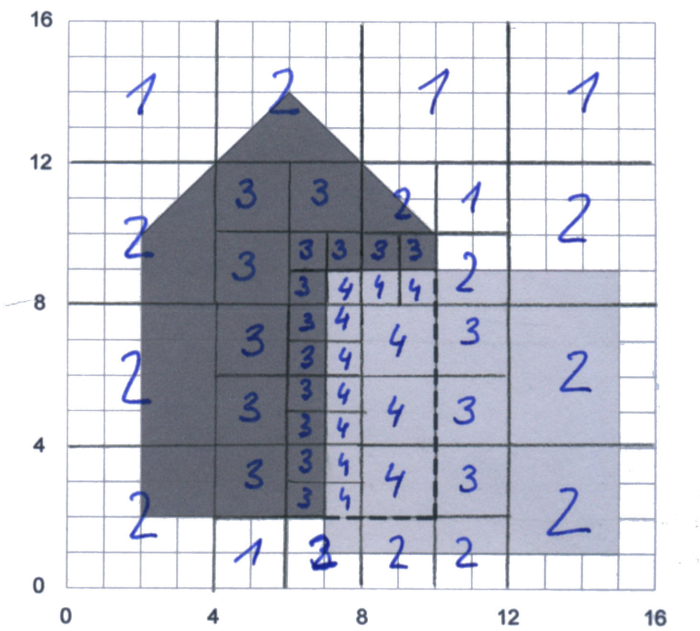
U donjem desnom kvadratu nemamo čistu situaciju, moramo opet dijeliti…

<u>5. Korak</u>



Napokon gotovo. Vraćamo se natrag i započinjemo analizu gornjeg desnog velikog kvadrata…

<u>Konačno rješenje:</u>



Ukupna površina označena brojkom 3 je 47.

*****10. (2.MI)*****

```
GLint faces [6][4] = {
  {0, 1, 2, 3}, {3, 2, 6, 7}, {7, 6, 5, 4},
  {4, 5, 1, 0}, {5, 6, 2, 1}, {7, 4, 0, 3} };
GLfloat v[8][3] = {
  {0.0, 0.0, 0.0}, {1.0, 0.0, 0.0}, {1.0, 1.0, 0.0}, {0.0, 1.0,
0.0},
  {0.0, 0.0, 1.0}, {1.0, 0.0, 1.0}, {1.0, 1.0, 1.0}, {0.0, 1.0,
1.0}
};
void display (void)
{
  int i;
  for (i = 0; i < 3; i++) {
    glBegin(GL_QUADS);
    glVertex3fv(&v[faces[i][0]][0]);
    glVertex3fv(&v[faces[i][1]][0]);
    glVertex3fv(&v[faces[i][2]][0]);
    glVertex3fv(&v[faces[i][3]][0]);
    glEnd();
  }
}
```

Da bismo mogli uspješno i točno riješiti ovaj zadatak, potrebno je razumjeti što radi zadani programski odsječak.
GLint faces je dvodimenzionalno polje. Svaki pojedini član lan tog polja je niz cijelih brojeva, koji predstavljaju redne brojeve vrhova poligona.
GLfloat v je također dvodimenzionalno poje čiji je svaki član niz od tri realna broja.
U funkciji display tri puta se izvodi blok naredbi uokviren s glBegin() i glEnd().
Funkcija glBegin označaa početak zadavanja vertexa (vrhova), koji se upisuju u međuspremnik (buffer). Parametar koji funkcija prima odrđuje način povezanosti zadanih vrhova. (GL_QUADS) označava ispunjene kvadrate, GL_LINES generirao bi žičani oblik. Unutar glBegin i glEnd mogu se zadavati i boje uz pojedine vrhove,
GL_TRIANGLE_STRIP dva trokuta…
Za detaljnu listu svih naredbi koje se mogu zadavati unutar glBegin i glEnd, pogledati dokumentaciju OpenGL-a.

Funkcija glVertex zadaje jednu točku. Sufiks funkcije određuje parametre koje ona prima.
glVertex**abc:**

a: broj parametara koje funkcija prima, ne može se izostaviti
b: tip podataka parametara (i – int, f – float, b – byte…), ne može se izostaviti
c: Ukoliko se ovdje napiše „v“, funkcija umjesto broja parametara određenog brojem a prima polje koje se sastoji od a parametara. Ukoliko se izostavi, prima se a parametara.

Funkcija u ovom zadatku ima sufiks 3fv, što znači da prima 3 elementa, tipa float, kao polje.

Izraz iz programa potrebno je promatrati u nekoliko koraka:

```
for (i = 0; i < 3; i++) {
   glBegin(GL_QUADS);
            glVertex3fv(&v[faces[i][0]][0]);
```

```
            glVertex3fv(&v[faces[i][1]][0]);
            glVertex3fv(&v[faces[i][2]][0]);
            glVertex3fv(&v[faces[i][3]][0]);
    glEnd();
```

U for petlji zadaju se četiri vrha.
faces[i][0] – brojem i adresiramo jednu grupu od četiri elementa unutar polja faces (vidi gore)
v[faces[i][0]][0] adresirati će prvi član jedne od grupa unutar polja v. Redni broj člana biti će određen brijem dobivenim iz polja faces. U konkretnom slučaju, ako je i=1, faces[1][0] iznosi 3 (vidi gore, element je podebljan).
V[3][0] adresira prvi član četvrtog niza float brojeva u polju v (vidi gore, podebljan crveno).
& v[3][0] daje adresu cijelog niza uokvirenog viticama u kojem se taj član nalazi.
Kada se to polje pošalje u glVertex, on ga interpretira kao niz od 3 realna broja, i prema njima odredi koordinate točke.

Iz ovoga se vidi da je smisao polja v određianje vrhova (njih 8), a smisao polja faces određivanje grupa od četiri vrha. U četiri poziva glVertex funkcije ucrtali smo četiri točke zadane u nizu unutar polja faces nizom adresiranim parametrom i. gl_quads govori da se radi o ispunjenim kvadratima.

RJEŠENJE:
Prvi kvadrat koristi niz {0, 1, 2, 3} da odredi svoje vrhove. Drugi i treći koriste nizove {3, 2, 6, 7} i {7, 6, 5, 4}. Prvom i drugom kvadratu zajednička je stranica određena vrhovima 2 i 3. drugom i trećem zajednička je dužina određena vrhovima 6 i 7. Iz toga se vidi da se iscrtavaju tri povezana kvadrata

+++1. (2.DZ)+++

$\overline{\text{V1V2}}$

$\overline{\text{V3V4}}$

V1 (-8.32, -9.82)
V2 (7.08, -9.18)
V3 (-22.03, 9.96)
V4 (13.65, -27.56)

afina matrica transformacija, M=? V1 $\rightarrow$ V3; V2 $\rightarrow$ V4

1. Translacija u ishodište

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_1 & -y_1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Račun kuta rotacije

a) $\overline{\text{V1V2}}$ $\rightarrow \cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \rightarrow \alpha$

b) $\overline{\text{V3V4}}$ $\rightarrow \cos\beta = \dfrac{x_4 - x_3}{\sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}} \rightarrow \beta$

3. Rotacija za $-\alpha = \varphi$

$$M2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Skaliranje u smjeru x-osi

$$M3 = \begin{pmatrix} \dfrac{d_{34}}{d_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Rotacija za $+\beta = \varphi$

$$M4 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Translacija iz ishodišta u (x3, y3)

$$M5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_{12} = 15.41$$
$$d_{34} = 51.78$$

$$\alpha = 2.39°$$
$$\beta = -46.44°$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1611}{2500} & -\frac{37}{50} & 0 \\ \frac{37}{50} & \frac{1611}{2500} & 0 \\ \frac{-146903}{15623} & \frac{1266401}{125000} & 1 \end{pmatrix}$$

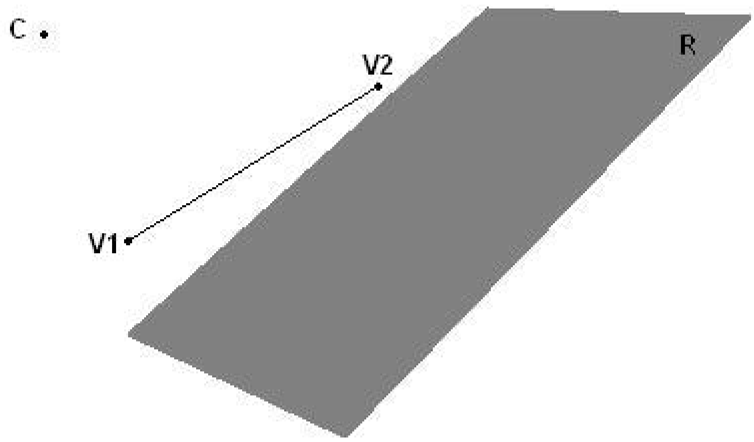
+++2. (2.DZ)+++

$$\left.\begin{aligned}
&\text{pravac}\quad G=\begin{bmatrix} t & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&\text{ravnina}\quad R=\begin{bmatrix} u & v & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\}\ \text{Računamo presjek}$$

Zbog greške u postupku, biti će objašnjen u kasnijoj verziji zbirke.

+++3. (2.DZ)+++

Zadani su centar projekcije C(43, 36, 41), dužina V1(34, 17, 27) - V2(28, 30, 18) te ravnina projekcije R: 16x + 4y + 14z + 6 = 0. Odrediti perspektivnu projekciju dužine na ravninu.



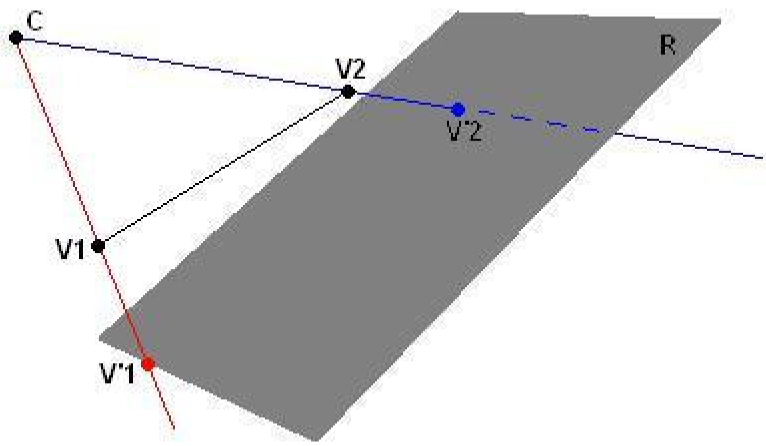
C(43, 36, 41)
V1(34, 17, 27)
V2(28, 30, 18)
R = 16x + 4y + 14z + 6 = 0

$p1 \longleftrightarrow \overrightarrow{V1C}$ $\quad\quad \vec{u}_{p1} = 9\vec{i} + 19\vec{j} + 14\vec{k}$

$$p1 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 19 & 14 & 0 \\ 43 & 36 & 41 & 1 \end{bmatrix}$$

$p2 \longleftrightarrow \overrightarrow{V2C}$ $\quad\quad \vec{u}_{p2} = 15\vec{i} + 6\vec{j} + 23\vec{k}$

$$p2 = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 6 & 23 & 0 \\ 43 & 36 & 41 & 1 \end{bmatrix}$$



V1'
16(9t+43)+4(9t+36)+14(14t+41)+6=0
t(144+76+196)+(688+144+574)+6=0

416t=-1412

$t=-\dfrac{353}{104}$

V1' se izračuna iz jednadžbe pravca sa izračunatim parametrom t.
V1' (12.45, -28.49, -6.52)

Ideja zadatka:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Centar projekcije}\\ \text{i}\\ \text{Vrhovi dužine}\end{array}\right\}\text{pravci}$$

Napraviti 2 pravca
Oba pravca prolaze kroz centar projekcije i jedan kroz jedan vrh duzine, a drugi kroz drugi vrh.
Mjesta proboda tih pravaca i zadane ravnine su točke tražene u zadatku.

$$p2=\begin{bmatrix} t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15 & 6 & 23 & 0 \\ 43 & 36 & 41 & 1\end{bmatrix}$$

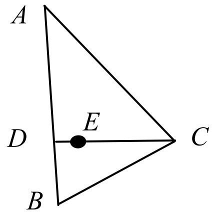
V2'
V2'=(15t+43, 6t+36, 23t+41)
R(V2')=0
16(15t+43)+4(6t+36)+14(23t+41)+6=0
(240t+24t+322t)+(688+144+574+6)=0
586t=-1412
t=-2.409
V2'(6.85, 21.54, -14.42)

ZEMRIS 16.6.2008.

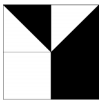
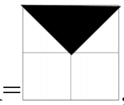
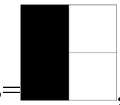
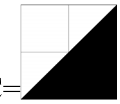
Grupa A

Završni ispit iz Interaktivne računalne grafike

1. Izračunati intenzitet svjetla u točki *E* na slici prema Gouraudovom sjenčanju, ako intenziteti u točkama *A*, *B*, *C* iznose $I_A=1$, $I_B=1/2$, $I_C=1/4$ i ako je poznato da vrijedi $|AD| = (2/3)\,|AB|$, $|DE| = (1/4)\,|DC|$.

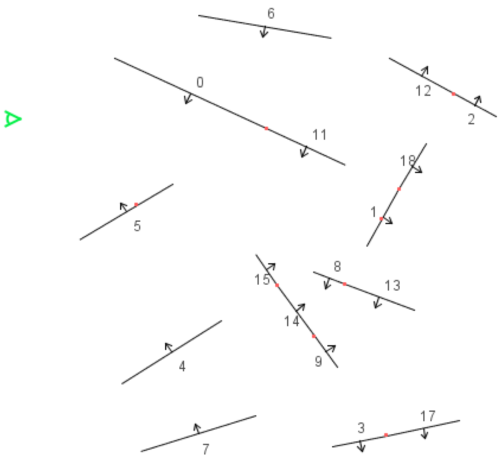


a) 11/24 b) 15/16 c) 9/16 d) 23/24 e) ništa od navedenog

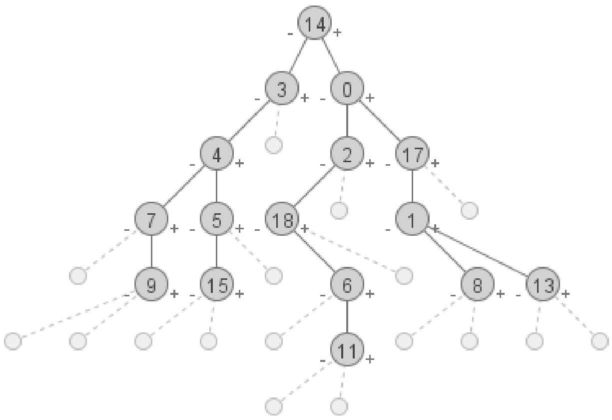
2. Lik  dobije se sljedećim nizom CSG operacija iz likova A=, B=, C= (lik obuhvaća crno ispunjeno područje, ne crte koje označavaju križaljku koordinatnog sustava).

a) (A∩B) ∪ (C−B) b) (A−B) ∪ (C∩B) c) (A−B) ∩ (C∪B) d) (A∪B) − (C∩B) e) ništa od navedenog

3. Zadani su linijski segmenti kako je prikazano na slici (sl. 1). Za zadanu scenu konstruirano je BSP stablo (sl. 2). Potrebno je odrediti redoslijed iscrtavanja linijskih segmenata.



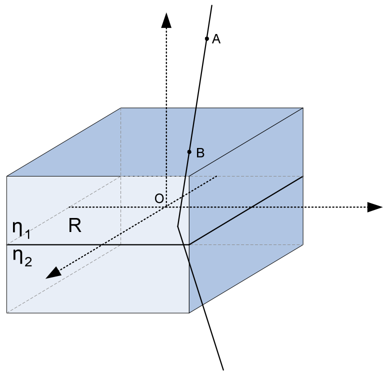
slika 1.



slika 2.

A) 2 18 6 11 0 17 13 1 8 14 3 7 9 4 15 5
B) 2 18 11 6 0 17 8 1 13 14 7 3 4 5 15 9
C) 4 5 15 7 9 3 14 0 17 1 13 8 2 18 6 11
D) 4 5 15 9 7 3 14 1 17 0 13 2 8 18 6 11
E) ništa od navedenog

4. U 3D prostoru zadana je zraka svjetlosti koja prolazi prvo kroz točku A(7, 9, 10), te zatim kroz točku B=(4, 5, 5). Zraka potom pada na ravninu R određenu vektorom normale $\vec{n} = (0,0,1)$ i točkom O=(0,0,0), te se lomi. Ako indeks loma prostora iznad ravnine R (u kojem se nalaze točke A i B) iznosi $\eta_1 = 1.4$, a indeks loma prostora ispod ravnine R iznosi $\eta_2 = 1.2$, odrediti kut lomljene zrake. (Snellov zakon $\sin\theta_1 / \sin\theta_2 = \eta_2 / \eta_1$).



a) 55.6° b) 38.2° c) 45° d) 63.1° e) ništa od navedenog

5. Definirane su 4 točke u 2D prostoru: V0, V1, V2 i V3. Označimo s V(ξ) "krivulju" koja se dobije linearnom interpolacijom redom zadanih točaka. Znači za ξ=0 krivulja prolazi točkom V0, a npr za ξ=2 točkom V2.
U tom slučaju vrijedi: V(0)=(2 2), V(0.5)=(3 3), V(1.5)=(5 3) te V(3)=(8 6). Ako s K(t) označimo aproksimacijsku krivulju Beziera kroz iste točke, koja se točka dobiva za t=0.5?

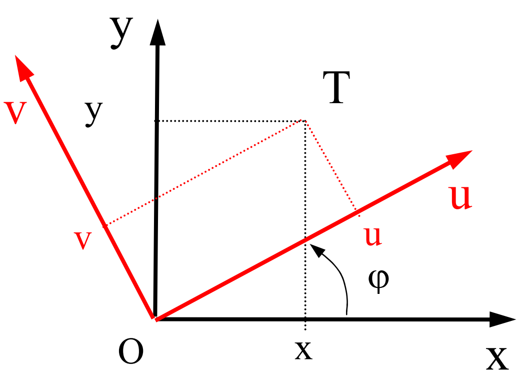
a) (4.5 3) b) (5 3.25) c) (5 3.5) d) (4.75 2.75) e) ništa od navedenog

6. Zadan je poligon vrhovima A=(4 1 4), B=(4 5 4), C=(0 5 4), D=(0 1 4). Točkasti izvor svjetlosti intenziteta Ip=100 nalazi se na mjestu (2 -6 20). Promatrač se nalazi u točki (2 10 14). Ambijentna komponenta svjetlosti iznosi Ia=20. Koristeći model konstantnog sjenčanja izračunajte intenzitet svjetlosti u točki T=(3 2 4). Koeficijenti modela su redom ka=1, kd=ks=0.5, n=2. Zanemarite udaljenosti točkastog izvora i promatrača od promatrane točke, te pripadne vektore računajte u odnosu na centar poligona.

a) I=117.3 b) I=120.3 c) I=133.3 d) I=113.1 e) ništa od navedenog

7. U koordinatnom sustavu Oxy točka T ima koordinate T(x,y)=(3 4). Koordinatni sustav zarotiramo za φ (točku nismo rotirali). U rotiranom koordinatnom sustavu točka ima koordinate T(u, v) = (4 3). Odrediti kut rotacije φ .

a) +20°16″ b) -16°16″ c) -20°16″
d) 16°16″ e) ništa od navedenog



8. Zadana je pravac s karakterističnom matricom G i točka T=(5, 5, 2). Odredite udaljenost d točke T od pravca p.

$$G = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a) d=3.5 b) d=2.18 c) d=3.17 d) d=1,7 e) ništa od navedenog

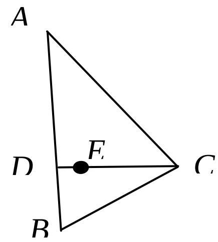
9. Zadan je centar projekcije C=(10 30 20) i dužina točkama V1=(5 10 5), V2=(10 30 5) u radnom prostoru. Odrediti duljinu projicirane dužine na ravninu R=(1 2 3 5).

a) d=42 b) d=36 c) d=40 d) d=38 e) ništa od navedenog

10. U postupku preslikavanja teksture vrijedi:

a) tekstura se preslikava na svaku točku 3D poligona, a zatim se projicira u 2D,
b) za svaki slikovni element projiciranog poligona, određuje se pripadni dio u prostoru teksture koji onda određuje konačnu boju tog slikovnog elementa,
c) za pojedini element teksture određuje se pripadni dio na 3D poligonu kojem se pridjeljuje boja,
d) za svaku *u* ,*v* koordinatu u prostoru teksture odredi se x, y koordinata u prostoru projekcije i pridijeli joj se boja elementa teksture
e) ništa od navedenog

1.Izračunati intenzitet svjetla u točki E na slici prema Gouraudovom sjenčanju, ako intenziteti u točkama A, B, C iznose I_A=1, I_B=1/2, I_C=1/4 i ako je poznato da vrijedi $|AD|$ = (2/3) $|AB|$, $|DE|$ = (1/4) $|DC|$.



a) 11/24 b) 15/16 c) 9/16 ☺ d) 23/24 e) ništa od navedenog

Gouraudovo sjenčanje je postupak sjenčanja poligona temeljen na Phongovom refleksijskom modelu (vidi Čupić: Skripta iz računalne grafike, str. 141).

Neka su x_A i y_A koordinate točke A. Pretpostavimo, ne smanjujući općenitost zadatka, da se trokut ABC nalazi u koordinatnom sustavu čije je ishodište u točki B.

Uzevši u obzir gornje propozicije, određujemo koordinate točaka:
A(0,1), B(0,0), C($\frac{1}{3}$,4), D(1, $\frac{1}{3}$), E($\frac{1}{3}$,1)

Intenzitet u točki D jest :

$$I_D = \frac{1}{y_B - y_A}(I_A(y_B - y_D) + I_B(y_D - y_A))$$

$$= \frac{1}{0-1}(1(0-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - 1))$$

$$= \frac{2}{3}$$

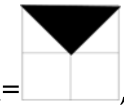
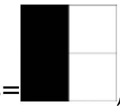
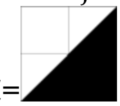
Intenzitet u točki E jest :

$$I_E = \frac{1}{x_C - x_D}(I_D(x_C - x_E) + I_C(x_E - x_D))$$

$$= \frac{1}{4-0}(\frac{2}{3}(4-1) + \frac{1}{4}(1-0))$$

$$= \frac{9}{16}$$

Točan odgovor je c) $\frac{9}{16}$.

2. Lik  dobije se sljedećim nizom CSG operacija iz likova A=, B=, C= (lik obuhvaća crno ispunjeno područje, ne crte koje označavaju križaljku koordinatnog sustava).

a) (A∩B) ∪ (C−B) ☺
b) (A−B) ∪ (C∩B)
c) (A−B) ∩ (C∪B)
d) (A∪B) − (C∩B)
e) ništa od navedenog

Ovdje se radi o postupku modeliranja korištenjem konstruktivne geometrije tijela, u kojem su nad geometrijskim tijelima definirane Boolove funkcije (vidi predavanje 5 – „Modeliranje“, slajdovi 9 i 10).

Sljedećim Boolovim operacijama dobiva se traženi lik:


(A∩B)


(C−B)


(A∩B) ∪ (C−B)

Točan odgovor je a)

3 zadatak, ZI

Uz ovaj zadatak prigodno je objasniti i način izrade binarnog stabla za zadanu scenu.

Izrada binarnog stabla nije jednoznačna, već ovisi o tome kojim redom biramo pravce. Ovdje će biti prikazan jedan moguć način izbora pravaca kojim se dobiva stablo kao na slici.

Algoritam izrade stabla glasi:

0. Označi na svim pravcima mjesta na kojima se sijeku sa produženim linijama drugih pravaca. Dodijeli brojčane oznake svim segmentima pravaca
00. Postavi se u korijen stabla u prvom koraku.
1. Odaberi pravac (A). Upiši njegov broj u trenutni list.
2. (jedan način) Odaberi neki drugi pravac (B) koji do sad nije nikamo upisan. Ispitaj da li se nalazi sa pozitivne ili negativne strane pravca A. Ukoliko se nalazi s pozitivne strane, postavi se u desno dijete pravca A i vrati na korak 1. Inače, postavi se u lijevo dijete i vrati na korak 1.
2. (drugi način) – odaberi po jedan od pravaca sa pozitivne i negativne strane pravca A (B i C) i upiši ih u odgovarajuću djecu pravca A. Zatim ponovi korak 1 za djecu čvora A.
Ponavljaj dok ne upišeš sve pravce.

Kako bi se ostvarilo balansirano stablo, bolje je koristiti postupak 2 pri rješavanju rukom, te paziti da uvijek ostavimo takav izbor pravaca da možemo stablo što uravnoteženije izgraditi. Pri izgradnji stabla programski, prvi način je bolji, no on neće uvijek dati optimalno rješenje, već će dano stablo trebati dodatno uravnotežavati.

Provedba algoritma:

Odabiremo pravac sa brojkom 14. Upisujemo ga u korijen. Za lijevo dijete odabiremo jedan od pravaca sa njegove negativne strane. U ovom slučaju 3. Za desno dijete odabire se jedan od pravaca sa pozitivne strane, u ovom slučaju 0.

Postavimo se u lijevo dijete (3). Nema pravca s njegove pozitivne strane, tako da je njegovo desno dijete prazno. Za lijevo dijete odabiremo pravac 4, koji mu je se negativne strane.

Postavimo se u desno dijete (0). S njegove pozitivne strane odabiremo 17, a s negativne 2. Upisujemo ih.

Pravac 17 ima pravce samo s negativne strane, pa izabiremo 1. Pravac 2 također ima samo s negativne strane, biramo 18.

Postavljamo se u čvor 4. Za djecu odabiremo 7 i 5.

Dovršetak algoritma je odavde trivijalan, te se objašnjenje izostavlja. Naravno, moguće je izgraditi i drukčija stabla, no sva će ona dati jednako rješenje ovog zadatka u konačnici.

Algoritam iscrtavanja:

Iscrtavanje se provodi jednostavnim algoritmom pri ćemo se svaki put ispituje gdje se očište nalazi u odnosu na dani pravac. Algoritam glasi:

```
Postavi se u korijen stabla.
Ako korijen == NULL – povratak iz rekurzije
Ako (očište lijevo od pravca)
{
        Pozovi se za desno dijete.
        Iscrtaj trenutni list
        Pozovi se za desno dijete
}
Inače //očište desno od pravca)
{
        Pozovi se za lijevo dijete
        Iscrtaj trenutni list
        Pozovi se za desno dijete
}
```

Ovaj algoritam iscrtava prvo one pravce koji bi mogli biti zaklonjeni drugima, a zatim preko njih iscrtava one bliže preko njih. (painter's algorithm)

Provedba algoritma:

Postavljamo se u 14. Očište je lijevo (negativna strana) – pozivam se za 0 (desno)
U 0 sam. Očište je desno. Pozivam se za 2 (lijevo)
U 2 sam. Očište je lijevo. Pozivam se za NULL (desno) - povratak. Iscrtavam **2**. Pozivam se za 18 (lijevo).
U 18 sam. Očište je lijevo. Pozivam se za NULL (desno) – povratak. Iscrtavam **18**. Pozivam se za 6 (lijevo).
U 6 sam. Očište je desno. Pozivam se za NULL (lijevo) – povratak. Iscrtavam **6**. Pozivam se za 11 (desno).
U 11 sam. Očište je desno. Pozivam se za NULL (lijevo) – povratak. Iscrtavam **11**. Pozivam se za NULL (desno) – povratak.
Vraćam se iz rekurzije (do 0).
U 0 sam. Iscrtavam **0**. Pozivam se za 17 (desno).
U 17 sam. Očište je lijevo. Pozivam se za NULL(desno) – povratak. Iscrtavam **17**. Pozivam se za 1 (lijevo)
U 1 sam. Očište je lijevo. Pozivam se za 13 (desno). Kako 13 nema djece, iscrtavam **13** i povratak**.**
U 1 sam. Iscrtavam **1**. pozivam se za 8 (lijevo). Kako 8 nema djece, iscrtavam **8**. Povratak.
Iscrtavam **14**. Pozivam se za 3 (lijevo)
U 3 sam. Očište je lijevo. Pozivam se za NULL (desno) – povratak. Iscrtavam **3**. Pozivam se za 4 (lijevo).
U 4 sam. Očište je desno. Pozivam se za 7 (lijevo).
U 7 sam. Očište je desno. Pozivam se za NULL (lijevo) – povratak. Iscrtavam **7**. Pozivam se za 9 (desno). Kako nema djece, iscrtavam **9**. Povratak.

U 4 sam. Iscrtavam **4.** Pozivam se za 5 (desno).

U 5 sam. Očište je desno. Pozivam se za 15 (lijevo). Iscrtavam **15** jer nema djece. Povratak. Iscrtavam **5** jer mu je desno dijete NULL.

Konačan redosljed iscrtavanja: 2, 18, 6, 11, 0, 17, 13, 1, 8, 14, 3, 7, 9, 4, 15, 5. (odgovor A).

Još jedan mogući aspekt ovog zadatka je pitanje: „Gdje se nalazi očište u B-stablu?“.

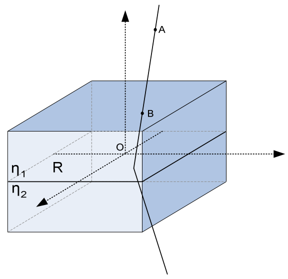
Očište se uvijek mora nalaziti u listu stabla. Smještanje istog u stablo provodi se jednostavnim postupkom.

0. Postavi se u korijen.
1. Ako je korijen list, gotovo, smjesti očište i prekini. Inače:
2. Ako je očište lijevo od trenutnog čvora, postavi se u lijevo dijete, inače se postavi u desno.
3. Vrati se na 1.

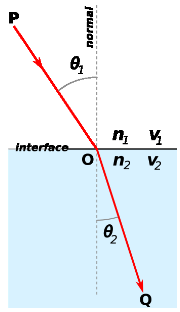
Provedba: 14 – lijevo je -> 3 lijevo je -> 4 – desno je -> 5 – desno je -> list -> očište je desno dijete čvora 5.

Literatura: slajdovi 7-21, 22, 23, predavanja iz IRG, ak. God. 2007/08.

4. U 3D prostoru zadana je zraka svjetlosti koja prolazi prvo kroz točku A(7, 9, 10), te zatim kroz točku B=(4, 5, 5). Zraka potom pada na ravninu R određenu vektorom normale $\vec{n} = (0,0,1)$ i točkom O=(0,0,0), te se lomi. Ako indeks loma prostora iznad ravnine R (u kojem se nalaze točke A i B) iznosi $\eta_1 = 1.4$, a indeks loma prostora ispod ravnine R iznosi $\eta_2 = 1.2$, odrediti kut lomljene zrake. (Snellov zakon $\sin\theta_1 / \sin\theta_2 = \eta_2 / \eta_1$).



Iako se većina nadala da se zauvijek riješila fizike nakon Fizike 2, još jedno pobijanje te tvrdnje. Snellov zakon je izuzetno jednostavan, no u ovom slučaju, nemamo zadan upadni kut, nego dvije točke koje čine pravac i vektor pravca i točku ravnine koja razdvaja dva sredstva.
Rješenje se može podijeliti u tri dijela. Prvo je potrebno izračunati pravac iz dvije točke. Drugi dio rješenje je određivanje kuta između ravnine i pravca, što se može odrediti preko vektora normale ravnine i vektora smjera pravca. Konačno, dobiveni kut se uvrsti u jednadžbu Snellovog zakona i dobije traženi kut.



Izračun pravca iz dvije točke:
Postoji nekoliko načina računanja pravca kroz dvije točke, no u ovom zadatku nama je potreban vektor smjera pravca, pa je najprikladnije koristiti jednadžbu pravca u obliku matrice. Neka su zadate dvije točke, A(x_a, y_a, z_a, 1) i B(x_b, y_b, z_b, 1). Pravac p se sastoji od svih točaka P(x_p, y_p, z_p, 1) takvih da vrijedi:

$$x_p = a*t + b = (x_a - x_b)*t + x_b,$$
$$y_p = c*t + d = (y_a - y_b)*t + z_b,$$
$$z_p = e*t + f = (z_a - z_b)*t + z_b,$$
$$h_p = 1,$$

za t iz skupa realnih brojeva.
Vektor smjera pravca s_p je jednak članovima uz parametar t, dakle:

$$s_p = [a\ c\ e] = [x_a - x_b\ \ y_a - y_b\ \ z_a - z_b].$$

Vektor smjera pravca kroz točke A(7, 9, 10) i B(4, 5, 5) prema tome je $s_p = [3\ 4\ 5]$.

Izračun kuta među vektorima:
Kut među dva vektora $v_1 = [a_1\ b_1\ c_1]$ i $v_2 = [a_2\ b_2\ c_2]$ se računa prema formuli:

$$\cos\alpha = (a_1*a_2 + b_1*b_2 + c_1*c_2) / (||v_1|| * ||v_2||),$$

pri čemu je $||v|| = \mathrm{sqrt}(a^2 + b^2 + c^2)$.
Traži se kut među vektorima $s_p = [3\ 4\ 5]$ ($||s_p|| = 5*\mathrm{sqrt}(2) = 7{,}071$) i $n = [0\ 0\ 1]$ ($||n|| = 1$):

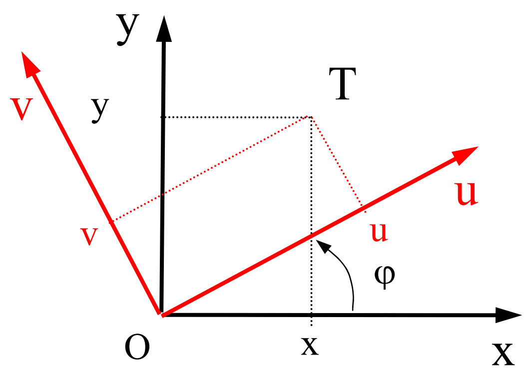
$$\cos\alpha = (3*0 + 4*0 + 5*1) / (7{,}071 * 1) = 0{,}707$$
$$\alpha = 45°$$

Izračun izlaznog kuta:
Upadni kut $\alpha = 45°$, $n_1 = 1{,}4$, $n_2 = 1{,}2$

$$\sin\beta = \sin\alpha\ * n_1 / n_2 = \sin(45°) * 1{,}4 / 1{,}2 = 0{,}8249$$
$$\underline{\beta = 55{,}58°} \Rightarrow \text{odgovor a) } 55{,}6°$$

*napomena: sqrt (square root) je kvadratni korijen

7. U koordinatnom sustavu Oxy točka T ima koordinate T(x,y)=(3 4). Koordinatni sustav zarotiramo za φ (točku nismo rotirali). U rotiranom koordinatnom sustavu točka ima koordinate T(u, v) = (4 3). Odrediti kut rotacije φ .



a) +20°16″ b) -16°16″ c) -20°16″
d) 16°16″ e) ništa od navedenog

Rotacija koordinatnog sustava za φ (suprotno kazaljke na satu) uz fiksnu točku ja analogna rotaciji točke u koordinatnom sustavu za -φ (u smjeru kazaljke na satu) uz fiksni koordinatni sustav. Problemu je dakle zgodno pristupiti na takav način.

$$\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) & 0 \\ -\sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 3 & 1\end{bmatrix}$$ Predstavlja rotaciju točke (3,4,1) za -φ.

Homogena koordinata nije bitna, može biti i 0.
Dobivamo sustav jednadžbi:
3cos(-φ) – 4sin(-φ) = 4;
3sin(-φ) + 4cos(-φ) = 3; nisu rađene transformacije za neparne i parne funkcije zato jer se želi naglasiti da se traži φ, a ne (-φ)!

Drugu množim s 4/3 (da se riješim sinusa) i zbrajam sa prvom:

3cos(-φ) – 4sin(-φ) + ***4sin(-φ) + 16/3 cos(-φ)*** = 4 + ***4***; (podebljano je iz druge jednadžbe)
=
25 / 3 cos(-φ) = 8;
=
cos(-φ) = 0.96

-φ = arccos(0.96)

-φ = 0.283794109 (rad) = 16.26°

φ = - 16.26° = - 16°16'

Napomena: arccos daje rješenje iz prvog kvadranta! Ako je kut veći od 90°, potrebno je primijeniti istu metodologiju, ali propaziti na predznake sin i cos funkcija.

.

8. Zadana je pravac s karakterističnom matricom G i točka T=(5, 5, 2). Odredite udaljenost d točke T od pravca p.

$$G = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Udaljenost točke i pravca se definira kao udaljenost zadane točke od najbliže točke pravca. Pritom se koristi jednadžba za udaljenost dvije točke:

$$d(T, T_p) = \mathrm{sqrt}(\ (x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p)^2\ ).$$

No kako znati koja točka pravca T_p je najbliža zadanoj točki T?
Sjetimo se malo definicije prve derivacije. Nultočke prve derivacije neke funkcije f su minimumi i maksimumi funkcije f. Funkcija $d(T, T_p)$ je jednogrbasta (jednodolinasta bi možda bio bolji naziv) funkcija u ovisnosti o T_p, što znači da ima samo jednu nultočku prve derivacije, i to u minimumu (kako se kreće po pravcu i udaljava od T_p tako udaljenost od T raste).
Kada se bolje pogleda funkcija $d(T, T_p)$, ona nema jednu nego tri varijable - x_p, y_p i z_p. Provesti derivaciju po tri varijable i nije neka zabava na ispitu (a većini ni inače). Tu ulazi u igru parametarska jednadžba pravca, jer se točka T_p može prikazati preko nje (s obzirom da se nalazi na pravcu p). Parametarska jednažba pravca glasi:

$$x_p = a*t + b = (x_a - x_b)*t + x_b,$$
$$y_p = c*t + d = (y_a - y_b)*t + z_b,$$
$$z_p = e*t + f = (z_a - z_b)*t + z_b,$$
$$h_p = 1,$$

za t iz skupa realnih brojeva.
S obzirom da je točka T nam poznata, a T_p se može prikazati u ovisnosti o jednoj varijabli t, prva derivacija funkcije $d(T, T_p)$ više i nije neki problem za izračunati.
Za zadane brojeve, to bi izgledalo ovako:
$d(T, T_p) = \mathrm{sqrt}\ (\ (5 - 3t - 2)^2 + (5 + 7t - 8)^2 + (2 - 1t - 3)^2\ )$
$d(T, T_p) = \mathrm{sqrt}\ (\ (3 - 3t)^2 + (-3 + 7t)^2 + (-1 - 1t)^2\ )$
$d(T, T_p) = \mathrm{sqrt}\ (\ 9 - 18t + 9t^2 + 9 - 42t + 49t^2 + 1 + 2t + t^2\ )$
$d(T, T_p) = \mathrm{sqrt}\ (\ 59t^2 - 58t + 19\ )$ - prikladno za izračun udaljenosti kada je poznat t
Prva derivacija od $d(T, T_p)$ po varijabli t:
$d'(T, T_p) = (\ 118t - 58\ ) / (2 * \mathrm{sqrt}\ (\ 59t^2 - 58t + 19\ )\ )$
$d'(T, T_p) = (\ 59t - 29\ ) / \mathrm{sqrt}\ (\ 59t^2 - 58t + 19\ )$
Izračun nultočke:
$d'(T, T_p) = 0$
$59t - 29 = 0$ **
$59t = 29$
$t = 29/59$ $(T_p\ (x_p = 3.47, y_p = 4.56, z_p = 3.49))$
Udaljenost točke T(5 5 2) od pravca p:
$d(T, T_p) = \mathrm{sqrt}\ (\ 59\ (29/59)^2 - 58\ (29/59) + 19\ )$
$d(T, T_p) = \mathrm{sqrt}\ (\ 841 / 59 - 1682 / 59 + 1121 / 59\ )\ )$
$d(T, T_p) = \mathrm{sqrt}\ (\ 280 / 59\ )$
$d(T, T_p) = 2.178$ => odgovor b) 2.18

**nazivnik jednadžbe je zanemaren jer ne igra ulogu u izjednačavanju s 0; potrebno je pripaziti da točka T nije na pravcu, ili će nazivnik biti 0 i jednadžba biti nerješiva

9. Zadan je centar projekcije C=(10 30 20) i dužina točkama V1=(5 10 5), V2=(10 30 5) u radnom prostoru. Odrediti duljinu projicirane dužine na ravninu R=(1 2 3 5).

Rješavanje ovog zadatka se može podijeliti u tri dijela. Dužina ravnine se najlakše može izračunati kao udaljenost rubnih točaka, i to je treći dio zadatka. Dobivanje rubnih točaka se pak dijeli u dva koraka. Prvo je potrebno naći dva pravca. Oba pravca prolaze centrom projekcije, te jedan prolazi točkom V1, a drugi točkom V2. Drugi korak je naći rubne točke, a one su sjecišta tih pravaca i ravnine R. Za pozadinu i objašnjenje pogledajte poglavlje „Projekcije i transformacije pogleda“, Skripta iz Računalne Grafike (Marko Čupić), stranica 114. :)

Dakle, na rješavanje:

<u>Prvi korak – određivanje pravaca:</u>

Pravac p je definiran kao:

$$x_p = a*t + b = (x_a - x_b)*t + x_b,$$
$$y_p = c*t + d = (y_a - y_b)*t + z_b,$$
$$z_p = e*t + f = (z_a - z_b)*t + z_b,$$
$$h_p = 1,$$

za t iz skupa realnih brojeva. Pritom su x_a, y_a i z_a koordinate točke A, a x_b, y_b i z_b koordinate točke B. U zadanom zadatku, točka B je centar projekcije, a točka A će biti V1 za pravac p1 i V2 za pravac p2.

Sukladno tome se dobije pravac p1:

$$x_{p1} = (5 - 10)*t + 10 = -5t + 10,$$
$$y_{p1} = (10 - 30)*t + 30 = -20t + 30,$$
$$z_{p1} = (5 - 20)*t + 20 = -15t + 20,$$
$$h_{p1} = 1,$$

i pravac p2:

$$x_{p2} = (10 - 10)*t + 10 = 10,$$
$$y_{p2} = (30 - 30)*t + 30 = 30,$$
$$z_{p2} = (5 - 20)*t + 20 = -15t + 20,$$
$$h_{p2} = 1.$$

I time je završen prvi korak.

<u>Drugi korak – presjeci pravaca i ravnine:</u>

Točka presjeka ravnine i pravca se najlakše dobije tako da se uvrsti parametarski oblik jednadžbe pravca u jednadžbu ravnine, te iz toga izračuna parametar t.

Jednadžba ravnine R je prema zadanim brojevima: $x + 2y + 3z + 5 = 0$

Dakle, V'1 koja je preslika točke V1 na ravninu se dobije na sljedeći način:

$1*(-5t_1 + 10) + 2*(-20t_1 + 30) + 3*(-15t_1 + 20) + 5 = 0$

$(-5 - 40 - 45)*t_1 + (10 + 60 + 60 + 5) = 0$

$-90t1 + 135 = 0$

$t_1 = 135 / 90 = 3 / 2 \Rightarrow$ V'1 (5/2 0 -5/2)

Izračun za V'2:

$1*10 + 2*30 + 3*(-15t + 20) + 5 = 0$

$-45t + 135 = 0$

$t = 3 \Rightarrow$ V'2 (10 30 -25)

Sad imamo rubne točke dužine: V'1(5/2 0 -5/2) i V'2(10 30 -25)

Time ostaje još treći korak – udaljenost među točkama:

Udaljenost između dvije točke A i B se računa po sljedećoj formuli:

$$d(T_a, T_b) = sqrt((x_b-x_a)^2 + (y_b-y_a)^2 + (z_b-z_a)^2).$$

Sada samo u tu formulu uvrstimo točke V'1(5/2 0 -5/2) i V'2(10 30 -25):

$$d(V'1, V'2) = sqrt((10 – 5/2)^2 + (30 - 0)^2 + (-25 – (-5/2))^2)$$

$$d(V'1, V'2) = sqrt((15/2)^2 + (30)^2 + (-45/2)^2)$$

$$d(V'1, V'2) = sqrt(225/4 + 3600/4 + 2025/4)$$

$$d(V'1, V'2) = sqrt(5850/4)$$

$\underline{d(V'1, V'2) = 5*sqrt(234) / 2 = 38.24}$ => odgovor d) 38

NADAMO SE DA VAM JE OVA ZBIRKA BAREM DONEKLE POMOGLA U PRIPREMI ZA ISPITE.