INTERAKTIVNA RAČUNALNA GRAFIKA
ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA

Tomislav Šebrek, Luka Zuanović

Zadatak 1

Pravac je zadan preko dvije točke: $T_1(1,2,-1)$ i $T_2(2,4,3)$, kugla je zadana središtem u točki $S(5,10,15)$ i radijusom $2\sqrt{21}$. Odredite presjek pravca i kugle bliži točki T_1.

Rješenje:

Presjecište pravca sa sferom (a tako i s bilo kojom plohom, ravninom i sl.) zahtjeva parametarski prikaz pravca. Odredimo jednadžbu pravca.

$T_1 = (1,2,-1)$ - početna točka

$v = T_2 - T_1 = (1,2,4)$ - vektor smjera

Svaku točku pravca možemo prikazati kao $T = T_1 + v \cdot t$, tj. ako rastavimo po koordinatama:

$$x = 1 + t$$
$$y = 2 + 2t$$
$$z = -1 + 4t$$

Jednadžba sfere određena je implicitnom jednadžbom:

$$(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2 = r^2$$
$$(x - 5)^2 + (y - 10)^2 + (z - 15)^2 = 84$$

gdje je središte sfere određeno točkom (x_s, y_s, z_s).

Uvrštavanjem koordinata x, y i z u parametarskom obliku u implicitnu jednadžbu sfere dobivamo:

$$(t - 4)^2 + (2t - 8)^2 + (4t - 16)^2 = 84$$
$$t^2 - 8t + 12 = 0$$

Rješenja kvadratne jednadžbe upućuju na dva presjeka sa sferom. Jedno za parameter $t_1 = 2$ te drugo za parametar $t_2 = 6$.

Točki T_1 bliže je ono rješenje koje ima manji parametar t pa slijedi da je bliže presjecište s kuglom određeno parametrom t_1 s koordinatama:

$$x = 1 + 2 = 3$$
$$y = 2 + 4 = 6$$
$$z = -1 + 8 = 7$$

Bliže presjecište je točka $T(3, 6, 7)$.

Zadatak 2

Izračunati pravac koji predstavlja presjek 2 ravnine. Prva ravnina zadana je u implicitnom obliku $x - 2y - 2z + 1 = 0$, a druga je ravnina zadana s 3 točke prostora $(1, -1, 2)$, $(3, 2, 0)$ i $(1, -2, 1)$

Rješenje:

Kako bi odredili presjek dvije ravnine, drugu ravninu moramo zapisati u implicitnom obliku. Ideja je sljedeća. Ako su zadane 3 točke, tada dva vektora $\vec{T_2T_1}$ i $\vec{T_3T_1}$ razapinju ravninu. Bilo koja druga točka T pripada ravnini ako vektor $\vec{TT_1}$ pripada ravnini, tj. okomit je na normalu. Kako je normala određena vektorskim umnoškom $\vec{T_2T_1}$ i $\vec{T_3T_1}$, a vektori su okomiti ako je njihov skalarni produkt jednak nuli slijedi da mora vrijediti $\vec{TT_1} \cdot (\vec{T_2T_1} \times \vec{T_3T_1}) = 0$. Lijeva strana jednadžbe je mješoviti produkt, a on je određen s:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Nakon razvoja po prvom retku dobiva se implicitna jednadžba ravnine: $-5x + 2y - 2z + 11 = 0$

Kako bi odredili jednadžbu pravca koji pripada i prvoj i drugoj ravnini oslobodit ćemo se jedne koordinate i nju proglasiti parametrom t te sustav jednadžbi riješiti parametarski. Ako koordinatu z proglasimo parametrom t iz implicitnih oblika prve i druge ravnine redom dobivamo:

$$\begin{aligned} x - 2y &= -1 + 2t \\ -5x + 2y &= -11 + 2t \end{aligned}$$

Rješavanjem dobivamo:

$$\begin{aligned} x &= 3 - t \\ y &= 2 - \frac{3}{2}t \\ z &= t \end{aligned}$$

Iz parametarskog zapisa koordinata možemo očitati jednu točku i vektor smjera. Radi se o pravcu:

$$T = (3, 2, 0) + (-1, -\frac{3}{2}, 1)t$$

Zadatak 3

Zadan je pravac p zadanog s $y = x$. Potrebno je odrediti jednadžbu pravca koji se dobije rotacijom pravca p za 60 stupnjeva u pozitivnom smjeru oko točke $T(-2, 2)$.

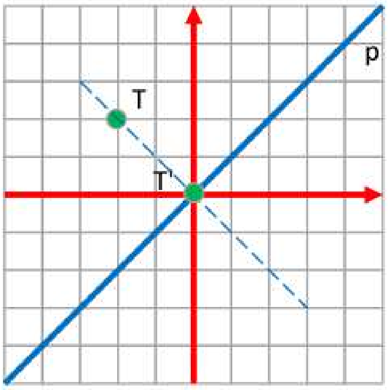
Rješenje:

Zadatak ćemo riješiti tako da rotiramo točku T', koja predstavlja točku dobivenu kao presjecište okomice na pravac p povučene iz točke T, oko točke T za 60 stupnjeva te nakon što ju rotiramo kroz tako dobivenu transformiranu točku povući ćemo okomicu na spojnicu te točke i točke T.

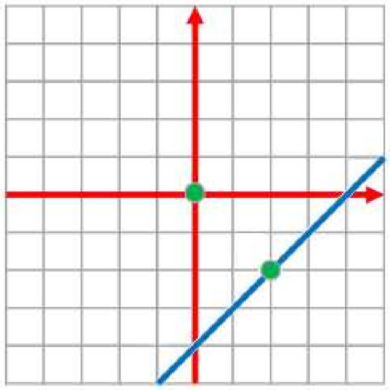
Prvo odredimo točku T'. Pravac označen crtkano je okomit na pravac p a njega lako određujemo iz uvjeta okomitosti i preko pripadnosti točke T iscrtkanom pravcu. Iscrtkani pravac je definiran kao: $y = -x$.

Presjek okomitog pravca i pravca p daje nam točku $T'(0, 0)$. Sada je potrebno točku T' rotirati oko točke T, a to radimo pomoću tri transformacije:

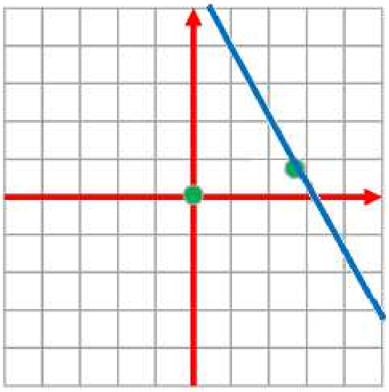
- **translacije** točke T u ishodište
- **rotacije** točke T' oko ishodišta
- **inverzne translacije** koja točku T vraća na početnu poziciju



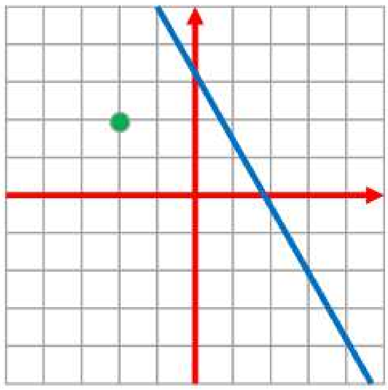
određivanje točke T'



translacija točke T u ishodište



rotacija za 60°



translacija u početnu točku

Matrice koje opisuju navedene transformacije su:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako nad točku T' primijenimo sve tri transformacije dobivamo: $T'' = T' \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = (-1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$

Sada je potrebno odrediti pravac za kojeg vrijedi:

- okomit je na pravac koji prolazi točkama T i T''

- prolazi točkom T''

Kako bi odredili koeficijent smjera rotiranog pravca prvo trebamo odrediti koeficijent smjera okomice, a on iznosi:

$$k_o = \frac{y'' - y}{x'' - x} = 2 + \sqrt{3}$$

Smjer rotiranog pravca jest:

$$k = \frac{-1}{k_o} = -2 - \sqrt{3}$$

Konačno, odredimo jednadžbu pravca koeficijenta smjera k koji prolazi točkom T'':

$$y - y'' = k \cdot (x - x'')$$
$$y = (-2 - 2\sqrt{3}) \cdot x + 2 + 2\sqrt{3}$$

Zadatak se može riješiti i na drugi način, tako da se invertirana matrica $(M_1 \cdot M_2 \cdot M_3)$ pomnoži s implicitnom jednadžbom zadanog pravca:

$$p' = (M_1 \cdot M_2 \cdot M_3)^{-1} \cdot p = M_3{}^{-1} \cdot M_2{}^{-1} \cdot M_1{}^{-1} \cdot p$$

Riješenje će biti isto.

Zadatak 4

Napisati matricu transformacije koja će trokut označen točkama $T_1(-2,-1)$, $T_2(-4,-1)$ i $T_3(-2,-3)$ transformirati u trokut određen točkama $T_1'(1,1)$, $T_2'(2,1)$ i $T_3'(1,5)$.

Rješenje:
Zadatak ćemo riješiti pomoću niza transformacija:

- **translacija** vrha T_1 u ishodište $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

- **rotacija** trokuta za 180 stupnjeva $M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

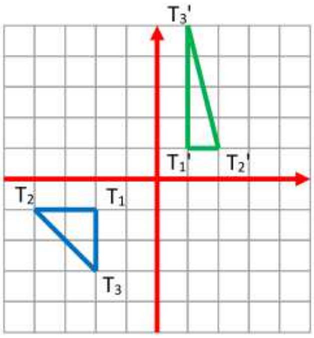
- **skaliranje** osi x za $\frac{1}{2}$ i osi y za 2 $M_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- **translacija** vrha T_1 na poziciju $(1,1)$ $M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

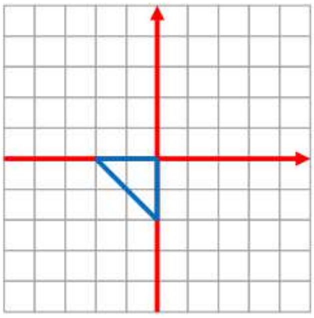
Ukupnu matricu transformacije dobivamo kao umnožak ove četiri matrice i ona iznosi:

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

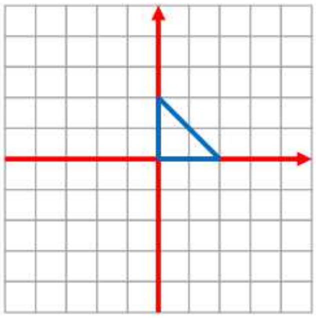
Rezultati primjene operacija prikazani su u nastavku.



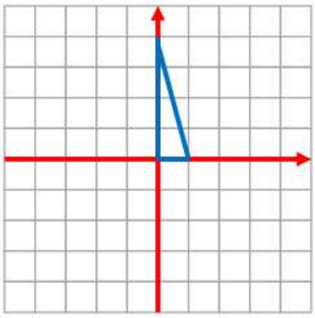
početna situacija



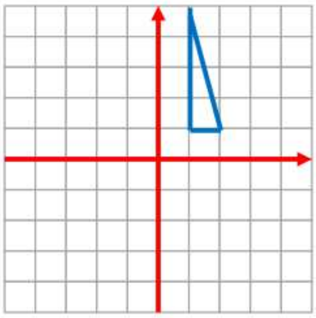
translacija T_1 u ishodište



rotacija T_1 za 180°



skaliranje po obje osi



translacija u T_1'

Zadatak 5

Zadana je točka $T(-3,2)$ u globalnom koordinatnom sustavu. Potrebno je odrediti koordinate točke T u lokalnom sustavu koji je određen vektorom $(1,-1)$ x-osi i $(1,1)$ y-osi uz ishodište u točki $O'(-2,-1)$.

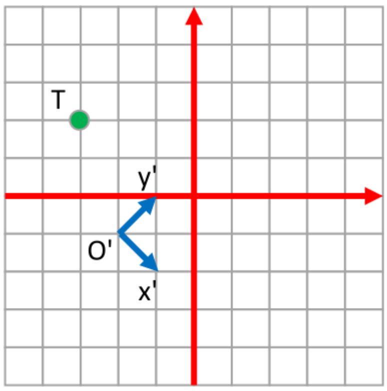
Rješenje:

Na slici ispod prikazana su dva koordinatna sustava. Crvenom bojom prikazan je globalni koordinatni sustav s osima određenim vektorima $x(1,0)$ i $y(0,1)$. To je koordinatni sustav u kojem znamo lako odrediti koordinate točaka i obavljati razne računske operacije.

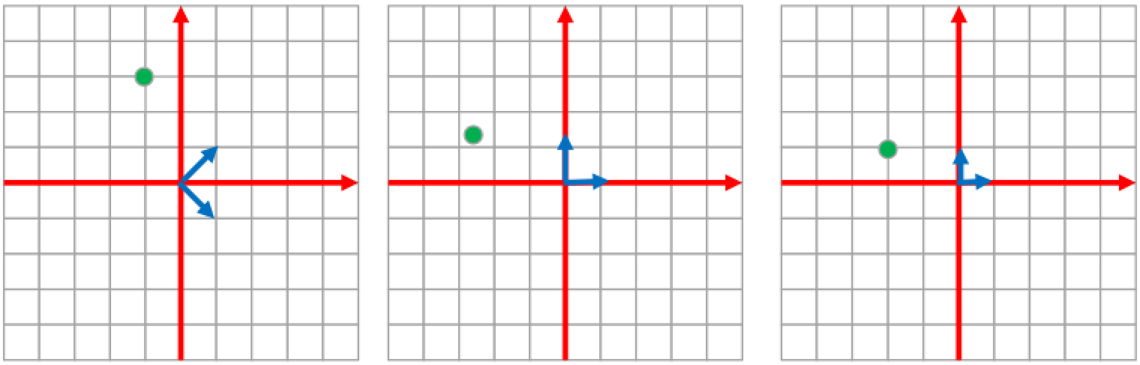
Plavom bojom prikazan je lokalni koordinatni sustav. Postavlja se pitanje koje su sada koordinate točke T globalnog sustava promatrane iz lokalnog sustava.

Ideja je sljedeća. Matricom transformacije potrebno je poklopiti jedinične vektore x' i y' osi lokalnog i x i y vektore osi globalnog sustava. Ako na točku u globalnom sustavu primijenimo istu matricu transformacije dobit ćemo točku s koordinatama u lokalnom sustavu. Zašto je to tako?

Primjenjujući matrice transformacija istodobno i na lokalni sustav i na točku T ne mijenjamo njihov odnos te nakon što lokalni sustav poklopimo s globalnim, tj. onim u kojem znamo očitati koordinate točaka, možemo direktno očitati koordinate točke T u lokalnom sustavu koji je sada istovjetan globalnom. Budući da se odnos točke T i lokalnog sustava transformacijama nije promijenio očitane koordinate su upravo koordinate točke T u lokalnom sustavu.



Pogledajmo sada koje je transformacije i kojim redom potrebno primijeniti.



translacija u ishodište | rotacija za 45° | skaliranje sa $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Prva matrica je matrica translacije jer moramo poklopiti ishodište lokalnog sustava s globalnim kako bi mogli ostvariti rotaciju i skaliranje.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (-1, 3, 1)$$

Da bi poklopili osi rotiramo lokalni sustav za 45 stupnjeva suprotno smjeru kazaljke na satu (pozitivan matematički smjer). Druga matrica je matrica rotacije za +45 stupnjeva.

$$M_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$$

Zadnja matrica koju treba primijeniti je skaliranje. Vektori lokalnog koordinatnog sustava nisu jednake duljine kao vektori globalnog (nisu jedinični) pa je x i y koordinatu potrebno skalirati njihovom normom, odnosno umanjiti za $\sqrt{2}$.

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \rightarrow (-2, 1, 1)$$

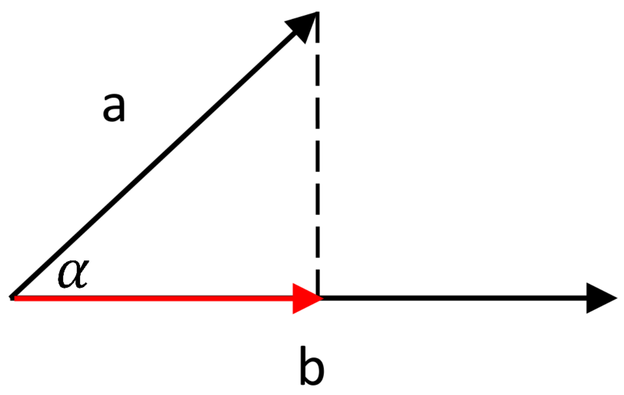
Ukupna matrica transformacije određena je umnoškom matrica M_1, M_2 i M_3, te kada se nad točkom T globalnog sustava primjeni matrica transformacije dobivamo točku $(-2, 1)$.

Moguća je i situacija u kojoj je jedan od koordinatnih sustava desni a drugi lijevi. Kod takvog će slučaja biti potrebno matricom rotacije poklopiti bilo x, bilo y osi dva sustava, a drugoj osi promijeniti predznak, tj. skalirati faktorom -1.

Prikazujemo i drugi način, a ideja je sljedeća:

- **projekcija vektora $O'T$ na pravac na kojem leži x' je tražena x koodrinata**
- **projekcija vektora $O'T$ na pravac na kojem leži y' je tražena y koodrinata**

Projekciju vektora a na vektor b određujemo kroz tri koraka. Projekcija a_b prikazana je crvenom bojom na slici ispod.



1. određujemo $\cos(\alpha)$ iz formule $\cos(\alpha) = \frac{a \cdot b}{\|a\| \cdot \|b\|}$
2. određujemo faktor skaliranja projekcije iz formule $\mu = \|a\| \cdot \cos(\alpha)$
3. jedinični vektor b množimo s faktorom skaliranja iz formule $a_b = \frac{b}{\|b\|} \cdot \mu$

Za x koordinatu računamo:

$$O'T = T - O = (-1, 3)$$

Potrebno je odrediti projekciju vektora $O'T$ na $x'(1, -1)$. Prema navedenim koracima računamo:

$$\cos(\alpha) = \frac{(-1, 3) \cdot (1, -1)}{\|(-1, 3)\| \cdot \|(1, -1)\|} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\mu = \|(-1, 3)\| \cdot \frac{-2}{\sqrt{5}} = -2\sqrt{2}$$

$$x_{lok} = \frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot x' = -2 \cdot x' = -2$$

Jednako tako računamo projekciu na y-os lokalnog sustava.

Zadatak 6

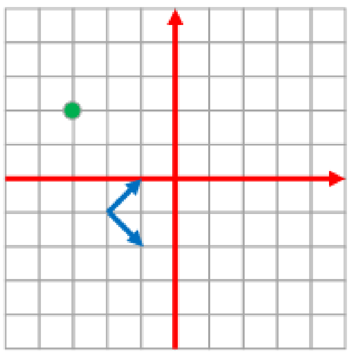
Zadana je točka $T(-2,1)$ u lokalnom koordinatnom sustavu. Potrebno je odrediti koordinate zadane točke u globalnom sustavu ako je lokalni određen vektorom $(1,1)$ x-osi, $(1,-1)$ y-osi i ishodištem u točki $(-2,-1)$.

Rješenje:

Ovaj primjer možemo shvatiti kao da su lokalni i globalni sustav zamijenili uloge. Naime, točka je zadana u lokalnom (plavom) sustavu. Kako u plavom sustavu znamo očitati koordinate bit će potrebno pronaći matricu transformacije koja će crveni sustav (globalni sustav u ulozi lokalnog) poklopiti s plavim sustavom (lokalnim sustavom u ulozi globalnog).

Operacije koje ćemo trebati primijeniti su redom:

- **skaliranje** faktorom $\sqrt{2}$ - $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
- **rotacija** za -45 stupnjeva - $M_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- **translacija** za dx = -2, dy = -1 - $M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$



Operacije moramo obavljati upravo tim redom budući da koordinatne osi moraju ubiti poklopljene s globalnim sustavom prilikom skaliranja. Zatim primjenjujemo rotaciju budući da je ishodište zamišljenog lokalnog sustava u ishodištu globalnog te tek onda translaciju.

Ukupna transformacijska matrica je tada $M = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$

Primijetimo sljedeće.

- transformacije su zadane obrnutim redoslijedom neko kod transformacije globalnog u lokalni sustav
- matrice koje su primijenjene inverzi su transformacija iz globalnog u lokalni sustav

$$M = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$$
$$M^{-1} = M_3^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot M_1^{-1}$$

Možemo zaključiti. Ako matrica M transformira točku iz globalnog u lokalni sustav, tada inverz matrice M transformira točku iz lokalnog u globalni sustav.

Ako na točku T primijenimo matrice M_1, M_2 i M_3 dobivamo točku $(-3, 2)$ u globalnom sustavu.

Zadatak 7

Zadana je točka $T(5,0,2)$ u globalnom sustavu (sustavu scene). Ako je lokalni sustav (sustav oka) određen očištem $O(2,1,-1)$ i gledištem $G(4,1,-1)$ te vektorima x i y osi koji gledaju u smjerovima vektora $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ i $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Odredi perspektivnu projekciju točke T.

Rješenje:

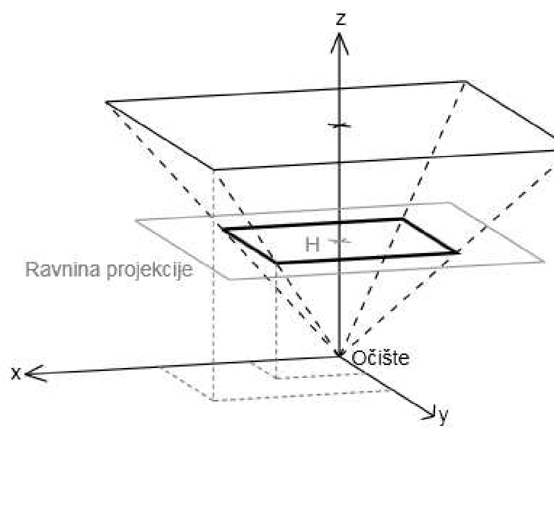
Perspektivna projekcija je presjecište pravca koji prolazi kroz očište i točku čiju projekciju tražimo te ravnine određene točkom gledišta i vektorom normale OG. Točka koja je projicirana na ravninu određena je s dvije koordinate (x i y). Kako odrediti perspektivnu projekciju?

Da bi došli do rješenja vodimo se najjednostavnijim slučajem za kojeg vrijedi:

- očište je postavljeno u ishodište
- gledište se nalazi na z-osi (ravnina projekcije je tada paralelna s xy ravninom)
- perspektivna projekcija bilo koje točke tada je određena matricom M
- x i y koordinate projekcije odgovaraju x i y koordinatama globalnog sustava

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{H} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

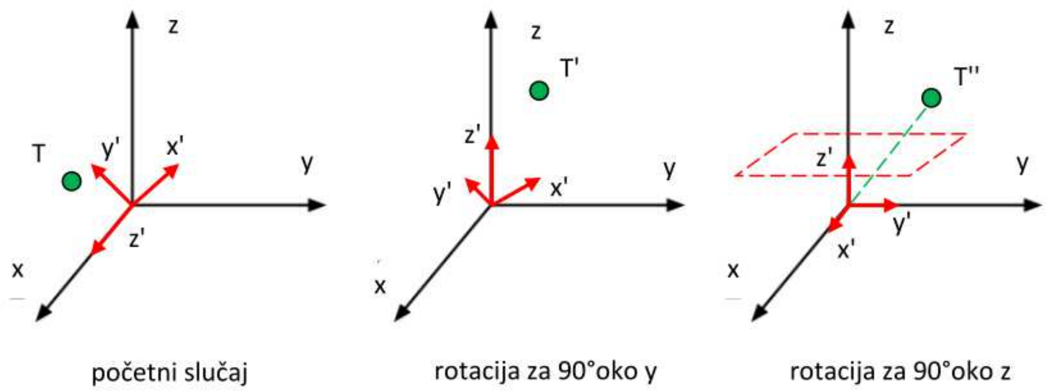
Ovaj jednostavan slučaj prikazan je na slici ispod.



Postavlja se pitanje kako gore naveden način određivanja perspektivne projekcije iskoristiti u slučaju kada imamo proizvoljno očište i gledište što je česta situacija. Jednom kada smo namjestili scenu (u globalnom sustavu) zanima nas kako ti objekti izgledaju kada očište i gledište postavimo kao proizvoljne točke prostora.

Rješenje je vrlo jednostavno. Treba pronaći matricu transformacije koja će poklopiti sve 3 osi lokalnog koordinatnog sustava s globalnim (nazovimo tu matricu transformacije N). Perspektivna projekcija je tada određena točkom $T \cdot N \cdot M$, gdje je H udaljenost očišta i gledišta.

Ako imamo matricu transformacije koja poklapa koordinate osi i tu istu transformaciju primijenimo na točku čiju projekciju tražimo nismo promijenili odnos lokalnog sustava (sustava oka) i točke u globalnom sustavu. Ona je iz pozicije oka koje se sada nalazi u ishodištu i gleda u pozitivnom smjeru z-osi, vidljiva na isti način kao na početku. Samo što smo sada lokalni sustav poklopili s osima globalnog sustava, a ta činjenica nam omogućava da lakše provodimo operacije linearne algebre.



Zadnje pitanje koje se postavlja je kako odrediti matricu N? Izvodi se pomoću translacije i rotacije (znatno jednostavniji drugi način opisan je u nastavku).

- **translacijom** očišta u ishodište
- **rotacijom** kojom poklapamo OG vektor s x-osi (rotacija u xy ravnini)
- **rotacijom** kojom poklapamo OG vektor sa z-osi (rotacija u xz ravnini)
- **rotacijom** kojom poklapamo jednu od osi lokalnog sustava s globalnim (rotacija u xy ravnini)

Prva matrica koju primjenjujemo je matrica translacije očišta u ishodište, a određena je matricom M_1. Nakon primjene ove transformacije očite se nalazi u ishodištu $O'(0,0,0)$, a novo gledište u točki $G'(2,0,0)$. Ova situacija prikazana je na prvoj slici.

Sljedeći korak koji je potrebno učiniti je poklopiti vektor OG sa z-osi budući da se gledište nalazi u xz ravnini. Kako bi to učinili potrebno je gledište zarotirati za 90 stupnjeva u negativnom smjeru oko osi y (tj. za kut od -90 stupnjeva). Matematički pozitivan smjer dobivamo pravilom desne ruke. Ako palac postavimo u smjeru rastuće osi oko koje rotiramo, prsti pokazuju matematički pozitivan smjer rotacije. Matrica rotacije označena je s M_2.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada je potrebno matricu rotacije primijeniti na vektore koji određuju smjer x i y osi koordinatnog sustava. Te dobivamo „nove“ vektore x' i y', nakon rotacije za -90 stupnjeva (oni su prikazani na drugoj slici, a leže u xy ravnini).

$$x' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \qquad y' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Sada je potrebno jedan od ta dva vektora rotiranog lokalnog sustava poklopiti s globalnim sustavom. Mi smo se odlučili za y' vektor. Pogledamo li na skicu zaključujemo da se radi o kutu od -135 stupnjeva. Te nakon primjene rotacije za -135 stupnjeva oko z osi (to je rotacija u xy ravnini) dobivamo matricu M_3.

Drugi način znatno je jednostavniji!

Poklapanje koordinatnih sustava moguće je izvesti pomoću samo dvije matrice u dva koraka ako su poznati normalizirani vektori x, y i z smjera lokalnog sustava. Označimo ih sa (X_x, X_y, X_z), (Y_x, Y_y, Y_z) i (Z_x, Z_y, Z_z).

- prva matrica je matrica translacije očišta u ishodište globalnog sustava (ta matrica jednaka je matrici M_1)
- druga matrica je $M_{rotacije}$ i predstavlja sve rotacije

$$M_{rotacije} = \begin{bmatrix} X_x & X_y & X_z & 0 \\ Y_x & Y_y & Y_z & 0 \\ Z_x & Z_y & Z_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nakon translacije lokalnog sustava u ishodište (pomoću matrice M_1) dobivamo smjerove vektora lokalnog sustava.

x-os $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

y-os $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

z-os $(2, 0, 0)$ - nakon normalizacije $(1, 0, 0)$

$$M_{rotacije} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Iz tih vektora dobivamo matricu rotacije.
Primijetite kako je $M_2 \cdot M_3 = M_{rotacije}$

Sada navedene matrice moramo primijeniti na točku čiju perspektivnu projekciju tražimo, a to je točka $T(5, 0, 2)$.

1. nakon prve transformacije (translacija u ishodište) dobivamo: $\mathbf{T'(3, -1, 3)}$
2. nakon primjene matrice rotacije (ili $M_2 \cdot M_3$) nad točkom T' dobivamo: $\mathbf{T''(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3)}$

Sada je samo potrebno odrediti projekciju na projekcijsku ravninu, a to dobivamo iz matrice perspektivne projekcije, gdje je $H = 2$ (udaljenost očišta i gledišta).

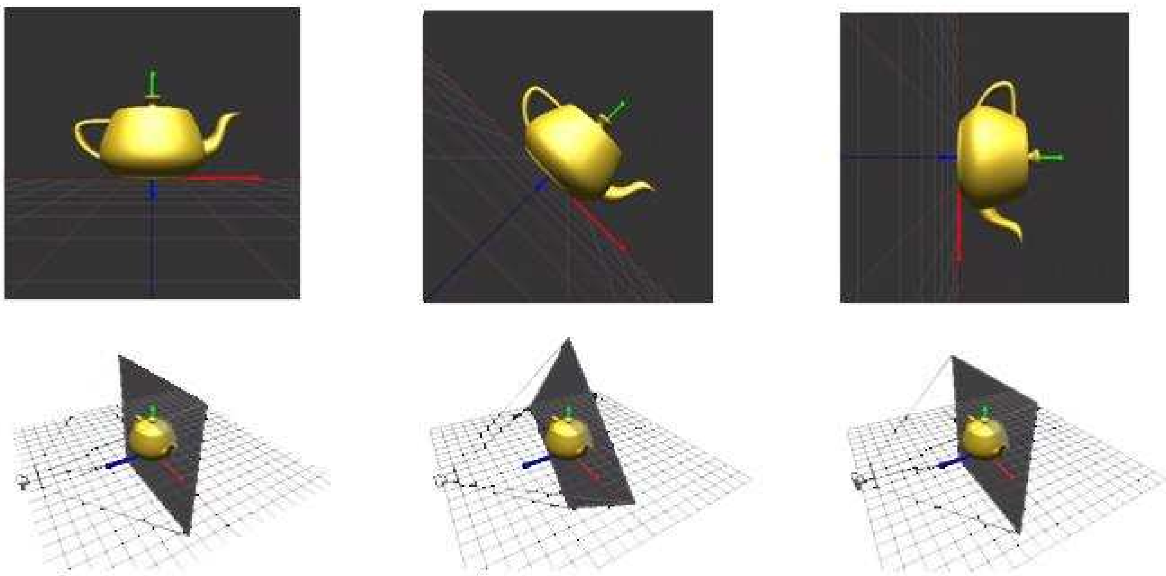
$$M_{persp.} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Točka T'' pomnožena s matricom perspektivne projekcije u radnom prostoru predstavlja perspektivnu projekciju točke T i iznosi: $\mathbf{T'''}\left(\frac{\mathbf{2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{4\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}\right)$

Zadatak 8

Neka je očište u točki $O(1, 1, 1)$, a gledište u točki $G(3, 3, 3)$. Ako je *view-up* vektor $v(0, 1, 0)$, odredite perspektivnu projekciju točke $T(4, 6, 8)$. Sustav je desni.

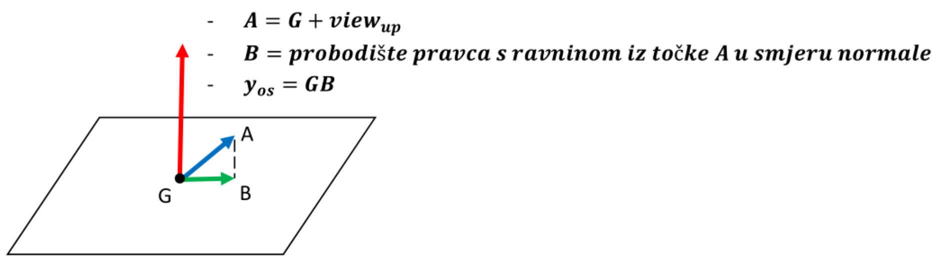
Rješenje:



Prije rješavanja zadatka prisjetimo se što je uopće view-up vektor. Zamislimo scenu (globalni sustav)u kojem se nalazi čajnik. Zamislite da želimo napraviti perspektivnu projekciju za određeno očište i gledište. Situaciju možemo zamisliti kao da fotoaparat postavimo u poziciju očišta, a usmjerimo ga u smjeru vektora OG. Slika neće biti jedinstvena! Naime, bilo koja rotacija fotoaparata oko osi OG zadovoljit će smjer pogleda, ali će svaka od tih slika biti drugačija. Potrebno nam je još jedno ograničenje – što će biti „gore“ na slici (smjer rastuće y-osi sustava oka – lokalnog sustava).

Projekcija view-up vektora na ravninu projekcije (određene očištem i gledištem) određuje y-os lokalnog sustava. Sada kada imamo smjer z-osi i y-osi, smjer x-osi lokalnog sustava dobivamo kao vektorski produkt dvije osi lokalnog sustava, budući da su sve tri osi lokalnog sustava međusobno okomite. Nakon što odredimo vektore osi lokalnog sustava možemo odrediti matricu rotacije koja poklapa osi s globalnim sustavom i odrediti perspektivnu projekciju.

Postavlja se pitanje kako odrediti vektor koji je projekcija na ravninu. Neka je zadana točka A, koja s točkom gledišta G tvori vektor koji želimo projicirati na ravninu. Točka B određuje vektora GA na ravninu (vektor GB). Postupak određivanja projekcije (koja predstavlja y-os lokalnog sustava) prikazani su u nastavku.



Drugi, brži način računanja, izvodi se preko dva vektorska produkta.

$c = \vec{GA} \times \vec{n}$ - dobivamo vektor koji leži u ravnini i okomit je na vektor GA

$y_{os} = \vec{n} \times \vec{c}$ - dobivamo vektor koji je paralelan s projekcijom GB vektora

Primijetite da ovim postupkom ne dobivamo ispravnu projekciju, što se tiče njene duljine, ali to nam niti nije bitno budući da nas u konačnici zanimaju jedinični vektori osi lokalnog sustava.

Sada, kada imamo dvije osi, treću dobivamo jednostavno, kao njihov vektorski produkt.

$x' = y' \times z'$ - definiramo desni sustav

$x' = z' \times y'$ - definiramo lijevi sustav

Krenimo s rješavanjem našeg zadatka.

Potrebno je odrediti vektor z' lokalnog sustava, a to radimo preko zadanog očišta i gledišta.

$$z_{tok} = G - O = (3,3,3,) - (1,1,1) = (2,2,2)$$

$$z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Sada je potrebno odrediti y' os lokalnog sustava.

$$c = \vec{GA} \times \vec{n} = (1,3,5) \times (2,2,2) = (-4,8,-4)$$

$$y_{tok} = \vec{n} \times \vec{c} = (-4,8,-4) \times (2,2,2) = (24,0,-24)$$

$$y' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Os x' lokalnog sustava dobivamo kao vektorski produkt y' i z' osi, budući da se traži desni sustav.

$$x' = y' \times z' = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

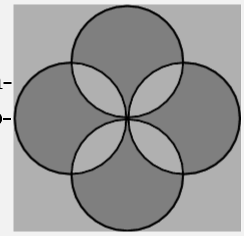
Sada kada imamo normalizirane osi lokalnog sustava, možemo odrediti potrebne matrice: rotacije, translacije i projekcije.

$$M_{rot} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M_{trans} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} M_{proj} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konačno, projekcija je zadana kao: $T \cdot M_{trans} \cdot M_{rot} \cdot M_{proj} = (-0.269, -1.032)$

Zadatak 9

Koristeći se samo punim krugom kao osnovnim elementom prikažite CSG stablo sljedećeg lika s minimalnim brojem operacija.

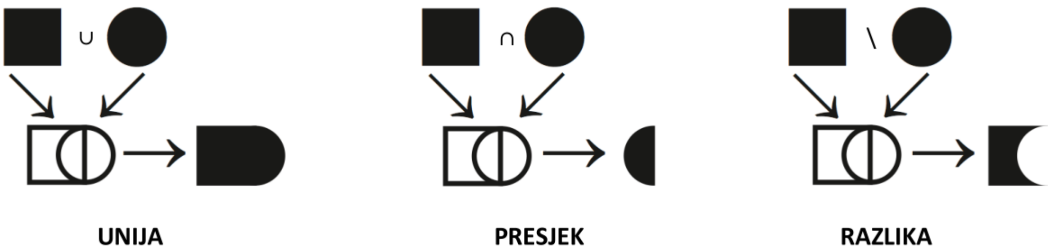


Rješenje:

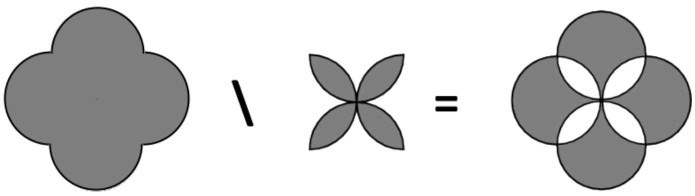
Prije nego što se posvetimo konkretnom zadatku, objasnit ćemo osnove izgradnje CSG stabla. Složeni oblici grade se iz osnovnih pomoću tri operacije: UNIJE, PRESJEKA i RAZLIKE. Likovi, koji mogu biti osnovni ili izvedeni operacijama, postavljaju se u određenu poziciju (na temelju koje se izvodi novi oblik), a oblik izvedenog tijela ovisi o vrsti operacije:

> **UNIJA** - rezultat je lik koji sadrži elemente jednog ili drugog tijela
>
> **PRESJEK** - rezultat je lik koji sadrži elemente i jednog i drugog tijela
>
> **RAZLIKA** - rezultat je lik koji sadrži element jednog, ali ne sadrži elemente drugog tijela

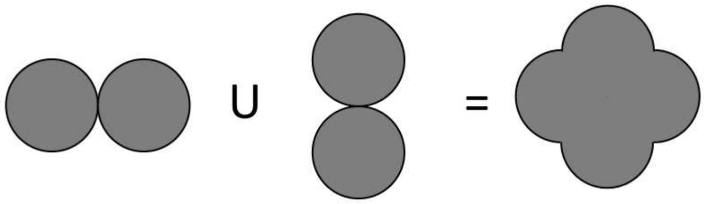
Primjer operacija pomoću osnovnih elemenata kvadrata i kruga dan je u nastavku.

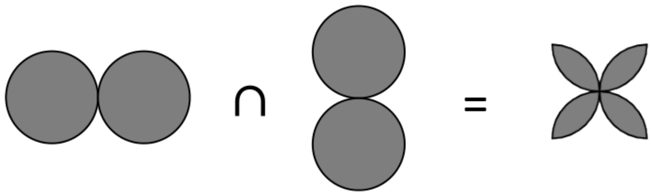


Posvetimo se sada našem primjeru. Konačan rezultat dobit ćemo ako nad dva lika prikazna u nastavku primijenimo operaciju razlike.

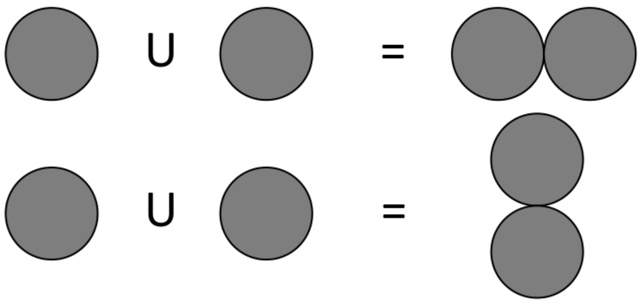


Kako smo pronašli glavnu operaciju pomoću koje možemo generirati konačan lik, potrebno je pronaći operacije koje generiraju prikazane likove. Vrijedi:



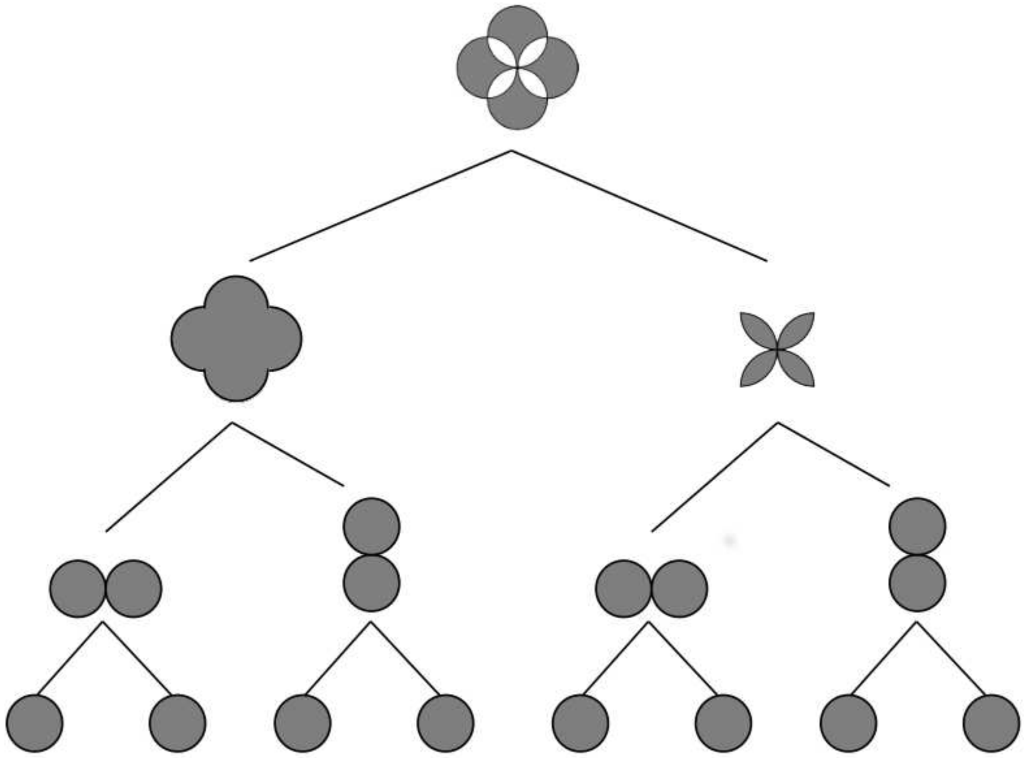


Te konačno zaključujemo:



Sada kada znamo koje je operacije i kojim redom potrebno primjenjivati, možemo izgraditi stablo. Stablo se gradi od listova koji predstavljaju osnovne elemente, a rezultat operacije predstavlja roditelj dvaju čvorova.

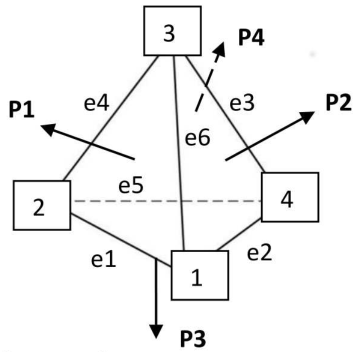
Stablo je prikazano u nastavku.



Zadatak 10

Zadan je tetraedar s označenim vrhovima. Normale poligona usmjerene su izvan tijela. Prikazati tijelo strukturom krilatog brida.

Rješenje:



Struktura krilatog brida sadrži 3 tablice:

- **tablica vrhova**
- **tablica bridova**
- **tablica poligona**

Tablica vrhova sadrži jedan vrhu incidentan brid (bilo koji).

U tablicu vrhova također se mogu pohraniti same koordinate vrhova.

OZNAKA	KOORDINATE	BRID
V1	koordinate prvog vrha	e1
V2	koordinate drugog vrha	e1
V3	koordinate trećeg vrha	e3
V4	koordinate četvrtog vrha	e2

Tablica poligona sadrži jedan brid incidentan poligonu.

OZNAKA	BRID	
P1	e1	
P2	e2	
P3	e1	
P4	e3	

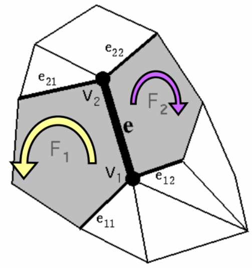
Tablica bridova za svaki brid sadrži početni i završni vrh brida te lijevi i desni poligon. Uz ove podatke sadrži i sljedeća četiri brida:

e11 brid lijevog poligona koji prethodi bridu

e21 brid lijevog poligona koji slijedi brid

e12 brid desnog poligona koji prethodi bridu

e22 brid desnog poligona koji slijedi brid



OZNAKA	POČETAK	KRAJ	LIJEVI P.	DESNI P.	e11	e21	e12	e22
e1	V1	V2	P3	P1	e2	e5	e6	e4
e2	V1	V4	P2	P3	e6	e3	e1	e5
e3	V3	V4	P4	P2	e4	e5	e6	e2
e4	V2	V3	P4	P1	e5	e3	e1	e6
e5	V2	V4	P4	P3	e4	e3	e1	e2
e6	V1	V3	P1	P2	e1	e4	e2	e3

Zadatak 11

> Odredite kvadratnu aproksimacijsku i kvadratnu interpolacijsku Bézierovu krivulju za točke $(1, 1, 2)$, $(2, 2, -1)$ i $(-3, 6, -4)$. Za parametre kontrolnih točaka odaberite $t = \frac{i}{n}$. Nakon toga odredite udaljenost točaka obje krivulje za parametar $t = \frac{1}{3}$.

Rješenje:

Osnovna verzija Bézierove krivulje je aproksimacijska krivulja. Naime, radi se o parametarski zadanoj krivulji čije se točke dobivaju prema sljedećoj formuli:

$f(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot r_i$

b_i su koeficijenti krivulje definirani prema formuli, $b_i = \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i$, a r_i točke kontrolnog poligona.

Tako možemo koristeći formulu odrediti koeficijente aproksimacijske krivulje:
$b_0 = (1-t)^2 \qquad b_1 = 2 \cdot t \cdot (1-t) \qquad b_2 = t^2$

Za parametar $t = \frac{1}{3}$, koeficijenti aproksimacijske krivulje su redom: $b_0 = \frac{4}{9}$, $b_1 = \frac{4}{9}$ i $b_2 = \frac{1}{9}$. Primijetite da je zbroj koeficijenata Bézierove krivulje uvijek jednak 1. Sada kada imamo određene koeficijente za zadani parametar možemo izračunati točku na krivulji.

$$f(t) = b_0 \cdot r_0 + b_1 \cdot r_1 + b_2 \cdot r_2 = \frac{4}{9} \cdot (1, 1, 2) + \frac{4}{9} \cdot (2, 2, -1) + \frac{1}{9} \cdot (-3, 6, -4) = (1, 2, 0)$$

Aproksimacijska krivulja je osnovni oblik Bézierove krivulje, dok je za izračun interpolacijske krivulje potrebno izračunati nove kontrolne točke iz (n+1) uvjeta.

Postavljamo sustav 3 jednadžbe s 3 nepoznanice:

$f(t=0) = b_0(t=0) \cdot r_0 + b_1(t=0) \cdot r_1 + b_2(t=0) \cdot r_2$
$f(t=0.5) = b_0(t=0.5) \cdot r_0 + b_1(t=0.5) \cdot r_1 + b_2(t=0.5) \cdot r_2$
$f(t=1) = b_0(t=1) \cdot r_0 + b_1(t=1) \cdot r_1 + b_2(t=1) \cdot r_2$

Uvjeti koje smo postavili nad krivuljom su ti da njena vrijednost za parametre $t = 0$, $t = 0.5$ i $t = 1$ mora odgovarati vrijednostima kontrolnih točaka. Nakon izračunavanja koeficijenata b_0, b_1 i b_2 za svaki od parametara t dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$f(t = 0) = r_0 = (1, 1, 2)$
$f(t = 0.5) = \frac{1}{4} \cdot r_0 + \frac{1}{2} \cdot r_1 + \frac{1}{4} \cdot r_2 = (2, 2, -1)$
$f(t = 1) = r_2 = (-3, 6, -4)$

Rješavanjem sustava dobivamo:

$r_0 = (1, 1, 2) \qquad r_1 = (5, 0.5, -1) \qquad r_2 = (-3, 6, -4)$

Sada je potrebno izračunati točku za parametar $t = \frac{1}{3}$ prema formuli za Bézierovu krivulju. Primijetite da se formula razlikuje samo kod vrijednosti kontrolnih točaka krivulje.

$$f(t) = b_0 \cdot r_0 + b_1 \cdot r_1 + b_2 \cdot r_2 = \frac{4}{9} \cdot (1, 1, 2) + \frac{4}{9} \cdot (5, 0.5, -1) + \frac{1}{9} \cdot (-3, 6, -4) = (\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, 0)$$

Prije izračuna udaljenosti komentirajmo još zašto su r_0 i r_2 jednaki kod interpolacijske i aproksimacijske krivulje. Razlog je to što svaka aproksimacijska krivulja prolazi kroz svoju početnu i završnu točku.

Udaljenost bilo koje dvije točke u prostoru računamo formulom:

$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

Primjenom gornje formule dobivamo traženu udaljenost točaka koja iznosi: $2\frac{\sqrt{5}}{3}$

Zadatak 12

Odredite segment kubne Bézierove krivulje čiji se početak glatko nastavlja (C^1 kontinuitet) na kvadratnu Bézierovu aproksimacijsku krivulju zadanu točkama $(-1,1)$, $(0,2)$ i $(1,1)$, a čijim završetkom započinje Bézierova aproksimacijska krivulja prvog reda za točke $(3,3)$ i $(4,5)$.

Rješenje:

Budući da je potrebno odrediti Bézierovu krivulju za stupanj n=3 bit će potrebno postaviti 4 jednadžbe s 4 nepoznanice (nepoznanice će biti kontrolne točke krivulje). Prve dvije jednadžbe koje postavljamo su ograničenja da Bézierova krivulja prolazi početnom i završnom točkom.

$$f(t=0) = b_0(t=0)\cdot r_0 + b1(t=0)\cdot r_1 + b_2(t=0)\cdot r_2 + b_3(t=0)\cdot r_3 = (1,1)$$
$$f(t=1) = b_0(t=1)\cdot r_0 + b1(t=1)\cdot r_1 + b_2(t=1)\cdot r_2 + b_3(t=1)\cdot r_3 = (1,1)$$

Kako se radi o krivulji trećeg stupnja težinske funkcije su:

$b_0 = (1-t)^3 \qquad b_1 = 2\cdot t\cdot(1-t)^2 \qquad b_2 = 2\cdot t^2\cdot(1-t) \qquad b_3 = t^3$

Iz prve dvije jednadžbe slijedi: $r_0 = (1,1)$ i $r_3 = (3,3)$.

Preostaje nam još postaviti uvjete za derivacije u početnoj i konačnoj točki. Naime, kako bi krivulja glatko nastavila drugu krivulju mora vrijediti da su im derivacije u toj točki jednake. Tako možemo zaključiti:

$f'(t=0) = f_1'(t=1)$

$f'(t=1) = f_2'(t=0)$

Gdje je f_1 kvadratna Bézierova aproksimacijska krivulja a f_2 linearna Bézierova aproksimacijska krivulja.

Za kvadratnu aproksimacijsku krivulju i njenu derivaciju vrijedi:

$f_1(t) = (1-t)^2\cdot(-1,1) + 2\cdot t\cdot(1-t)\cdot(0,2) + t^2\cdot(1,1)$

$f_1'(t) = -2 \cdot (1-t) \cdot (-1,1) + (2-4t) \cdot (0,2) + 2t \cdot (1,1)$

$f_1'(t=1) = -2 \cdot (0,2) + 2 \cdot (1,1) = (2,-2)$

Za linearnu aproksimaciju vrijedi:

$f_2(t) = (1-t) \cdot (3,3) + t \cdot (4,5)$

$f_2'(t) = -(3,3) + (4,5) = (1,2)$

Izračunajmo derivaciju kubne Bézierove krivulje za parametre $t = 0$ i $t = 1$.

$f(t) = (1-t)^3 \cdot r_0 + 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 \cdot r_1 + 3 \cdot t^2 \cdot (1-t) \cdot r_2 + t^3 \cdot r_3$

$f'(t) = -3 \cdot (1-t)^2 \cdot r_0 + (3 - 12t + 9t^2) \cdot r_1 + (2t - 3t^2) \cdot r_2 + 3 \cdot t^2 \cdot r_3$

$f'(0) = -3 \cdot r_0 + 3 \cdot r_1$

$f'(1) = -r_2 + 3 \cdot r_3$

Preostala dva uvjeta koje je potrebno postaviti glase:

$f'(0) = -3 \cdot r_0 + 3 \cdot r_1 = (2,-2)$

$f'(1) - r_2 + 3 \cdot r_3 = (1,2)$

Nakon rješavanja dobivamo:

$r_1 = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$r_2 = (8,7)$

Segment kubne Bézierove krivulje možemo opisati formulom:

$$f(t) = (1-t)^3 \cdot (1,1) + 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 \cdot \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right) + 3 \cdot t^2 \cdot (1-t) \cdot (8,7) + t^3 \cdot (3,3)$$

Zadatak 13

Kvadratna aproksimacijska krivulja zadana je točkama: $r_0(1,1)$, $r_1(3,3)$ i $r_2(5,1)$. Druga krivulja je interpolacijska i za parametre $t = 0$, $t = 0.5$ i $t = 1$ prolazi točkama $r'_0(2,6)$, $r'_1(4,6)$ i $r'_2(3,0)$. Odredi presjek ove dvije Bézierove krivulje.

Rješenje:

Težinske funkcije kvadratne Bézierove krivulje dobivaju se iz formule $b_i = \binom{n}{i} \cdot (1-t)^{n-i} \cdot t^i$ i iznose:

$b_0 = (1-t)^2 \qquad b_1 = (2 \cdot t \cdot (1-t) \qquad b_3 = t^2$

Kako je prva krivulja aproksimacijska, kontrolne točke poligona jednake su kontrolnim točkama krivulje, tj. $r_0 = (1,1)$, $r_1 = (3,3)$ i $r_2 = (5,1)$, pa možemo napisati parametarski oblik krivulje:

$$r = (1-t)^2 \cdot (1,1) + 2t(1-t) \cdot (3,3) + t^2(5,1)$$

A ako parametriziramo koordinate dobivamo dvije jednadžbe ovisne o parametru t.

$$x = (1-t)^2 + 6t(1-t) + 5t^2 = 1 + 4t$$
$$y = (1-t)^2 + 6t(1-t) + t^2 = 1 + 4t - 4t^2$$

Sada je potrebno odrediti parametarski zapis interpolacijske krivulje. Prisjetimo se, kako bi dobili interpolacijsku krivulju potrebno je riješiti sustav 3 jednadžbe s 3 nepoznanice. Jednadžbe postavljamo kao ograničenja da krivulja za zadani parametar mora prolaziti kroz točku kontrolnog poligona. Dobivamo sustav jednadžbi:

$$(2,6) = (1-0)^2 \cdot r''_0 + 2 \cdot 0 \cdot (1-0) \cdot r''_1 + 0^2 \cdot r''_2 = r''_0$$

$$(3,0) = (1-0.5)^2 \cdot r''_0 + 2 \cdot 0.5 \cdot (1-0.5) \cdot r''_1 + 0.5^2 \cdot r''_2 = \frac{1}{4}r''_0 + \frac{1}{2}r''_1 + \frac{1}{4}r''_2$$

$$(4,6) = (1-1)^2 \cdot r''_0 + 2 \cdot 1 \cdot (1-1) \cdot r''_1 + 1^2 \cdot r''_2 = r''_2$$

Rješenja gornjeg sustava su kontrolne točke interpolacijske krivulje i iznose:

$r_0'' = (2,6) \qquad r_1'' = (3,-6) \qquad r_2'' = (4,6)$

Sada kada imamo kontrolne točke krivulje, možemo krivulju zapisati u parametarskom obliku:

$$T = (1-u)^2 \cdot (2,6) + 2 \cdot u \cdot (1-u) \cdot (3,-6) + u^2 \cdot (4,6)$$

Napomenimo, budući da se radi o drugačijim krivuljama, one zahtijevaju i drugačiji parametar. Sada možemo napisati parametarske jednadžbe za koordinate.

$$x = 2(1-u)^2 + 6u(1-u) + 4u^2 = 2 + 4u$$

$$y = 6(1-u)^2 - 12u(1-u) + 6u^2 = 6 - 24u + 24u^2$$

Izjednačavanjem izraza za x i y koordinatu obje krivulje dobiva se rješenje:

$$t_{1,2} = \frac{20 + 5\sqrt{2}}{28}$$
$$u_{1,2} = \frac{13 + 5\sqrt{2}}{28}$$

Uvrštavanjem $t_{1,2}$ u parametarske koordinate prve ili $u_{1,2}$ u parametarske koordinate druge krivulje dobivaju se dvije točke presjeka:

$$T_1 = \left(\frac{27 + 5\sqrt{2}}{7}, \frac{153 - 30\sqrt{2}}{98} \right)$$

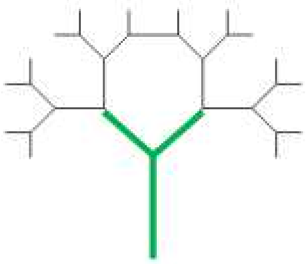
$$T_2 = \left(\frac{27 - 5\sqrt{2}}{7}, \frac{153 + 30\sqrt{2}}{98} \right)$$

Zadatak 14

Izračunaj visinu fraktala oblika stabla kojem je zadani osnovni gradivni element (na slici označen zelenom bojom). Kose grane osnovnog gradivnog elementa zatvaraju pravi kut, a okomita grana osnovnog elementa jednaka je 1. Na kraju svake od kosih grana dodaje se gradivni element čija je okomita grana 4 puta kraća od prethodne. Kose grane osnovnog gradivnog elementa dva su puta kraće od okomite grane.

Rješenje:

Fraktal ima oblik kao što je prikazano u nastavku.



Možemo uočiti pravilnost između visina okomito postavljenih grana, a to je da se one odnose u **omjeru 4:1**.

Isto to možemo zaključiti i za visine uzastopnih grana koje su postavljene pod kutom od 45 stupnjeva.

Ukupna visina stabla jednaka je zbroju visina okomitih grana i visina kosih grana.

Možemo zaključiti:

$$\sum visina_{okomito} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots$$

$$\sum visina_{koso}] = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{16} + \frac{\sqrt{2}}{64} + \cdots$$

Sumu ćemo izračunati iz formule za beskonačan geometrijski red:

$$\sum visina_{okomito} = \frac{a_0}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\sum visina_{koso} = \frac{a_0}{1-q} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ukupna je visina zbroj okomitih i kosih visina, a to iznosi: $\boldsymbol{\frac{4+\sqrt{2}}{3}}$

Zadatak 15

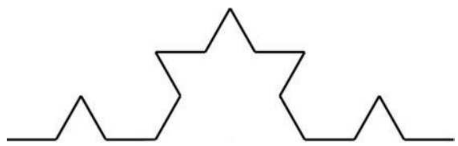
Izračunati površinu ispod Kochove krivulje, ako je površina početnog trokuta 9. Pokažite da je opseg Kochove krivulje beskonačan.

Rješenje:

Kochova krivulja zadana je rekurzivno:

1. osnovni oblik prikazan je na slici lijevo (sva 4 segmenta jednake su duljine)
2. svaki segment prethodnog koraka zamijeni se osnovnim oblikom

OSNOVNI OBLIK (dubina = 0)



IZVEDENI OBLIK (dubina = 1)

Primjetimo sljedeće:

- površina trokuta dodanog na dubini n, i trokuta dodanog na dubini n-1 odnose se u omjeru 1:9
- broj trokuta dodanih na dubini n i broj trokuta dodanih na dubini n-1 odnose se u omjeru 4:1 (budući da se na svakom segmentu stvara novi trokut a segmenata ima 4)

Možemo zaključiti:

$$P = P_0 + \frac{4}{9}P_0 + \frac{16}{81}P_0 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^i P_0$$

$$P = \frac{P_0}{1-\frac{4}{9}} = \frac{9}{5}P_0 = \frac{9}{5}\cdot 9 = \frac{81}{5}$$

Površina ispod Kochove krivulje iznosi $\mathbf{\frac{81}{5}}$

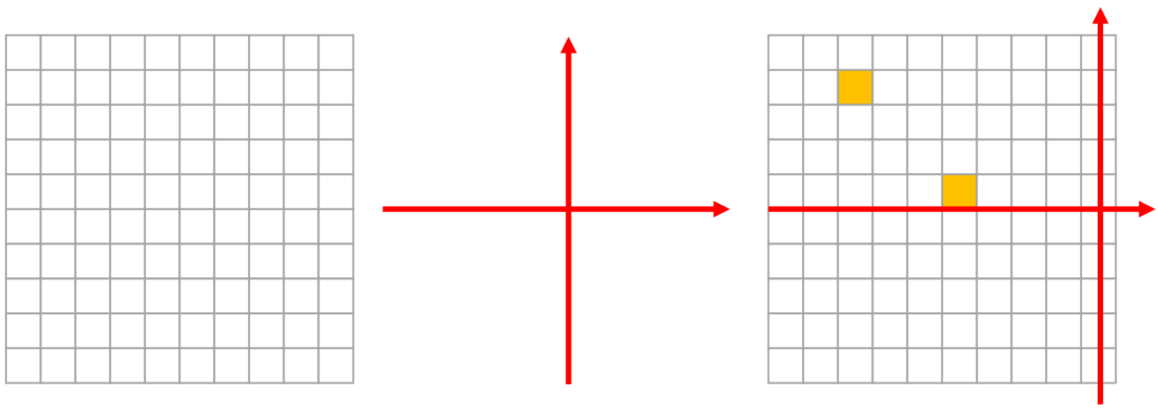
Svaki novi oblik koji se zamjenjuje segmentom sastoji se od 4 nova segmenta čija je duljina jednaka $\frac{1}{3}$ segmenta prošlog koraka, što znači da se svakom segmentu (u sljedećem koraku) duljina povećava $\frac{4}{3}$ puta. Kako se duljine povećavaju za faktor veći od 1, opseg divergira.

Zadatak 16

Ako je raster zaslona određen rezolucijom 10×10 piksela, gdje je pozicija donjeg lijevog piksela $(0,0)$. Ako raster zaslona poklopimo s kompleksnom ravninom s rasponom x-osi $[-2,0]$ i rasponom y-osi $[-1,1]$ te ako je radijus kružnice za ispitivanje divergencije jednak 3, a dubina rekurzije za provjeru divergencije 8 (i za 8 se ispituje divergencija), kojom će se nijansom crvene prikazati pikseli $(2,8)$ i $(5,5)$?

Rješenje:

Kako raster zaslona ima konačne dimenzije potrebno je obaviti preslikavanje pozicije piksela na koordinate u kompleksnoj mreži. Žutom su bojom prikazani pikseli koje moramo preslikati u koordinate kompleksne mreže.



Na lijevoj je slici prikazan raster zaslona, a na srednjoj kompleksni koordinatni sustav. Na zadnjoj je slici raster zaslona poklopljen s koordinatnim sustavom za kojeg vrijedi da je ograničen koordinatama [-2, 0] u x-smjeru i [-1, 1] u y-smjeru. Preslikavanje koordinata piksela u točke kompleksne mreže radimo ovako:

$$u = \frac{x}{x_{max}} \cdot (u_{max} - u_{min}) + u_{min}$$
$$v = \frac{y}{y_{max}} \cdot (v_{max} - v_{min}) + v_{min}$$

Koeficijent s kojim množimo x-koordinatu je $\frac{u_{max}-u_{min}}{x_{max}} = \frac{1-(-1)}{10} = 0.2$

Koeficijent s kojim množimo y-koordinatu je $\frac{v_{max}-v_{min}}{y_{max}} = \frac{1-(-1)}{10} = 0.2$

Ovi koeficijenti odgovaraju dijelu kompleksne mreže kojima pripada neki piksel. Kako bi dobili točno preslikavanje, potrebno je na točku pomnoženu s koeficijentom skaliranja osi pridodati minimalnu koordinatu kojom je os određena.

Tako se piksel na poziciji (2,8) preslikava u (-1.6, 0.6), a piksel na poziciji (5,5) u (-1,0).

Sada je potrebno odrediti pripada li točka (-1.6,0.6) Mandelbrotovom skupu s radijusom divergencije 3. Pripadnost točke c Mandelbrotovom skupu temelji se na kompleksnoj rekurzivnoj funkciji:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$
$$z_0 = 0$$

Reći ćemo da točka c pripada Mandelbrotovom skupu ako je modul svakog kompleksnog broja z dobivenog rekurzivnom jednadžbom manji od parametra kojeg nazivamo radijus divergencije. U praksi se ova provjera provjerava do određene (unaprijed postavljene) dubine rekurzije.

Ako se do određene dubine rekurzije ne ustanovi da je modul broja z veći od radijusa divergencije, reći ćemo da točka konvergira (pripada Mandelbrotovom skupu), a piksel koji je preslika u točku obojiti crnom bojom.

Inače, točka divergira (ne pripada Mandelbrotovom skupu), a pikselu koji se preslikava u nju pridijelit ćemo intenzitet proporcionalan dubini rekurzije na kojoj je ustanovljena divergencija (može biti od jedan do uključivo 8).

Započnimo s točkom (-1.6, 0)

$$\begin{array}{llll}
\textbf{dubina} = \textbf{1} & z_1 = 0^2 + (-1.6 + 0.6i) & z_1 = -1.6 + 0.6i & |z_1| = 1.71 \\
\textbf{dubina} = \textbf{2} & z_2 = (-1.6 + 0.6i)^2 + (-1.6 + 0.6i) & z_2 = 0.6 - 1.32i & |z_2| = 1.45 \\
\textbf{dubina} = \textbf{3} & z_3 = (0.6 - 1.32i)^2 + (-1.6 + 0.6i) & z_3 = -2.98 - 0.98i & |z_3| = 3.14
\end{array}$$

Vidimo da je divergencija utvrđena na dubini 3 što znači da piksel bojimo s intenzitetom crvene $\frac{3}{8} \cdot 255 = 96$.

Za drugu točku (-1, 0) lako pokazujemo da pripada Mandelbrotovom skupu pa ju bojimo crnom bojom (intenzitet = 0).

Rezultati bojanja prikazani su u nastavku. Za jednaku parametrizaciju kompleksne ravnine, radijusa divergencije i dubine rekurzije, ali uz rezoluciju 600x600 Mandelbrotov fraktal prikazan je desno.