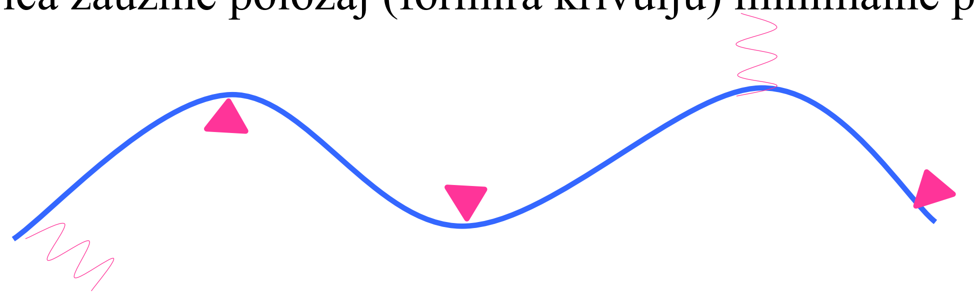
4.2 SEGMENTIRANJE KRIVULJE

- povezivanje segmenata uz očuvanje kontinuiteta na spojevima segmenata C^0, C^1, C^2 ... http://www.ibiblio.org/e-notes/VRML/Anim/FlyDemo.wrl
  - http://www.theparticle.com/applets/nyu/BezierApplet/
- korištenje crtaće letvice http://www.ibiblio.org/e-notes/VRML/Anim/Morph.wrl
  - letvica se učvrsti i optereti utezima tako da postigne željeni oblik
  - crtač zatim iscrta krivulju
  - letvica zauzme položaj (formira krivulju) minimalne potencijalne energije



letvica se savija po zakonu progiba opterećene grede:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E\,I} \Rightarrow d^2 y = \frac{M}{E\,I} dx^2$$ rješenje će dati kubnu funkciju

M – moment koji djeduje na gredu

E – Yungov modul elastičnosti, I – moment tromosti

- http://www.cs.princeton.edu/~min/cs426/classes/bezier.html
- http://www.cs.brown.edu/
- http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/curves.html
- http://www.ddt.pwp.blueyonder.co.uk/evgeny/Intro/Inter.htm

4.2.1. B - KRIVULJA

B - elastična krivulja ima svojstvo elastične letvice ("spline")

- kontinuitet je postignut dijeljenjem kontrolnih točaka između više segmenata
- prirodni splajn se može prikazati kao težinska suma baznih funkcija

– APROKSIMACIJSKA B-KRIVULJA

- k stupanj krivulje (broj kontrolnih točaka ne utječe na stupanj)
- r_i kontrolne točke - ukupno ih ima n+1
- $N_{i,k}$ bazne (težinske) funkcije - polinomi stupnja k
- u_i vrijednosti uzlova (engl. knot values)
- $U_{KNOT} = \{u_i\}$ vektor uzlova

$$\vec{p}(u) = \sum_{i=0}^{n} \vec{r}_i \, N_{i,k}(u)$$

Određivanje baznih funkcija

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & za \;\; u_i \le u < u_{i+1}\\ 0 & inač e\end{cases}$$

$$N_{i,k}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+k}-u_i}N_{i,\,k-1}(u)+\frac{u_{i+k+1}-u}{u_{i+k+1}-u_{i+1}}N_{i+1,\,k-1}(u)$$

- Ako je nazivnik jednak nuli vrijednost razlomka je nula.
- Uzlovi mogu biti višestruki.
- u_{i+1} - u_i = konst. Krivulja se naziva UNIFORMNA krivulja.

  Inače krivulja je NEUNIFORMNA.

Vektor uzlova

- veza između broja točaka stupnja krivulje i vektora uzlova

$$U_{KNOT} = \left[\underbrace{0\ \ 0\ ..\ 0}_{k+1}\ \underbrace{1\ \ 2\ \ 3\ ..\ (m-2k-1)}_{m-2k-1}\ \underbrace{(m-2k)\ ..\ (m-2k)}_{k+1} \right]$$

- $n + 1$ - broj kontrolnih točaka
- k - stupanj krivulje
- $m + 1$ - broj vrijednosti u vektoru uzlova

$$\boxed{m = n + k + 1}$$

- broj segmenata krivulje

broj segmenata krivulje = n - k + 1= m - 2k

- specijalan slučaj $m - 2k - 1 = 0$ → KRIVULJA BEZIERA

(preko Bernsteinovih polinoma)

* PRIMJER

Neperiodička kvadratna B-krivulja određene je sa šest kontrolnih točaka.

Odrediti segmente krivulje.

- $k = 2$
- $n + 1 = 6$
- $m = n + k + 1 = 8$

$$U_{KNOT} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{k+1} & & & \underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{m-2k-1} & & & \underbrace{4 \quad 4 \quad 4}_{k+1} & & \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}(u) = \sum_{i=0}^{5} \vec{r}_i \, N_{i,2}(u)$$

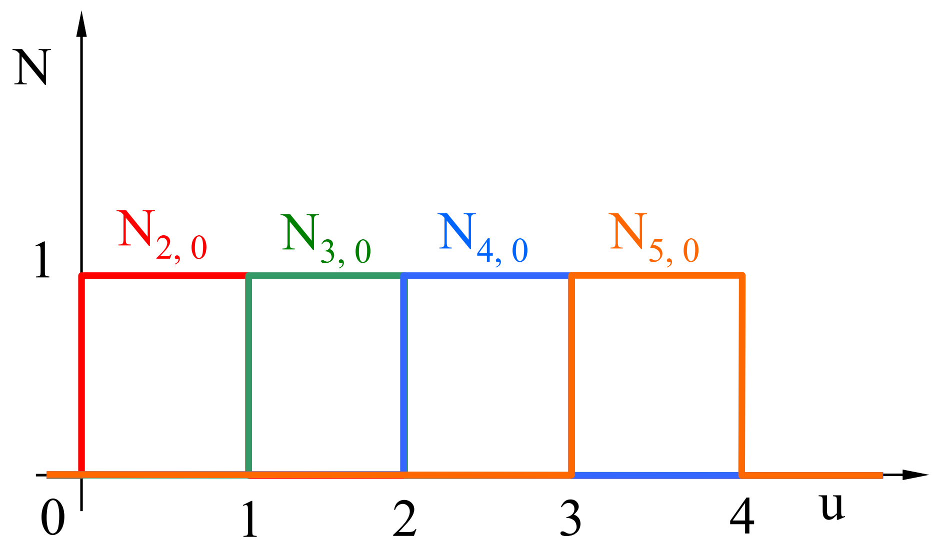
1. Korak:

$$N_{0,0} = 1\Big|_{[0]} \qquad N_{1,0} = 1\Big|_{[0]}$$

$$N_{2,0} = 1\Big|_{[0,1]} \qquad N_{3,0} = 1\Big|_{[1,2]}$$

$$N_{4,0} = 1\Big|_{[2,3]} \qquad N_{5,0} = 1\Big|_{[3,4]}$$

$$N_{6,0} = 1\Big|_{[4]} \qquad N_{7,0} = 1\Big|_{[4]}$$



2. Korak:

$$N_{i,1}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} N_{i,0}(u) + \frac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_{i+1}} N_{i+1,0}(u)$$

$$U_{KNOT} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{k+1} & & & \underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{m-2k-1} & & & \underbrace{4 \quad 4 \quad 4}_{k+1} & & \end{bmatrix}$$

$$N_{0,1} = \frac{u-u_0}{u_1-u_0} N_{0,0} + \frac{u_2-u}{u_2-u_1} N_{1,0} = 0\big|_{[0]}$$

$$N_{1,1} = \frac{u-u_1}{u_2-u_1} N_{1,0} + \frac{u_3-u}{u_3-u_2} N_{2,0} = (1-u)\big|_{[0,1]}$$

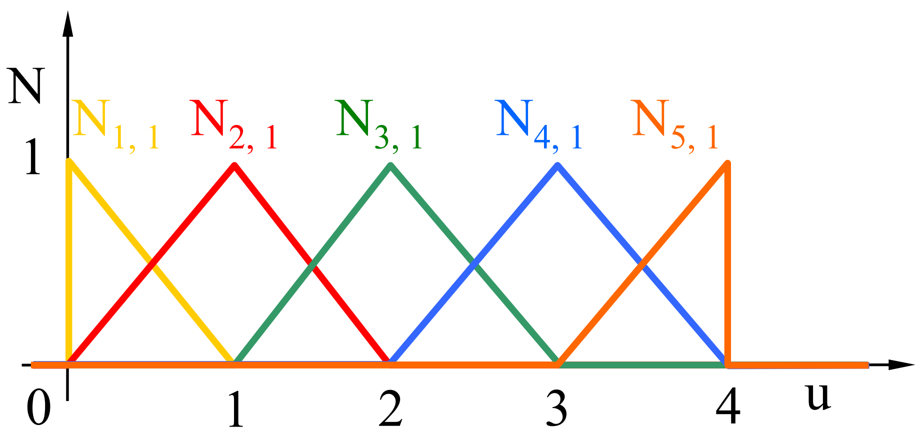
$$N_{2,1} = \frac{u-u_2}{u_3-u_2} N_{2,0} + \frac{u_4-u}{u_4-u_3} N_{3,0} = u\Big|_{[0,1]} + (2-u)\big|_{[1,2]}$$

$$N_{3,1} = (u-1)\big|_{[1,2]} + (3-u)\big|_{[2,3]}$$

$$N_{4,1} = (u-2)\big|_{[2,3]} + (4-u)\big|_{[3,4]}$$

$$N_{5,1} = (u-3)\big|_{[3,4]} + (4-u)\big|_{[4]}$$

$$N_{6,1} = (u-4)\big|_{[4]}$$



3. Korak:

$$N_{i,2}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+2}-u_i}N_{i,1}(u)+\frac{u_{i+3}-u}{u_{i+3}-u_{i+1}}N_{i+1,1}(u)$$

$$U_{KNOT}=\left[\begin{array}{ccccccccc} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{k+1}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{1 \quad 2 \quad 3}_{m-2k-1}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{4 \quad 4 \quad 4}_{k+1}} \end{array}\right]$$

$$N_{0,2}=\frac{u-u_0}{u_2-u_0}N_{0,1}+\frac{u_3-u}{u_3-u_1}N_{1,1}=(1-u)^2\Big|_{[0,1]}$$

$$N_{1,2}=\frac{u-u_1}{u_3-u_1}N_{1,1}+\frac{u_4-u}{u_4-u_2}N_{2,1}=u(1-u)\Big|_{[0,1]}+\frac{(2-u)u}{2}\Big|_{[0,1]}+\frac{(2-u)^2}{2}\Big|_{[1,2]}$$

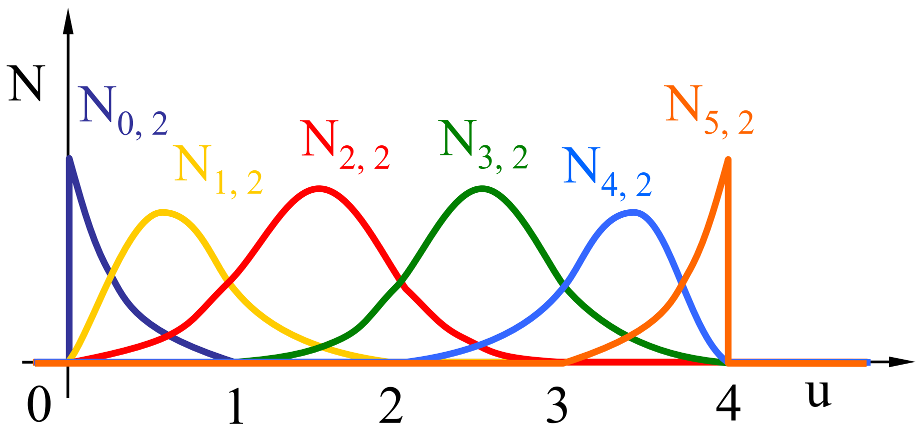
$$=\frac{u}{2}(4-3u)\Big|_{[0,1]}+\frac{(2-u)^2}{2}\Big|_{[1,2]}$$

$$N_{2,2}=\frac{u^2}{2}\Big|_{[0,1]}+\frac{-2u^2+6u-3}{2}\Big|_{[1,2]}+\frac{(3-u)^2}{2}\Big|_{[2,3]}$$

$$N_{3,2} = \left.\frac{(u-1)^2}{2}\right|_{[1,2]} + \left.\frac{-2u^2+10u+11}{2}\right|_{[2,3]} + \left.\frac{(4-u)^2}{2}\right|_{[3,4]}$$

$$N_{4,2} = \left.\frac{(u-2)^2}{2}\right|_{[2,3]} + \left.\left(-\frac{3}{2}u^2+10u-16\right)\right|_{[3,4]}$$

$$N_{5,2} = \left.(u-3)^2\right|_{[3,4]}$$



Određivanje segmenata krivulje:

$$\vec{p}(u) = \sum_{i=0}^{5} \vec{r}_i \, N_{i,2}(u)$$

$N_{i,2}(u)$	[0, 1]	[1, 2]	[2, 3]	[3, 4]
$\vec{r}_0$	$u^2 - 2u + 1$			
$\vec{r}_1$	$-\frac{3}{2}u^2 + 2u$	$\frac{1}{2}u^2 - 2u + 2$		
$\vec{r}_2$	$\frac{u^2}{2}$	$-u^2 + 3u - \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}u^2 - 3u + \frac{9}{2}$	
$\vec{r}_3$		$\frac{1}{2}u^2 - u + \frac{1}{2}$	$-u^2 + 5u + \frac{11}{2}$	$\frac{1}{2}u^2 - 4u + 8$
$\vec{r}_4$			$\frac{1}{2}u^2 - 2u + 2$	$-\frac{3}{2}u^2 + 10u - 16$
$\vec{r}_5$				$u^2 - 6u + 9$

Parametar u mijenja se od 0-1, 1-2, 2-3, 3-4

Segment 1: $u \in [0, 1]$

$$\vec{p}_1(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix}$$

Segment 2: $u \in [1, 2]$

Reparametrizacija u=t+1, $t \in [0, 1]$:

$$\vec{p}_2(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{p}_2(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{bmatrix}$$

Segment 3: $u \in [2, 3]$ Reparametrizacija $u=t+2$, $t \in [0, 1]$:

$$\vec{p}_3(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & -2 \\ \frac{9}{2} & \frac{4}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \end{bmatrix} \qquad \vec{p}_3(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \end{bmatrix}$$

Segment 4: $u \in [3, 4]$ Reparametrizacija $u=t+3$, $t \in [0, 1]$:

$$\vec{p}_4(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -4 & 10 & -6 \\ 8 & -16 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \\ \vec{r}_5 \end{bmatrix} \qquad \vec{p}_4(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \\ \vec{r}_5 \end{bmatrix}$$

n-3k+3=2 periodička segmenta segmenti 2 i 3 su isti!

Periodički segment

- Unutar neperiodičke B-krivulje stupnja *k* postoje periodički segmenti:

$$n \geq 3k-2 \qquad ili \qquad m \geq 4k-1$$

- kada je zadan veliki broj točaka središnji dio krivulje jednostavnije se može računati uporabom izraza za periodički segment

  Npr: periodički segment kubne B-krivulje (*k*=3):

$$\vec{p}_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_{i-1} \\ \vec{r}_i \\ \vec{r}_{i+1} \\ \vec{r}_{i+2} \end{bmatrix}$$

- broj periodičkih segmenata

$$n-3k+3 \qquad ili \qquad m-4k+2$$

Geometrijska svojstva

- Krivulja leži unutar **konveksne ljuske** kontrolnih točaka.

  To je posljedica baricentrične kombinacije težinskih funkcija .

$$\sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) = 1$$

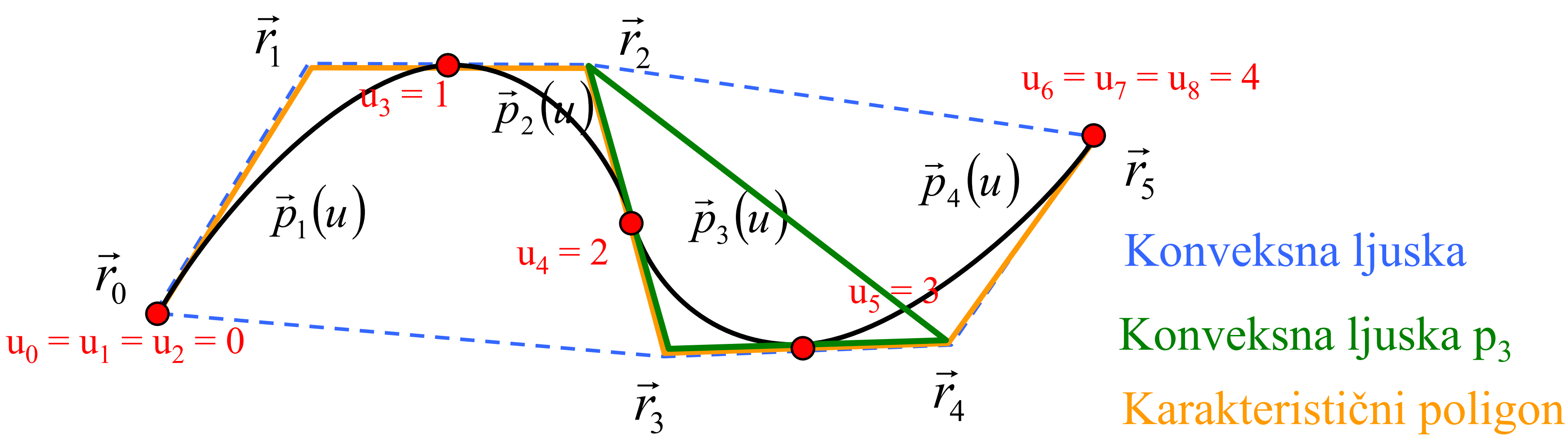
- ***i* - ti segment** je u konveksnoj ljusci pripadnih kontrolnih točaka
- $k = 1$ **linearna** interpolacija - krivulja je jednaka karakterističnom poligonu
- **lokalni** nadzor - pomak jedne točke utječe najviše na $k+1$ segment
- u uzlu krivulja ima **neprekinutost** C^{k-q}, q višestrukost uzla
- *** http://www.cs.utah.edu/~dav/curve_ed/

- Krivulja prolazi kroz početnu i završnu točku

$$\vec{p}_1(0) = \vec{r}_0\,, \quad \vec{p}_{kraj}(1) = \vec{r}_n$$

- Derivacije u početnoj i krajnjoj točki

$$\vec{p}_1'(0) = \frac{k(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{u_{k+1}}, \quad \vec{p}_{kraj}'(1) = \frac{k(\vec{r}_n - \vec{r}_{n-1})}{1 - u_{m-k-1}}$$



Oblikovanje krivulje

- Višestruke kontrolne točke
- Višestruke vrijednosti uzlova

$\Rightarrow$ smanjenje kontinuiteta - krivulja se približava kontrolnim točkama

- Fantomske točke - dodaju se kolinearno s derivacijama u krajnjim točkama tako da krivulja prolazi tim točkama $\left(\vec{r}_{-1} \text{ sa } \vec{r}_0 \ \vec{r}_1\right)$
- Poznate derivacije *** http://www.people.nnov.ru/fractal/Splines/None.htm

Višestrukost	Kontrolne točke	Uzla
1	C^2 G^2	C^2 G^2
2	C^2 G^1	C^1 G^1
3	C^2 G^0	C^0 G^0
4	C^2 G^0	diskontinuitet - odvojene točke

– INTERPOLACIJSKA B-KRIVULJA

- k stupanj krivulje
- p_i točke kroz koje želimo da krivulja prolazi - ukupno ih ima n +1
- $\Rightarrow$ potrebno je odrediti točke kontrolnog poligona r_j tako da krivulja prolazi točkama p_i. Kada odredimo točke r_j načinimo aproksimacijsku krivulju određenu točkama r_j

	r_j	Broj uvjeta:
Zatvorene periodičke krivulje	$j = 0 \, .. \, n - 1$	n
Otvorene neperiodičke krivulje	$j = 0 \, .. \, n + k - 1$	$n + k$

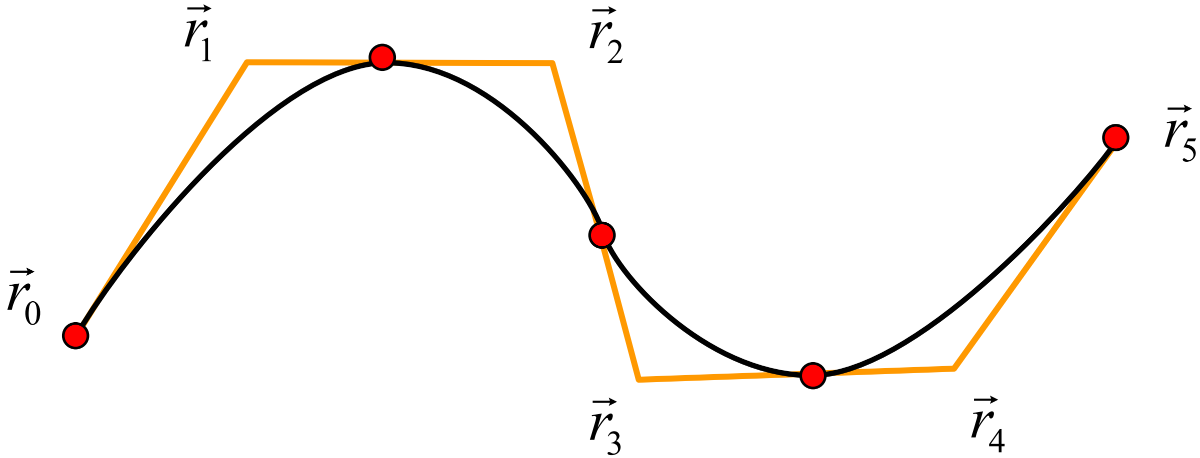
Kod zatvorenih periodičkih krivulja krajnje točke se preklope s početnima.

Kod otvorenih periodičkih krivulja poznato je n +1 interpolacijskih točaka i treba još k -1 dodatnih uvjeta.

* PRIMJER

Poznato je pet točaka. Odrediti kvadratnu interpolacijsku otvorenu neperiodičku B-krivulju.

- $k = 2$
- poznato je 5 točaka kroz koje krivulja treba prolaziti
- treba nam još k-1=1 dodatni uvjet
  - neka je dodatni uvjet derivacija u početnoj točki
- kontrolni poligon će imati 6 točaka $\vec{r}_j \quad j = 0..5$



Segment 1: $u \in [0, 1]$

$$\vec{p}_1(0) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix} \Bigg|_0 = \vec{r}_0$$

$$\vec{p}_1'(0) = \begin{bmatrix} 2u & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \end{bmatrix} \Bigg|_0 = -2\vec{r}_0 + 2\vec{r}_1$$

Segment 2: $u = 1$ ili u reparametriziranom obliku $t = 0$:

$$\vec{p}_2(0) = \frac{\vec{r}_1}{2} + \frac{\vec{r}_2}{2}$$

Segment 3:

$$\vec{p}_3(0) = \frac{\vec{r}_2}{2} + \frac{\vec{r}_3}{2}$$

Segment 4:

$$\vec{p}_4(0) = \frac{\vec{r}_3}{2} + \frac{\vec{r}_4}{2}$$

$$\vec{p}_4(1) = \vec{r}_5$$

Svih 6 uvjeta zapisano matrično:

$$\begin{bmatrix} \vec{p}_1(0) \\ \vec{p}\,'_1(0) \\ \vec{p}_2(0) \\ \vec{p}_3(0) \\ \vec{p}_4(0) \\ \vec{p}_4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \\ \vec{r}_5 \end{bmatrix}$$

U dobivenom sustavu potrebno je invertirati matricu (ili riješiti LU dekompozicijom, Gaussovom eliminacijom) i odrediti točke r_i kontrolnog poligona.

Točke r_i određuju kontrolni poligon tako da aproksimacijska krivulja prolazi zadanim p_i točkama.

Daljnje proširenje B-krivulja → NURBS

- **N**e**U**niformne http://www.people.nnov.ru/fractal/Splines/Basis.htm
- **R**acionalne
- **B**-krivulje

SPLAJN CATMULL-ROMA

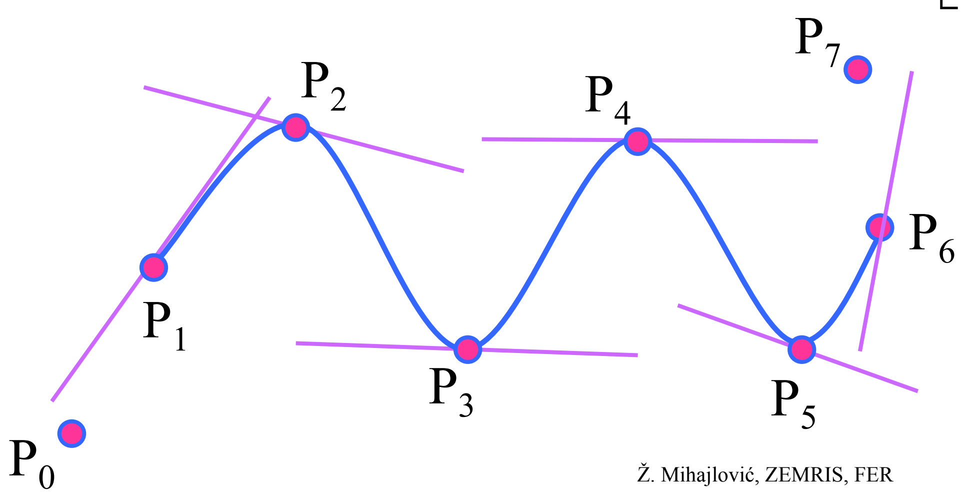
Kada želimo da krivulja glatko interpolira niz 3D točaka koje interaktivno zadajemo, možemo koristiti ovu interpolaciju.

- interpolira niz točaka P_1 do P_{m-1} na osnovi sekvence P_0 do P_m.

Vektor tangente u točci P_i paralelan je s dužinom $P_{i-1}\ P_{i+1.}$

Nema svojstvo konveksne ljuske.

$$\vec{p}_i(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_{i-3} \\ \vec{r}_{i-2} \\ \vec{r}_{i-1} \\ \vec{r}_i \end{bmatrix}$$



4.3. POVRŠINE

- promatramo geometrijsko mjesto točaka (trag) koji nastaje ako se neka krivulja pomiče i istovremeno deformira u prostoru
- segment površine čini krpicu

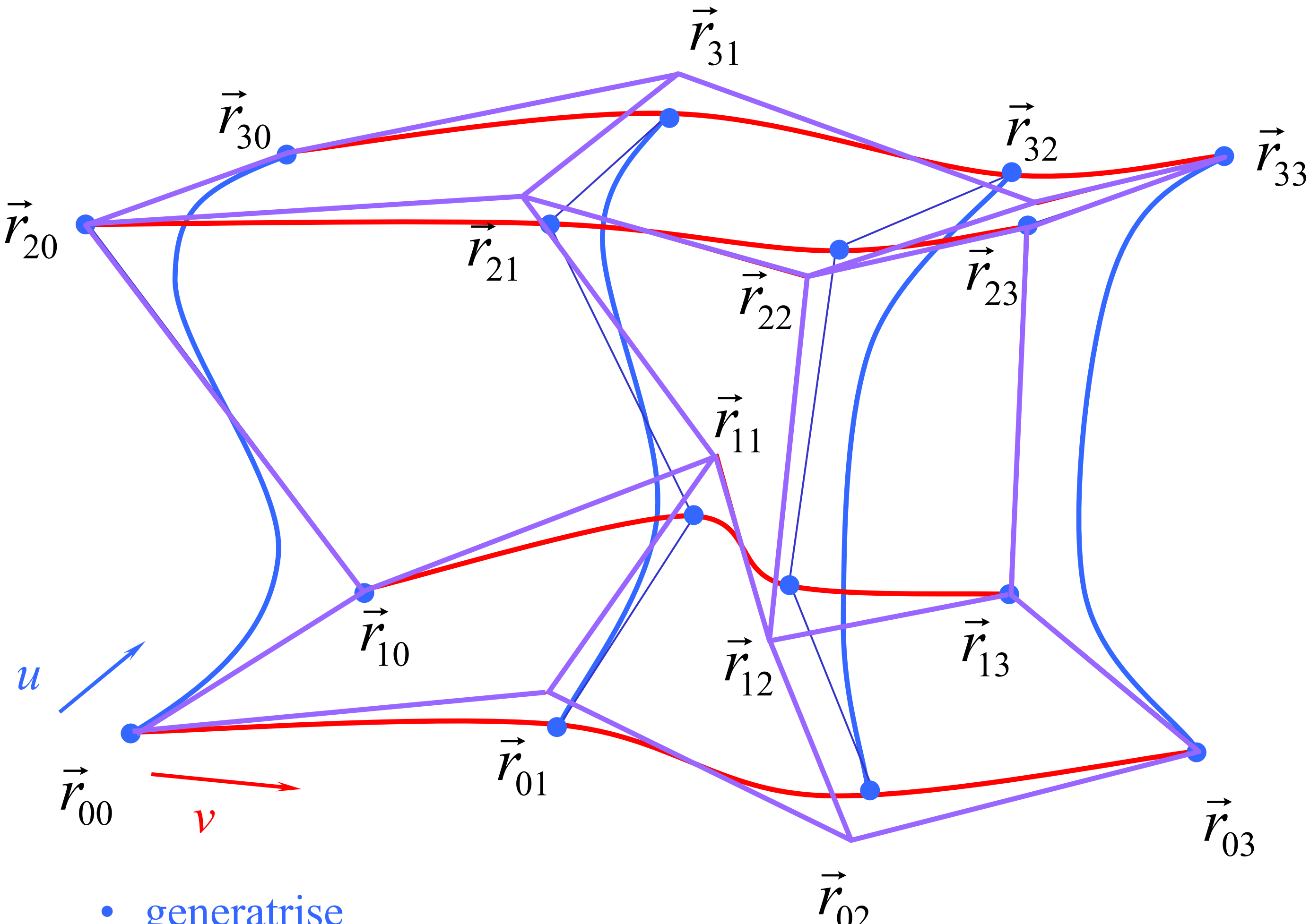
povezivanje krpica uz ostvarivanje kontinuiteta duž spojeva

- C^0 jednakost točaka krivulja duž spoja
- C^1 iste parcijalne derivacije (poprečno)
- C^2 zakrivljenost (poprečno)

POVRŠINA BEZIERA

- ako koristimo krivulje Beziera - dobit ćemo krpicu Beziera
- GENERATRISA - generira površinu
- DIREKTRISA - krivulje koje određuju kako će generatrisa gibati kroz prostor
- http://www.ibiblio.org/e-notes/Splines/Surf.wrl

- površina je funkcija dva parametra *u, v*



- generatrise
- direktrise

- prva i zadnja direktrisa zovu se glavne direktrise jer kontrolne točke generatrise leže na njima

- putanje vrhova kontrolnih poligona generatrise određuju direktrise

⇒ direktrise ne leže na površini (osim glavnih direktirisa)

- stupanj krivulja određuje krpicu

npr. bikvadratne, bikubične

***

http://www.cs.technion.ac.il/~cs234325/Homepage/Applets/applets/bezpatch/GermanApplet.html

$$\vec{p}(u,v)=\begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} D_0(v)^\tau \\ D_1(v)^\tau \\ D_2(v)^\tau \\ D_3(v)_\tau \end{bmatrix}$$

- pojedine direktrise

$$D_0(v)=\begin{bmatrix}v^3 & v^2 & v & 1\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}r_{00}\\ r_{01}\\ r_{02}\\ r_{03}\end{bmatrix}\quad D_1(v)=\begin{bmatrix}v^3 & v^2 & v & 1\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}r_{10}\\ r_{11}\\ r_{12}\\ r_{13}\end{bmatrix}$$

$$D_2(v)=\begin{bmatrix}v^3 & v^2 & v & 1\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}r_{20}\\ r_{21}\\ r_{22}\\ r_{23}\end{bmatrix}\quad D_3(v)=\begin{bmatrix}v^3 & v^2 & v & 1\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}r_{30}\\ r_{31}\\ r_{32}\\ r_{33}\end{bmatrix}$$

- krpica površine

$$\vec{p}(u,v)=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}M\begin{bmatrix}r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{02}\\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}M^{\tau}\begin{bmatrix}v^3\\ v^2\\ v\\ 1\end{bmatrix}$$