EULEROVI KUTOVI

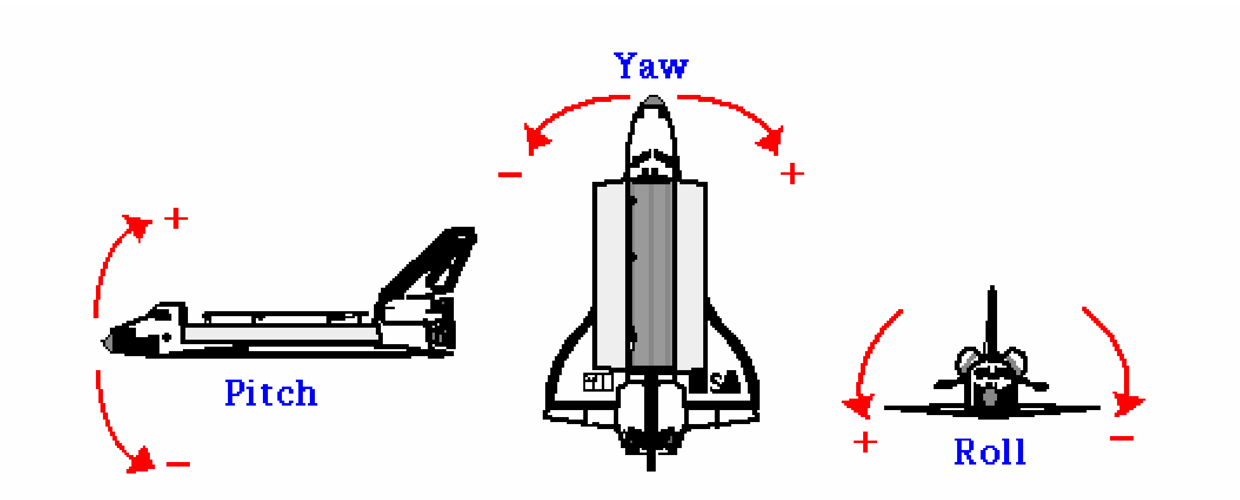
- položaj objekta je 6DOF (engl. Six Degree of Freedom) položaj *x, y, z* i orijentacija α, β, γ
- svaka rotacija može biti ostvarena kao kompozicija tri rotacije oko tri primarne osi R_x, R_y, R_z (lokalnog ili globalnog sustava)

- problemi i nedostaci takvog načina izvođenja rotacije
  - interpolacija između dva položaja u postupaka animacije
  - važan je redoslijed rotacija
  - Gimbal-lock (kada se dvije od tri osi poklope)

rješenje je u korištenju kvaterniona

Dvije konvencije za Eulerove kutove obzirom na redoslijed rotacija:

DUBINA SMJER NAGIB

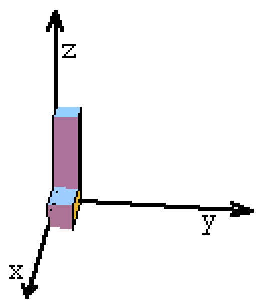


http://www.opensourcephysics.org/applets/osp3d/jeuler.html
http://www.mhl.soton.ac.uk/research/help/Euler

Rotacija oko osi
koordinatnog sustava
Eulerovi kutovi (α, β, γ)

1. oko z - osi za - 30°, α
2. oko y - osi za - 60 °, β
3. oko z - osi za - 45 °, γ

Starting position

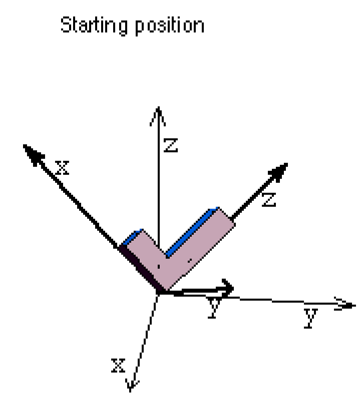


Rotacija oko osi

koordinatnog sustava tijela

Eulerovi kutovi (α, β, γ)

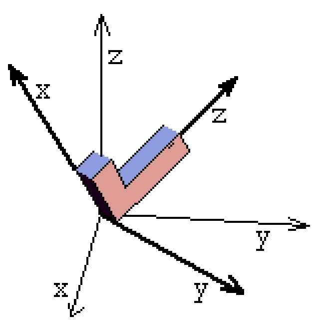
1. oko z_L - osi za 30°, α
2. oko y_L - osi za 60 °, β
3. oko z_L - osi za 45 °, γ



α se mijenja (ROLL)

NAGIB

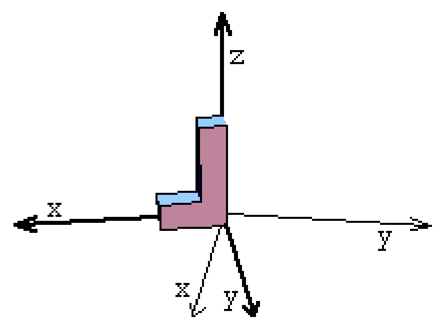
1. $0° < \alpha \leq 360°$,
2. $\beta = -60°$,
3. $\gamma = -45°$.



β se mijenja (PITCH)

DUBINA

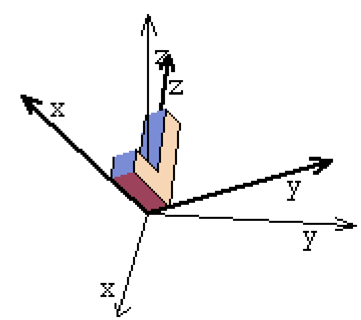
1. $\alpha = -30°$,
2. $0° < \beta \leq 360°$,
3. $\gamma = -45°$.



γ se mijenja (YAW)

SMJER

1. $\alpha = -30°$,
2. $\beta = -60°$,
3. $0° < \gamma \leq 360°$.



- KVATERNIONI (engl. quaternions)

  - proširenje kompleksnih brojeva
  - W.R. Hamilton uklesao je osnovnu formulu u kamen na mostu u Irskoj

$$i^2 = j^2 = k^2 = i\,j\,k = -1$$

  - dio općenitije klase hiperkompleksnih brojeva (tvore grupu)

$$H = \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \Re$$

  - kvaternion se može interpretirati kao skalar plus vektor

$$q = a_1 + a_2\,i + a_3\,j + a_4\,k = (a_1\ \mathbf{a})$$

  - zadane rotacije izrazimo u obliku kvaterniona,

koordinate tijela množimo kvaternionima.

- osnovne operacije s kvaternionima
  - množenje osnovnih vektora (slično vektorskom produktu u 3D)

$$i \cdot i = -1 \quad \left(\sqrt{i} = -1\right) \qquad i \cdot j = -j \cdot i = k$$

$$j \cdot j = -1 \qquad j \cdot k = -k \cdot j = i$$

$$k \cdot k = -1 \qquad k \cdot i = -i \cdot k = j$$

  - konjugirani broj

$$q = a_1 + a_2\, i + a_3\, j + a_4\, k \qquad q' = a_1 - a_2\, i - a_3\, j - a_4\, k$$

  - modul (apsolutna vrijednost), jedinični kvaternion, inverzni element

$$\|q\| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 + a_4{}^2}, \qquad \|q\| = 1 \;\Rightarrow\; q' = q^{-1},\; q^{-1} = q' / \left(q \cdot q'\right)$$

  - jesu asocijativni, **nisu** komutativni

$$q_1 \left(q_2 \cdot q_3\right) = \left(q_1 \cdot q_2\right) q_3 \qquad q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$$

  - produkt kvaterniona

$$q_1 \cdot q_2 = \left(s_1 \quad \mathbf{v}_1\right) \cdot \left(s_2 \quad \mathbf{v}_2\right) = \left(s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \quad s_1\, \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\right)$$

- reprezentacija rotacije oko vektora ***u*** za kut Θ kvaternionom:

$$q = \begin{pmatrix} s & \mathbf{v} \end{pmatrix} \qquad s = \cos(\theta/2),\ \mathbf{v} = \mathbf{u}\sin(\theta/2)$$

- rotacija točke ***p****,* točku predstavimo kvaternionom $P = (0, \boldsymbol{p})$

$$P_{rotirana} = q\,P\,q^{-1}, \qquad \text{ako je } q \text{ normiran } q' = q^{-1}$$

- dvije uzastopne rotacije q_1, q_2:

$$P_{rotirana} = q_2\left(q_1\,P\,q_1^{-1}\right)q_2^{-1} = \left(q_2 q_1\right)P\left(q_1^{-1} q_2^{-1}\right) = \left(q_2 q_1\right)P\left(q_1 q_2\right)^{-1}$$

- matrični oblik rotacije $P=[x_p\ y_p\ z_p]$, za $q = [w\ (x\ y\ z)]$:

$$P_{rotirana} = PQ_{rot} = \begin{bmatrix} x_p & y_p & z_p & 0 \end{bmatrix} Q_{rot} =$$

$$= P\begin{bmatrix} w^2+x^2-y^2-z^2 & 2xy+2wz & 2xz-2wy & 0 \\ 2xy-2wz & w^2-x^2+y^2-z^2 & 2yz+2wx & 0 \\ 2xz+2wy & 2yz-2wx & w^2-x^2-y^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^2+x^2+y^2+z^2 \end{bmatrix}$$