Dinamička analiza scena

robusna procjena parametara

Siniša Šegvić i Zoran Kalafatić

UniZg-FER ZEMRIS

Uvod

Procjena (estimacija) **parametara modela**: jedna od uspješnih paradigmi modernog računalnog vida

korisna kod **rekonstrukcijskih** pristupa:

- poravnavanje 2D objekata: translacija, sličnost, homografija
- položaj kamere: relativni (relative), apsolutni (absolute pose)
- 3D geometrija scene.

Ideja:

- stvarni svijet predstaviti parametriziranim modelom
- estimirati (procijeniti) parametre iz velikog skupa opažanja statističkim metodama
- slično učenju, ali ovdje optimizaciju provodimo prilikom "zaključivanja".

Uvod: model

Što bi bio model?   --- **apriorno znanje** o sceni ili efektu

Npr, afinost kao model prividnog kretanja planarne značajke

$$I_n(\mathbf{x}) = I_0(\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d})$$

Npr, Euklidska trans. kao model gibanja nepokretne scene

$$\mathbf{X_2} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{X_1} + \mathbf{T}$$

Npr, epipolarno ograničenje kao model odnosa korespondentnih značajki nepokretne scene

$$\mathbf{x_2}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{x_1} = 0$$

Uvod: aproksimacija

Naši modeli često pretpostavljaju pojednostavnjenu stvarnost:

- naša rješenja su aproksimacije
- odstupanja od pretpostavki nazivamo šumom.

Afina i projekcijska poravnavanja pretpostavljaju ravninske objekte.

Euklidska transformacija i epipolarno ograničenje pretpostavljaju savršene korespondencije i nepokretnu scenu.

Algoritmi praćenja pretpostavljaju konstantnu brzinu ili konstantnu akceleraciju itd.

Uvod: MLE

Estimacijska teorija se bavi **procjenjivanjem** parametara modela iz mnoštva podataka degradiranih šumom.

Šum predstavlja odstupanja uslijed nesavršenog modela:

- 2D transformacija ne može objasniti deformacije objekata koji nisu planarni odnono deformacije 3D objekata u prisustvu paralakse
- pronalaženje korespondencija ne može biti točno u piksel
- vanjski utjecaji: osvjetljenje, zamućenje, termalni šum, refleksije, prozirnosti, odsjaji...

Ideja: iz mnoštva djelomično kontradiktornih podataka izvući najizgledniju interpretaciju θ:

$$\theta = \arg\max p(x_i|\theta)$$

Uvod: šum

Često pretpostavljamo normalni nepristrani šum
(normalna razdioba obično dobro opisuje znanje o neznanju)

Npr, kod stereo vida, položaj značajke često označavamo:

$$\mathbf{q_i} = \overline{\mathbf{q_i}} + \Delta\mathbf{q_i},\ \text{uz}\ q_x, q_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Ideja: dizajnirati metode koje će rezultirati **statistički boljim** rezultatima u prisustvu šuma koji se ravna prema pretpostavljenom modelu!

Uvod: iznimke

Koncept šuma primjenljiv samo za umjerena odstupanja

Za veća odstupanja potrebno uvesti koncept izvanpopulacijskih podataka (iznimke, anomalije, novine) koji se ne pokoravaju dominantnom modelu

Izvanpopulacijske korespondencije za model nepokretne scene:

- korepondencija nastala asocijacijskom pogreškom (upareni su različiti objekti sličnog izgleda)
- ispravna korespondencija projekcije s pokretnog objekta.

Ideja: dizajnirati robusne metode koje mogu **detektirati** i **zanemariti** izvanpopulacijska mjerenja!

Uvod: teorija estimacije

U računalnom vidu često obrađujemo redundantne podatke (dobivamo sustav jednadžbi s viškom ograničenja)

Naša obrada često napreduje u prisustvu šuma i iznimki.

Želimo **gledati** (izlučivati parametre) na način da:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma bude **statistički** povoljan
3. vanpopulacijski parametri **ne ometaju** točan rezultat

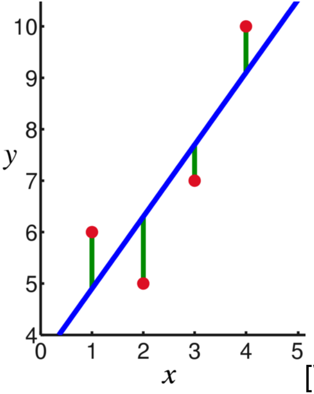
Okvir za postizanje tih svojstava daje **teorija estimacije**.

Linearni sustavi

Primjer broj jedan: provući pravac kroz zadani skup 2D točaka

Model **ovisnosti**: $y = a \cdot x + b$

Model **šuma**: djeluje na koordinatu y, nezavisan, identično raspodijeljen prema $\mathcal{N}(0, \sigma)$



[Wikipedia]

Linearni sustavi: višak ograničenja

Obično je ovakve probleme **najlakše** i najnepreciznije rješavati u projekcijskoj domeni.

Ako i-ta točka $\mathbf{q_i} = [x, y, 1]$ prolazi kroz pravac $\mathbf{p}$, vrijedi:

$$\mathbf{q_i}^\top \cdot \mathbf{p} = p_1 q_x + p_2 q_y + p_3 = 0$$

Ako su sve točke $\mathbf{q_i}$, $i = 1, 2, ..., n$ elementi pravca $\mathbf{p}$, vrijedi:

$$\mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad \text{gdje je} \ \ \mathbf{A}_{i,:} = \mathbf{q_i}^\top$$

U prisustvu šuma, gornja jednadžba nema rješenja.
Ima stoga smisla tražiti rješenje koje minimizira rezidual:

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\min_{\mathbf{p}}(\|\mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p}\|), \ \ \text{uz uvjet} \ \ \|\mathbf{p}\| = 1$$

Linearni sustavi: homogeni slučaj

Dobili smo linearni homogeni sustav s viškom ograničenja

- homogeneous linear least squares
- overconstrained homogeneous linear system

$$\widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}}(\|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1}\|), \quad \text{uz uvjet} \quad \|\mathbf{x}\| = 1$$

Rješenje odgovara desnom singularnom vektoru matrice **A** koji odgovara najmanjoj singularnoj vrijednosti!

Singularne vrijednosti i vektore dobivamo singularnom dekompozicijom.

Ekvivalentan rezultat dobivamo svojstvenom dekompozicijom simetrične matrice $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$

Linearni sustavi: nehomogeni slučaj

Linearni nehomogeni sustav s viškom ograničenja:

$$\widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} (\|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1} - \mathbf{b}_{n\times 1}\|)$$

Rješenje je umnožak pseudoinverza matrice **A** i vektora **b**:

$$\widehat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+} \cdot \mathbf{b}$$

Moore-Penroseov inverz $\mathbf{A}^{+}$ dobivamo singularnom dekompozicijom, ili nekim drugim metodama koje su nešto brže i nešto manje točne

SVD: UVOD

Svaka matrica $\mathbf{A}_{m\times n}$ ima singularnu dekompoziciju:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top$$

- $\mathbf{U}_{m\times m}$ ($\mathbf{U}_{m\times n}$) ... ortogonalna matrica (ili ortogonalni stupci)
- $\mathbf{D}_{m\times n}$ ($\mathbf{D}_{n\times n}$) ... dijagonalna pozitivno semidefinitna matrica
- $\mathbf{V}_{n\times n}$ ... ortogonalna matrica

Vrijedi:

- $\mathbf{D}_{i,i} = d_i$ --- i-ta singularna vrijednost ($d_i \in \mathbb{R}_0^+, d_i > d_{i+1}$)
- $\mathbf{V}_{:,i} = \mathbf{v}_i$ --- i-ti desni singularni vektor ($\mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$)
- $\mathbf{U}_{:,i} = \mathbf{u}_i$ --- i-ti lijevi singularni vektor ($\mathbf{u}_i^\top \mathbf{u}_j = \delta_{ij}$)
  - $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\| = (\mathbf{U}\mathbf{x})^\top(\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top\mathbf{U}^\top\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top(\mathbf{U}^\top\mathbf{U})\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|$

SVD: VS SVOJSTVENA

Malo intuicije: u kakvoj je vezi SVD $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top$ sa svojstvenom dekompozicijom simetrične matrice

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{V}^\top?$$

Za simetrične matrice, SVD odgovara svojstvenoj dekompoziciji:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{V}$$

Uvrštavanjem SVD dekompozicije matrice $\mathbf{A}$ dobivamo:

- $\mathbf{V}$ figurira u svojstvenoj dekompoziciji $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{V}(\mathbf{D}^\top\mathbf{D})\mathbf{V}^\top$
- $\mathbf{U}$ figurira u svojstvenoj dekompoziciji $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{U}(\mathbf{D}\mathbf{D}^\top)\mathbf{U}^\top$
- $d_i^2 = \lambda_i(\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \lambda_i(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)$

SVD: SVOJSTVA

SVD kao otežani zbroj vanjskih produkata:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$$

SVD pruža osnovne informacije o matrici:

- neka je $d_i > 0, \forall i \leq r$, te $d_i = 0, \forall i > r$
- kodomena (slika) matrice: $\mathcal{K}(\mathbf{A})= \mathrm{span}\{\mathbf{u}_i, i = 1, 2, ..., r\}$
- nulprostor (jezgra) matrice: $\mathrm{null}(\mathbf{A})= \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i, i = r+1, ..., n\}$
- rang matrice: $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = r$
- uvjetovanost matrice: $\kappa(\mathbf{A})=d_1/d_n$

SVD: SVOJSTVA (2)

Podsjetnik: $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\top = \sum_i d_i \cdot \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$

SVD predstavlja djelovanje matrice kao:

- rotaciju u odredišnom prostoru ($\mathbf{U}_{m\times m}$)
- neravnomjerno skaliranje + pad ranga ($\mathbf{D}_{m\times n}$)
- rotaciju u izvornom prostoru ($\mathbf{V}_{n\times n}$)

Optimalna $\|\|_F$ aproksimacija najbližom matricom nižeg ranga r_a

- dovoljno je postaviti $d_i = 0, i = r_a, ..., \max(m, n)$!
- retci matrice **U** --- koeficijenti redaka **A** u koordinatama rastegnutog prostora matrice V,
- kriterij sortiranja: istaknutost, značaj pri raspoznavanju
- primjene: PCA, kompresija, analiza linearnih sustava

SVD: HOMOGENI SUSTAVI, VIŠAK OGRANIČENJA

Zašto i kako SVD **optimalno** (L2) ``rješava" homogene sustave?

Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^\top$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{UDV}^\top\mathbf{x}\| = \min_x \|\mathbf{DV}^\top\mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$$

Neka je $\mathbf{q} = \mathbf{V}^\top\mathbf{x}$; tada vrijedi:

$$\|\mathbf{UDV}^\top\mathbf{x}\| = \|\mathbf{Dq}\|, \text{ uz } \|\mathbf{q}\| = 1 \qquad (*)$$

Elementi $\mathbf{D}$ su pozitivni i padajući, pa $\mathbf{q}$ koji minimizira (*) iznosi
$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^\top$

Odatle slijedi ono što je trebalo dokazati: $\mathbf{x} = \mathbf{Vq} = \mathbf{V}_{:,n}$ $\square$

SVD: nehomogeni sustavi, višak ograničenja

Promotrimo nehomogeni sustav $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \rightarrow \min$.

Rastavimo **A** potpunim SVD-om ($\mathbf{U}_{m \times m}$, $\mathbf{D}_{m \times n}$): $\mathbf{A} = \mathbf{UDV}^\top$

- sada je **U** kvadratna matrica pa lako dobivamo $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\top$.

Tražimo **x** koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{UDV}^\top \mathbf{x} - \mathbf{b}\| = \min_q \|\mathbf{Dq} - \mathbf{U}^\top \mathbf{b}\|, \text{ uz } \mathbf{q} = \mathbf{V}^\top \mathbf{x}$$

Dobili smo sustav m×n u **q**:

- veza između **q** i **x** je izravna i dvosmjerna jer se **V** lako invertira
- treba uzeti u obzir da je **D** pravokutna i možda defektna ($r < n$).

SVD: nehomogeni sustavi, višak ograničenja (2)

Raspišimo normu reziduala uz pokrate $\mathbf{q} = \mathbf{V}^\top\mathbf{x}$ i $\mathbf{c} = \mathbf{U}^\top\mathbf{b}$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{U}^\top(\mathbf{Ax} - \mathbf{b})\|^2 &= \|\mathbf{Dq} - \mathbf{c}\|^2 \\ &= \sum_{i=0}^{r}(d_i q_i - c_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{m}(0 - c_i)^2 \\ &= \sum_{i}^{r}(d_i q_i - c_i)^2 + \sum_{i=r+1}^{m} c_i^2\end{aligned}$$

Norma zarotiranog reziduala sastoji se od dva člana:

- naše rješenje može utjecati samo na prvi član!
- drugi član odgovara projekciji vektora **b** na null(**A**).

Sad se vidi da za minimum mora biti $q_i = \mathbf{u}_i^\top\mathbf{b}/d_i,\ i = 1 : r$

SVD: nehomogeni sustavi, višak ograničenja (2)

Vidjeli smo da mora biti: $q_i = \mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}/d_i, i = 1 : r$.

Koliki je $\mathbf{x} = \mathbf{Vq}$?

Uvrštavamo q_i i žongliramo skalarnim produktom...

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{r} q_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{u}_i^\top \mathbf{b}}{d_i} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{u_i}^\top}{d_i} \cdot \mathbf{b}$$

Odatle iščitavamo rješenje sustava $\mathbf{Ax} - \mathbf{b} \rightarrow \min$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{D}^{+}\mathbf{U}^\top \cdot \mathbf{b} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b}$$

$\mathbf{A}^{+}$ ... pseudoinverz od $\mathbf{A}$ (Moore - Penrose)

SVD: MANJAK OGRANIČENJA

Kako SVD ``rješava'' sustave s manjkom ograničenja?

Npr: koje sve ravnine prolaze kroz zadane dvije točke?

Homogeni sustav $\min_x \|\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1$ može imati:

- rješenje u smislu LS, ako $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n$
- točno rješenje, ako $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = n - 1$
- beskonačno rješenja, ako $\mathrm{rang}(\mathbf{A}) < n - 1$

U posljednjem slučaju, potprostor rješenja je:
$\mathrm{null}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{\mathbf{v}_i, i = r + 1, ..., n\}$

Rješenja nehomogenog sustava dobivamo kao zbroj:

- potprostora rješenja homogenog sustava, i
- nekog partikularnog rješenja

SVD: KONDICIONIRANJE

Razmotrimo homogeni preograničeni sustav:

$$\widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}\| \ , \ \text{uz} \ \|\mathbf{x}\| = 1$$

$\widehat{\mathbf{x}}$ je rješenje sustava $\widehat{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x} = 0$, gdje je $\widehat{\mathbf{A}}$ defektna matrica najbliža $\mathbf{A}$ (u smislu Frobeniusove norme)

Ključ kvalitete rješenja je u razdiobi šuma $\mathbf{D}$ u matrici sustava $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \widehat{\mathbf{A}}$$

Neravnomjerno raspoređen šum $\Rightarrow$ pristrano rješenje!

Obratiti pažnju na razdiobu šuma po stupcima i po redcima matrice sustava!

SVD: KONDICIONIRANJE (2)

Razdioba šuma u matrici sustava pospješuje se kondicioniranjem

Teorijski dobro utemeljen pristup je uravnotеživanje [hartley97pami, muehlich98eccv]

Matrica sustava se množi s lijeva i s desne prikladnim kvadratnim matricama punog ranga:

$$\widehat{\mathbf{x}} = \arg\min_{\mathbf{x}} |\mathbf{A_{eq}} \cdot \mathbf{x}'| \;, \text{ gdje su}$$

$$\mathbf{A}_{eq} = \mathbf{W_L} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{W_R},$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{W_R}^{-1} \cdot \mathbf{x}$$

Cilj je **ravnomjerno** raspoređen **šum** u $\mathbf{A_{eq}}$:

$$E[\mathbf{D_{eq}}^\top \mathbf{D}_{eq}] = c \cdot \mathbf{I}, \text{ gdje je } \mathbf{D_{eq}} = \mathbf{A_{eq}} - \widehat{\mathbf{A}}_{\mathbf{eq}}$$

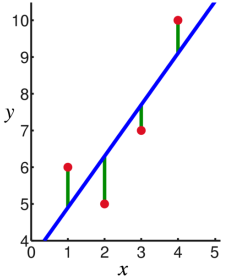
Kriteriji: algebarski rezidual

Vratimo se na algebarski projekcijski kriterij:

$\widehat{\mathbf{p}}_{alg} = \arg\min_{\mathbf{p}} \|\mathbf{A}_{m\times 3} \cdot \mathbf{p}\|, \quad \text{gdje je} \;\; \mathbf{A}_{i,:} = \mathbf{q_i}^\top$

Nedostatak takvog rješenja:

- ne minimizira se smislena funkcija cilja



Projekcijski algebarski kriterij možemo razjasniti uvrštanjem podataka s eksplicitno modeliranim šumom $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i + \delta y_i, 1)$:

$$\widehat{\mathbf{p}}_{\mathrm{alg}} = \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \left(\mathbf{p}^\top (x_i, y_i, 1) + p_2 \cdot \delta y_i\right)^2 \quad \text{uz} \quad \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = 1$$

Kriterij je pristran jer favorizira pravce s malim p_2!

Kriteriji: geometrijski rezidual

Bolje rješenje dobivamo parametrizacijom $\mathbf{p} = (k, l)$, koja dozvoljava modeliranje geometrijskog kriterija:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{p}}_{g1} &= \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \|p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i\| \\
&= \mathbf{A}_{m\times 2} \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{y}_m, \quad \text{gdje je } \mathbf{A}_{i,:} = \begin{bmatrix} x_i & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

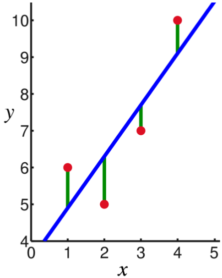
Ako uvrstimo degradirane podatke $(x_i, y_i + \delta y_i)$ u **točan** pravac $\mathbf{p}$, vidimo da i-ti rezidual r_i iznosi upravo δy_i.

Stoga će rješenje $\mathbf{p} = \mathbf{A}^+\mathbf{y}$ biti pravac s minimalnim ukupnim kvadratnim odstupanjem od zadanih točaka

- vidjet ćemo da taj pravac maksimira *izglednost* pod pretpostavkom nezavisnog normalnog šuma

Kriteriji: eksperiment

Idemo provjeriti teoriju za točke sa slike:
(1,6); (2,5); (3,7); (4,10)



$\mathbf{A}_A$ --- matrica algebarske formulacije (4×3)
$\mathbf{A}_G$ --- matrica geometrijske formulacije (4×2)

Izvorni kod u octaveu:

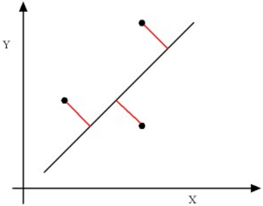
```
Aa=[1 6 1; 2 5 1; 3 7 1; 4 10 1]; disp(kla)    // [ 0.9; 5.0 ]
[U,D,V]=svd(Aa); v3=V(:,3);
kla=[-v3(1)/v3(2); -v3(3)/v3(2)]; disp(klg)    // [ 1.4; 3.5 ]

Ag=[1 1; 2 1; 3 1; 4 1];          disp(norm(Ag*kla-y))  // 2.4
y=[6;5;7;10];
klg=pinv(Ag)*y;                   disp(norm(Ag*klg-y))  // 2.0
```

Kriteriji: TLS

Ako šum djeluje na obje koordinate, onda imamo problem najmanjih "potpunih" kvadrata

- eng. total least squares:

$$\delta x, \delta y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$



Ovdje nam prošli kriteriji (alg, g1) neće dati optimalno rješenje:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{p}}_{\mathrm{g}2} &= \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i d^2(\mathbf{p}, \mathbf{q_i}) \\
&= \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i \frac{(p_1 q_x^i + p_2 q_y^i + p_3)^2}{p_1^2 + p_2^2}
\end{aligned}$$

Novi kriterij (g2) je **nelinearan** iako je model linearan:

- na prvi pogled, ne možemo ga optimirati algebarski
- preostaje numerička optimizacija (SGD, Gauss-Newton, ...)

Kriteriji: nelinearna optimizacija

Optimizacija geometrijskih kriterija često se ne da izraziti linearnim jednadžbama!

U takvim slučajevima, najbolje rezultate nećemo moći dobiti bez **nelinearne optimizacije** (npr. gradijentni spust)

Jesu li onda linearne metode estimacije beskorisne?
(Projective geometry considered harmful, IJCV99)

Ipak, odgovor je po svoj prilici ne, jer:

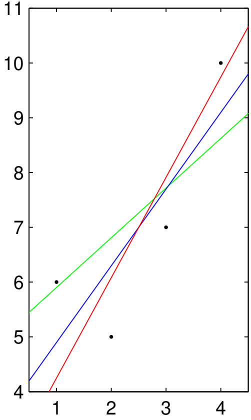
- linearna metoda jedini izbor kad nemamo početnu aproksimaciju
- linearni rezultat može biti jednako upotrebljiv kao i geometrijski
- linearne metode mogu se dramatično poboljšati kondicioniranjem
  (In Defense of the Eight-Point Algorithm, PAMI1997)

KRITERIJI: TLS (2)

Pažljivija analiza pokazuje da u ovom slučaju kriterij g2 možemo optimirati u zatvorenom obliku metodom PCA.

Program u Octave-u (dolje), te tri provučena pravca (desno)

```
A_alg=[1 6 1; 2 5 1; 3 7 1; 4 10 1];
A_g2=A_alg(:,1:2);
mu_g2=mean(A_g2);
A_g2_mu=A_g2 -  [1;1;1;1]*mu_g2;
[U_g2,D_g2,V_g2]=svd(A_g2_mu);
k_g2=V_g2(2,1)/V_g2(1,1)
l_g2=mu_g2(2)-k_g2*mu_g2(1)
```



	alg	g1	g2
$\hat{k}$	0.9	1.4	1.8
$\hat{l}$	5.0	3.5	2.4

Kriteriji: TLS (3)

```
Ag2 = np.array([[1,6],[2,5],[3,7],[4,10]])
center = np.mean(Ag2, axis=0)
[U,D,Vt]=np.linalg.svd(Ag2 - center)
nabc_g2 = np.append(Vt[1,:], -np.dot(Vt[1,:],center))

Aa = np.array([[1,6,1],[2,5,1],[3,7,1],[4,10,1]])
[U,D,Vt] = np.linalg.svd(Ag1)
kla = [-Vt[2,0]/Vt[2,1], -Vt[2,2]/Vt[2,1]]
nabc_a = Vt[2,:]/np.linalg.norm(Vt[2,0:2])

Ag = np.array([[1,1],[2,1],[3,1],[4,1]])
yg = [6,5,7,10];
klg= np.linalg.pinv(Ag)@yg
nabc_g1 = np.array([klg[0],-1,klg[1]])/np.linalg.norm([klg[0],-1])

print("TLS norm alg:", np.linalg.norm(Aa @ nabc_a))     # 1.8
print("TLS norm geom 1:", np.linalg.norm(Aa @ nabc_g1)) # 1.2
print("TLS norm geom 2:", np.linalg.norm(Aa @ nabc_g2)) # 1.1
```

MLE: IZGLEDNOST

Pretpostavimo model $\mathcal{M}(\mathbf{p})$, npr, $\mathbf{p} = (k, l)$, te da na temelju mjerenja $\mathbf{o}$ (npr, $\mathbf{o} = \mathbf{y}$) želimo procijeniti parametre modela $\mathbf{p}$.

Statistički kriterij za vrednovanje $\mathbf{p}$: **maksimizirati** vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$ pod pretpostavkom $\mathcal{M}(\mathbf{p})$!

Uvjetnu vjerojatnost opažanja s obzirom na model nazivamo izglednošću modela:

$$\mathrm{Lik}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Kriterij maksimalne izglednosti (MLE) izražavamo:

$$\widehat{\mathbf{p}}_{MLE} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathrm{Lik}(\mathbf{p})$$

MLE: LINEARNI MODEL

Izvedimo MLE kriterij za provlačenje pravca kroz skup točaka

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} p(\mathbf{y}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Izrazimo gustoću vjerojatnosti pojedinačnog mjerenja $\hat{y}_i$

- pretp. $y_i \sim \mathcal{N}(y_i^T, \sigma)$: **nezavisni**, **jednako raspodijeljeni**

$$p(y_i|y_i^T) \sim e^{-\frac{(y_i - y_i^T)^2}{2\sigma^2}}$$

Izrazimo sada gustoću vjerojatnosti cijelog skupa mjerenja, pod pretpostavkama **jednake disperzije** i **nezavisnosti**:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{p}, \mathbf{x}) \sim \prod_i e^{-\frac{(p_1 \cdot x_i' + p_2 - y_i^T)^2}{2\sigma^2}}$$

MLE: linearni model (2)

Kad logaritmiramo izglednost, desno dobivamo L2 normu reziduala:

$$-\log \mathrm{Lik}(\mathbf{p}) \sim \sum_i (p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i^T)^2$$

Pravac koji maksimira izglednost sada je (logaritam je monotona f.ja):

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathrm{Lik}(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} (-\log \mathrm{Lik}(\mathbf{p}))$$

Dolazimo do **ekvivalencije** geometrijskog i MLE kriterija!

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathrm{Lik}(\mathbf{p}) = \arg\min_{\mathbf{p}} \sum_i (p_1 \cdot x_i + p_2 - y_i^T)^2$$

Geometrijski kriterij nije MLE, kad god se šum ne može opisati nezavisnim i identičnim normalnim razdiobama!

MLE: MAP

Kriterij MLE: $\mathbf{p}$ maksimira uvjetnu vjerojatnost opažanja $\mathbf{o}$, neovisno o apriornoj vjerojatnosti parametara:

$$\mathrm{Lik}(\mathbf{p}) = p(\mathbf{o}|\mathcal{M}(\mathbf{p}))$$

Ako se apiorna razdioba parametara modela $p(\mathcal{M}(\mathbf{p}))$ može modelirati, estimaciju možemo poboljšati!

Kriterij MAP (maximum a posteriori): tražimo model $\mathbf{p}$ koji maksimizira svoju posteriornu razdiobu:

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\max_{\mathbf{p}} p(\mathcal{M}(\mathbf{p})|\mathbf{o})$$

MLE: MAP (2)

Posteriornu razdiobu $p(\mathbf{p}|\mathbf{o})$ dobivamo primjenom Bayesovog teorema:

$$P(\mathcal{M}|O) = \frac{P(O|\mathcal{M})\, P(\mathcal{M})}{P(O)}$$

U brojniku imamo **izglednost** i **apriornu vjerojatnost**, a u nazivniku **normalizacijski faktor**:

Normalizacijski faktor nije važan za optimizaciju (ne ovisi o parametrima modela) pa ga možemo izostaviti iz kriterija:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{p}|\mathbf{o}) &= \frac{p(\mathbf{o}|\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})}{p(\mathbf{o})} \\ &\sim \mathrm{Lik}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p}) \ . \end{aligned}$$

MLE: MAP (3)

Konačan izraz za estimator MAP je:

$$\widehat{\mathbf{p}}_{MAP} = \arg\max_{\mathbf{p}} \mathrm{Lik}(\mathbf{p}) \cdot p(\mathbf{p})$$

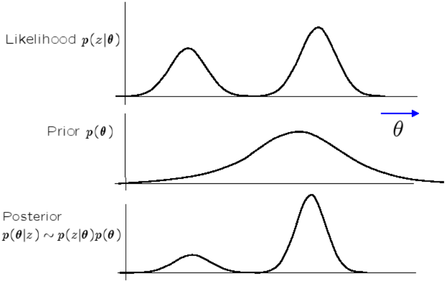
Zaključak:

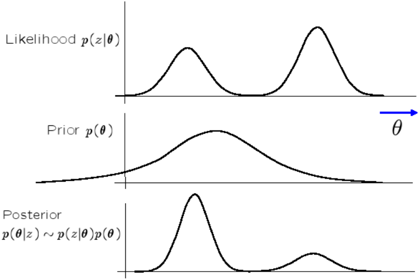
- MLE: model = max p(slika|model)
- MAP: model = max p(slika|model) · p(model)

Vidjeli smo sliku koja podsjeća na klokana. Jesmo li u Australiji?

Vidjeli smo nešto što podsjeća na znak. Da li je pokraj ceste?

MLE: MAP ZAKLJUČIVANJE





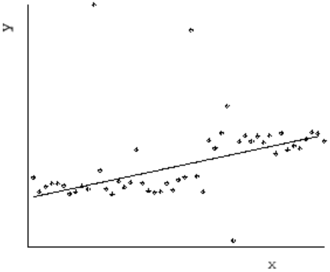
[Zisserman01]

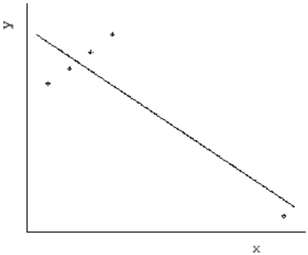
ROBUSNA ESTIMACIJA

Prisjetimo se **motivacije**, odnosno željenih svojstava algoritma:

1. **svi** unutarpopulacijski podatci doprinose rješenju $\surd$
2. rezultat u prisustvu plauzibilnog šuma **statistički** povoljan $\surd$
3. izvanpopulacijski parametri **ne ometaju** točan rezultat (to bismo sada, nažalost vrlo ukratko)

Problem: maksimiziranje izglednosti loše se ponaša u prisustvu iznimki [Stewart99].





ROBUSNA ESTIMACIJA: RANSAC

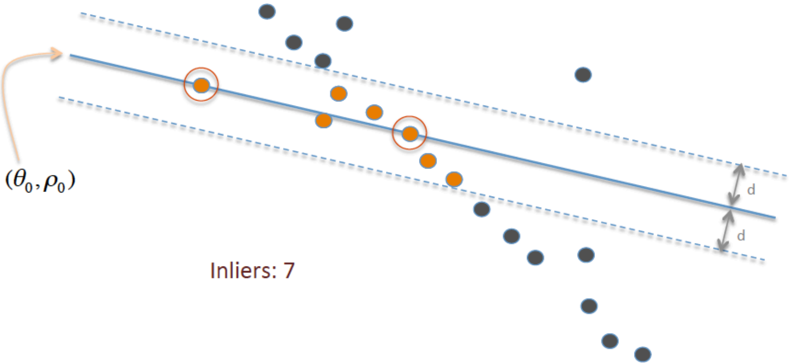
Given a model that requires a minimum of n data points to instantiate its free parameters, and a set of data points P such that the number of points in P is greater than n [$\#(P) \geq n$], randomly select a subset $S1$ of n data points from P and instantiate the model. Use the instantiated model $M1$ to determine the subset $S1^*$ of points in P that are within some error tolerance of $M1$. The set $S1^*$ is called the consensus set of $S1$.

If $\#(S1^*)$ is greater than some threshold t, which is a function of the estimate of the number of gross errors in P, use $S1^*$ to compute (possibly using least squares) a new model $M1^*$.

If $\#(S1^*)$ is less than t, randomly select a new subset $S2$ and repeat the above process. If, after some predetermined number of trials, no consensus set with t or more members has been found, either solve the model with the largest consensus set found, or terminate in failure.

[fischler81cacm]

ROBUSNA ESTIMACIJA: RANSAC - ITERACIJA



[Wikipedia]

ROBUSNA ESTIMACIJA: SAŽETAK

Robusni pristupi u računalnom vidu:

1. Houghova transformacija
2. Evaluacija hipoteza dobivenih nad minimalnim slučajnim uzorkom
   Monte Carlo analiza, RANSAC, MLESAC, ***SAC, LMedSqr
3. Iterativno poboljšanje korištenjem robusnih normi:
   IRLS, M-estimacija

(I to je sve...)

Hvala na pažnji!

Pitanja?