

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

SEMINAR

Kalibracija kamere pomoću planarnog objekta

Petra Bosilj

Voditelj: *Doc. dr. sc. Siniša Šegvić*

Zagreb, lipanj 2011.

SADRŽAJ

1. Uvod	1
2. Model stvaranja slike	2
2.1. Gibanje krutog tijela	2
2.2. Formiranje slike na normaliziranoj slikovnoj ravnini	8
2.3. Formiranje slike u kameri	10
2.4. Modeliranje radijalne distorzije leće	12
3. Predložena metoda za kalibraciju kamere	14
3.1. Procjena homografije između ravnine modela i ravnine slikovnih elemenata	15
3.2. Početna procjena rješenja problema kalibracije kamere u zatvorenoj formi	17
3.3. Iterativno optimiranje procjene parametara kalibracije	19
3.4. Nepovoljne konfiguracije kalibracijskog modela	20
4. Primjer kalibracije kamere u programskom jeziku <i>MATLAB</i>	21
5. Zaključak	26
6. Literatura	27
7. Sažetak/Abstract	28

1. Uvod

Kalibracija ili umjeravanje kamere jedan je od osnovnih postupaka u područjima računalnog vida i fotogrametrije. Postupkom kalibracije kamere povezuju se pozicije slikovnih elemenata s točkama u 3-D prostoru što omogućava ekstrakciju metričkih značajki iz 2-D slika promatranog objekta.

Prvi razvijeni postupci kalibracije kamere zahtjevali su skupu opremu, kompleksne ispitne modele ili su davali neprecizne rezultate. Novorazvijene tehnike pokušavaju riješiti ove probleme i tako pružiti mogućnost korištenja tehnika kalibracije kamere uz manje troškove i, posljedično, lakši i jeftiniji razvoj aplikacija iz područja računalnog vida.

Ovaj će seminarski rad pokušati razložiti jednu takvu tehniku kalibracije kamere. U poglavlju 2 prikazana je matematička podloga potrebna za razumijevanje problema kalibracije kamere, prateći postupak formiranja slike od 3-D modela (promatranog svijeta) do formiranja matrice slikovnih elemenata prikladne za obradu na računalu. Poglavlje 3 pojašnjava postupak i prednosti predložene tehnike kalibracije, dok je u poglavlju 4 prikazan jednostavan postupak kalibracije koristeći gotove alate razvijene za programski jezik *MATLAB*. Zaključak je dan u poglavlju 5.

2. Model stvaranja slike

Veza između trodimenzionalnog (3-D) objekta i njegovih dvodimenzionalnih (2-D) slika (engl. *image*) dobivenih pomoću kamere u pokretu može se opisati kombinacijom dviju elementarnih vrsta transformacija: *euklidskog gibanja*, odnosno *gibanja krutog tijela* te *perspektivne projekcije*. Pomicanje krutog tijela modelira pomicanje trodimenzionalnog sustava kamere u prostoru, dok se perspektivnom projekcijom opisuje proces formiranja slike. Pomicanje krutog tijela opisano je u odjeljku 2.1, dok se proces formiranja slike opisuje u odjeljku 2.2. U odjeljku 2.3 opisan je postupak dobivanja koordinata točaka u slici prikazanoj pomoću matrice slikovnih elemenata (engl. *pixel image*) koju se može prevesti u neki od računalnih slikovnih formata i koja u obzir uzima parametre vezane uz unutarnju geometriju kamere.

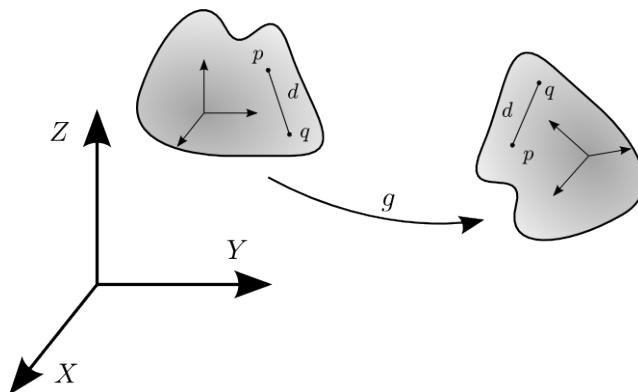
2.1. Gibanje krutog tijela

Razmatrajući objekt koji se pomiče pred kamerom, možemo se zapitati kako opisati njegovo gibanje. U općem slučaju, potrebno je znati trajektoriju svake točke na objektu kako bi se gibanje objekta u potpunosti opisalo. Trajektoriju svake pojedine točke objekta moglo bi se specificirati funkcijom $\mathbf{Q}(t)$ koja određuje koordinate točke za svaki trenutak vremena. Poseban slučaj objekta čine *kruta tijela*, kod kojih se udaljenost između bilo koje dvije točke na objektu ne mijenja s vremenom (Ma et al., 2004).

Istaknimo na objektu koordinatni sustav i dvije točke, p i q (Slika 2.1). Promjenu koordinata tih točaka s obzirom na *koordinatni sustav svijeta* (koji u ovom slučaju odgovara koordinatnom sustavu kamere), opisujemo funkcijama $\mathbf{Q}_p(t)$ za točku p i $\mathbf{Q}_q(t)$ za točku q . Uzimajući u obzir da se radi o pomicanju krutog tijela, prema Ma et al. (2004), može se pisati:

$$\|\mathbf{Q}_p(t) - \mathbf{Q}_q(t)\| \equiv \text{const.} \quad (2.1)$$

Gibanje krutog tijela sada možemo opisati familijom preslikavanja koja poštuju



Slika 2.1: Gibanje krutog tijela: udaljenost između bilo kojeg para točaka (p, q) ostaje očuvana.

(2.1). Jedno ovakvo preslikavanje opisuje se sa:

$$g(t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{Q} \mapsto g(t)(\mathbf{Q}). \quad (2.2)$$

Ako nas ne zanima trajektorija tijela u vremenu, već samo koordinate završnog položaja točke na zadanim početnim koordinatama, govorimo o *premještanju krutog tijela* (Ma et al., 2004). Preslikavanje koje opisuje premještanje jedne točke na krutom tijelu može se zapisati kao:

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \mathbf{Q} \mapsto g(\mathbf{Q}). \quad (2.3)$$

Postupci kalibracije kamere koriste se slikama objekta iz različitih položaja zbog čega bi bilo korektno transformacije koje se koriste u tim postupcima nazivati premještanjem krutog tijela, no zbog ustaljene prakse u daljnjem se tekstu pojam *gibanje krutog tijela* koristi se za opis obiju vrsta transformacija.

Ako umjesto točaka promatramo transformaciju nad vektorom $\mathbf{v}$ između dvije točke opisane u krutom tijelu p i q koji iznosi $\mathbf{v} = \mathbf{Q}_q - \mathbf{Q}_p$, dobivamo novi vektor kojeg možemo izraziti prema:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}_*(\mathbf{v}) = g(\mathbf{Q}_q) - g(\mathbf{Q}_p). \quad (2.4)$$

Treba primjetiti da zbog (2.1) vrijedi $\|\mathbf{g}_*(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$. Preslikavanja nakon kojih udaljenosti ostaju očuvane nazivamo *euklidskim transformacijama* (Ma et al., 2004). U 3-D prostoru skup svih euklidskih transformacija označavamo s $E(3)$.

Sva preslikavanja koja zadovoljavaju ovaj uvjet o očuvanju udaljenosti ne opisuju gibanje krutog tijela: primjer jedne takve transformacije jest zrcaljenje. Iako ova transformacija čuva udaljenosti, ona ne opisuje realno i moguće gibanje krutog tijela. Kako bi se nemoguća gibanja izbjegla, relativne orijentacije između vektora također moraju biti očuvane nakon primjene odabrane transformacije. Ako se kao jedna točka u (2.4)

uvrsti ishodište istaknutog koordinatnog sustava na objektu, gibanje krutog tijela može se opisati trajektorijom samo jedne točke objekta i gibanjem triju koordinatnih osi istaknutog koordinatnog sustava na objektu. Promatranje istaknutog koordinatnog sustava na tijelu omogućava provjeru orijentacije vektora, odnosno osigurava ispravnost transformacije i po kriteriju očuvanja udaljenosti (Ma et al., 2004).

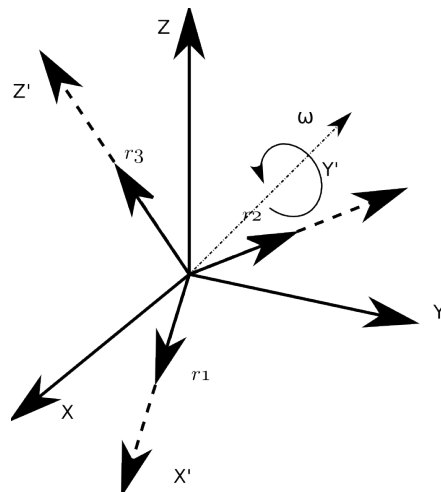
Definicija 2.1. (Gibanje krutog tijela ili specijalna euklidska transformacija) *Preslikavanje $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nazivamo gibanjem krutog tijela, odnosno specijalnom euklidskom transformacijom ukoliko nakon transformacije sljedeća svojstva ostanu očuvana:*

(i) Norma vektora: $\|g_*(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3,$

(ii) Vektorski produkt vektora: $g_*(\mathbf{v}) \times g_*(\mathbf{u}) = g_*(\mathbf{v} \times \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3.$

Oznaka za skup svih ovako definiranih preslikavanja, odnosno transformacija jest $SE(3)$.

Pri opisivanju gibanja krutog tijela, npr. kamere u odnosu na svijet zanima nas samo relativni pomak između kamere i scene. Može se primjetiti kako je se gibanje krutog tijela sastoji od dvije komponente: *translacijske komponente* kojom se ishodište koordinatnog sustava kamere poravnava s ishodištem koordinatnog sustava scene i *rotacijske komponente* koja opisuje razlike u orijentaciji dva koordinatna sustava, odnosno poravnava koordinatne osi koordinatnog sustava kamere s koordinatnim osima referentnog koordinatnog sustava svijeta.



Slika 2.2: Rotacija krutog tijela: ako se zanemari translacijski dio gibanja, može se pretpostaviti da se ishodišta koordinatnih sustava svijeta i krutog tijela (kamere) poklapaju pri rotaciji oko vektora ω .

Promatramo li samo rotaciju krutog tijela (Slika 2.2), vidimo da je ona u potpunosti određena koordinatama triju ortonormalnih vektora u koordinatnom sustavu kamere (Ma et al., 2004), $\mathbf{r}_1 = \mathbf{g}_*(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{g}_*(\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{g}_*(\mathbf{e}_3)$. Ovakva se transformacija može u potpunosti opisati kao 3×3 matrica

$$\mathbf{R}_{wc} \doteq [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (2.5)$$

gdje $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ čine stupce matrice $\mathbf{R}_{wc}$.

Iz činjenice da su $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ i $\mathbf{r}_3$ međusobno ortonormalni proizlazi prvi uvjet na matricu rotacije:

$$\mathbf{R}_{wc}^\top \mathbf{R}_{wc} = \mathbf{R}_{wc} \mathbf{R}_{wc}^\top = \mathbf{I}. \quad (2.6)$$

Svaka matrica koja zadovoljava uvjet (2.6) naziva se *ortogonalnom matricom*. Može se primjetiti kako za ortonormalne matrice vrijedi $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^\top$. Drugi uvjet dobiva se iz činjenice da $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ i $\mathbf{r}_3$ tvore desni koordinatni sustav, pa determinanta od $\mathbf{R}_{wc}$ mora biti jednaka $+1$. Matrice koje zadovoljavaju ova dva uvjeta nazivaju se *posebne ortogonalne matrice*, gdje riječ “posebno” indicira da rotacijska matrica čuva orijentacije (Ma et al., 2004). Za prostor svih ortogonalnih matrica u $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ uvodi se oznaka:

$$SO(3) \doteq \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}, \det(\mathbf{R}) = +1\}. \quad (2.7)$$

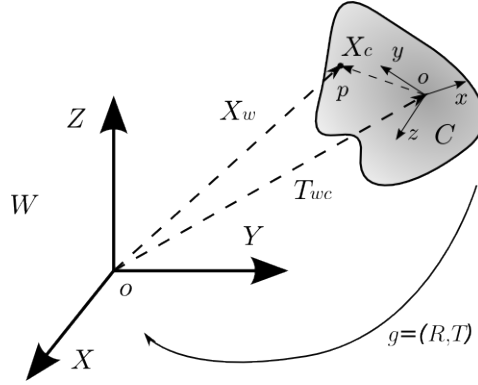
Prostor $SO(3)$ čini grupu s operacijom množenja matrica te se ponekad naziva *posebno ortogonalnom grupom* za $\mathbb{R}^3$ ili *rotacijskom grupom*.

U ovom zapisu, rotacijski pomak krutog tijela određen je s devet parametara rotacijske matrice. No, čak šest od ukupno devet parametara je zavisno o ostalim parametrima (Ma et al., 2004). Iz uvjeta postavljenih na oblik rotacijske matrice u (2.6), odnosno (2.7) mogu se iščitati ograničenja na komponente skalarnih produkata stupaca matrice $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_1 &= 1, \\ \mathbf{r}_2^\top \mathbf{r}_2 &= 1, \\ \mathbf{r}_3^\top \mathbf{r}_3 &= 1, \\ \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_2 &= 0, \\ \mathbf{r}_1^\top \mathbf{r}_3 &= 0, \\ \mathbf{r}_2^\top \mathbf{r}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Zbog toga se pri računu s rotacijom krutog tijela rotacijska matrica eksplicitno parametrizira na način koji smanjuje broj vrijednosti koje opisuju rotaciju te olakšava račun.

Neke od parametrizacija rotacijske matrice $\mathbf{R}$ uključuju prikaz eksponencijalnim koordinatama (Ma et al., 2004), odnosno vektorom koji opisuje os rotacije, prikaz jediničnim kvaternionima (Jain et al., 1995) te Eulerovim kutovima pomoću Lie-Cartanovih koordinata prvog ili drugog stupnja (Ma et al., 2004).



Slika 2.3: Uvođenje translacijske komponente: vektor pomaka točke p na krutom tijelu razlažemo na translaciju ishodišta koordinatnog sustava kamere C u odnosu na koordinatni sustav svijeta W i vektor od ishodišta rotiranog koordinatnog sustava kamere o_C do točke p .

Kada se u razmatranje pomaka krutog tijela uvede i translacijska komponenta (Slika 2.3), koordinate neke promatrane točke na krutom tijelu $\mathbf{Q}_w$ mogu se prikazati kao suma translacije između koordinatnih sustava kamere i svijeta, $\mathbf{T}_{wc}$ i koordinate iste te točke u rotiranom koordinatnom sustavu kamere, $\mathbf{Q}_c$. Pri tome su koordinate točke u pojedinom koordinatnom sustavu prikazane odgovarajućim vektorima koji spajaju točku s ishodištem odgovarajućeg koordinatnog sustava.

Kako je vektor $\mathbf{Q}_c$ izražen u odnosu na koordinatni sustav kamere, u koordinatnom sustavu svijeta pomak od ishodišta koordinatnog sustava kamere o_C do točke p iznosi $\mathbf{R}_{wc}\mathbf{Q}_c$ pri čemu je $\mathbf{R}_{wc} \in SO(3)$. Sada koordinate točke p u koordinatnom sustavu svijeta možemo zapisati kao:

$$\mathbf{Q}_w = \mathbf{R}_{wc}\mathbf{Q}_c + \mathbf{T}_{wc}. \quad (2.8)$$

Jednadžbom (2.8) odredili smo gibanje krutog tijela što kraće zapisujemo kao:

$$g_{wc} = (\mathbf{R}_{wc}, \mathbf{T}_{wc}), \quad (2.9)$$

$$\mathbf{Q}_w = g_{wc}(\mathbf{Q}_c). \quad (2.10)$$

Iz jednadžbi (2.9) i (2.10) dobivamo drugi opis prostora specijalnih euklidskih transformacija $SE(3)$ uvedenih Definicijom 2.1:

$$SE(3) \doteq \{g = (\mathbf{R}, \mathbf{T}) | \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{T} \in \mathbb{R}^3\}. \quad (2.11)$$

No, ovakav opis (2.11) još uvijek ne omogućava prikaz gibanja krutog tijela u matričnom obliku. Kako bi se to postiglo, uvode se *homogene koordinate*. Vektorskom prikazu točke $p \in \mathbb{E}^3$, $\mathbf{Q}_p = [X, Y, Z]^T \in \mathbb{R}^3$ dodajemo četvrtu dimenziju čime dobivamo prikaz točke u $\mathbb{R}^4$:

$$\overline{\mathbf{Q}}_p \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W = 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad (2.12)$$

gdje $\overline{\mathbf{Q}}_p$ označava homogene koordinate točke. Zapis u euklidskim koordinatama iz homogenih dobivamo kao:

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} \frac{X}{W} \\ \frac{Y}{W} \\ \frac{Z}{W} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.13)$$

Iz (2.13) vidi se kako zapis točke u homogenim koordinatama nije jednoznačan. Posljednja homogena koordinata često se koristi kako bi se označila *dubina* točke (pogotovo pri prikazu 2-D slike 3-D euklidskog prostora homogenim koordinatama). Poseban slučaj točaka koje su prikazive u homogenim koordinatama ali nisu dio $\mathbb{E}^3$ jesu *točke u beskonačnosti* oblika $\mathbf{Q}_\infty = [X_1, X_2, X_3, 0]^T \in \mathbb{R}^4$. Sve točke euklidskog prostora zajedno s točkama u beskonačnosti čine projekcijski prostor $\mathbb{P}^3$.

Koristeći ovaj zapis, gibanje krutog tijela možemo zapisati linearno, odnosno u matričnom obliku kao:

$$\overline{\mathbf{Q}}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_w \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{wc} & \mathbf{T}_{wc} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c \\ 1 \end{bmatrix} \doteq \bar{g}_{wc} \overline{\mathbf{Q}}_c, \quad (2.14)$$

pri čemu je $\bar{g}_{wc} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ homogena reprezentacija gibanja krutog tijela $g = (\mathbf{R}_{wc}, \mathbf{T}_{wc}) \in SE(3)$ između koordinatnog sustava svijeta i kamere.

Iz općenitog homogenog prikaza gibanja krutog tijela $g = (\mathbf{R}, \mathbf{T})$:

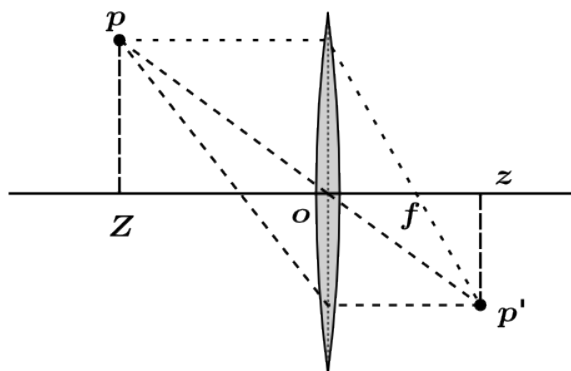
$$\bar{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (2.15)$$

dobiva se prirodan matrični prikaz prostora posebnih euklidskih transformacija:

$$SE(3) \doteq \left\{ \bar{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \middle| \mathbf{R} \in SO(3), \mathbf{T} \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}^{4 \times 4}. \quad (2.16)$$

Ovakav je matrični prikaz pogodan za korištenje u daljnjem računu.

2.2. Formiranje slike na normaliziranoj slikovnoj ravni



Slika 2.4: Tanka leća: slika točke p formira se na mjestu na kojem se sijeku zraka koja prolazi kroz optički centar o i zraka paralelna s optičkom osi koja se lomi kroz žarište

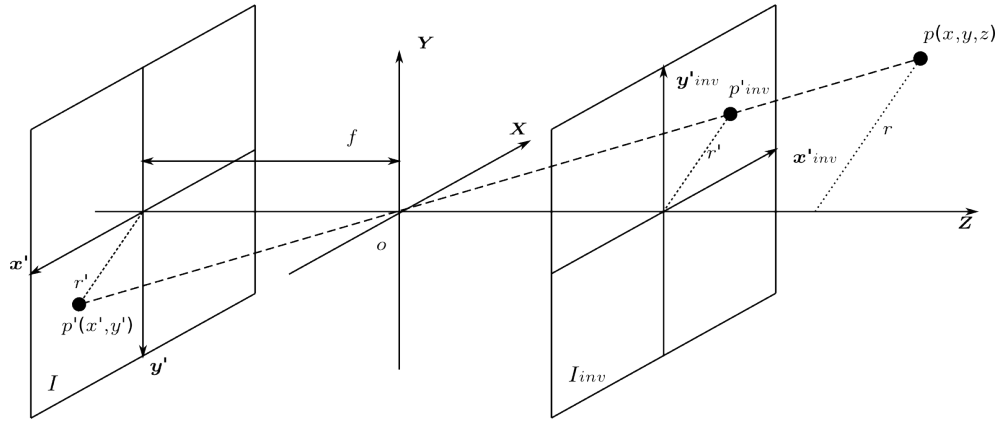
Kamere (i ostali optički sustavi) sastavljeni su od skupa leća koje "usmjeravaju" svjetlost na slikovnu ravninu. U jednostavnom modelu dovoljnom za potrebe kalibracije kamere, razmatra se samo lom svjetlosti na leći dok se utjecaji refleksije svjetlosti na leći i ogiba svjetlosti na otvoru leće zanemaruju u procesu formiranja slike. Kao najjednostavniji model leće, promatramo model *tanke leće* (Slika 2.4). Tanka leća je matematički model leće dobar za aproksimaciju leća čija je debljina zanemariva u usporedbi s polumjerom zakrivljenosti. Pomoću polumjera zakrivljenosti tanke leće određuje se *žarišna udaljenost* tanke leće, f .

Način na koji tanka leća formira sliku predmeta može se sažeti u dva svojstva (Ma et al., 2004):

- (i) sve zrake koje ulaze u leću paralelno s optičkom osi sijeku se na optičkoj osi na udaljenosti f od optičke osi,
- (ii) zrake koje prolaze kroz optički centar leće ne lome se.

Ako dopustimo otvoru na kameri (odnosno promjeru leće) da se smanji do točke, dobivamo *kameru s točkastim otvorom* (engl. *pinhole camera*) (Ma et al., 2004). Izračuni u okviru računalnog vida oslanjaju se na ovaj model kamere koji obuhvaća model perspektivne projekcije na ravninu slike, no zanemaruje efekte *dubine vidnog polja* (engl. *depth of field*). Efekte dubine vidnog polja uzrokuje činjenica da su u na slikovnoj ravni dobro vidljivi samo objekti iz određenog dubinskog raspona u odnosu na optički centar leće. Modeliranje optičkih efekata poput dubine vidnog polja i granice gušenja svjetla može se postići uvodeći najmanju i najveću udaljenost na kojoj

se objekti moraju nalaziti od optičkog centra kako bi bili vidljivi na slikovnoj ravni (Jain et al., 1995).



Slika 2.5: Perspektivna projekcija: slika točke u ravni slike leži na pravcu koji spaja točku na objektu i prolazi kroz optički centar. Kako se objekt na slikovnoj ravni prikazuje naopako, koristi se model *inverzne slikovne ravnine* na kojoj je slika uspravnog objekta uspravna.

Osnovni model projekcije točke iz 3-D prostora na slikovnu ravninu može se vidjeti na Slici 2.5. Slikovna se ravnina u kameri nalazi iza optičkog centra, no kako bi se ispravila naopaka slika objekta koja se dobiva na slikovnoj ravni I , slikovna se ravnina u modelu invertira što odgovara projiciranju na ravninu I_{inv} postavljenu ispred optičkog centra kamere. Slikovna je ravnina razapeta vektorima $\mathbf{x}'$ i $\mathbf{y}'$ koji čine koordinatni sustav slike. Točka p , koja u koordinatnom sustavu svijeta ima koordinate (x, y, z) , projicira se u točku (x', y') u koordinatnom sustavu slike. Iz sličnosti trokuta mogu se ispisati sljedeći omjeri, zanemarujući negativni predznak zbog korištenja invertirane slikovne ravnine u modelu:

$$\frac{f}{z} = \frac{r'}{r}, \quad (2.17)$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{r'}{r}. \quad (2.18)$$

Kombinacijom izraza (2.17) i (2.18) dobivaju se jednadžbe perspektivne projekcije:

$$\frac{x'}{x} = \frac{f}{z} \quad \text{te} \quad \frac{y'}{y} = \frac{f}{z}. \quad (2.19)$$

Koordinate točke p u normaliziranoj slikovnoj ravni određuju se iz (2.19) kao:

$$x' = \frac{f}{z}x \quad (2.20)$$

$$y' = \frac{f}{z}y. \quad (2.21)$$

2.3. Formiranje slike u kameri

Osim problema gibanja krutog tijela, odnosno *problema vanjske orijentacije* (engl. *exterior orientation problem*), na proces formiranja digitalne slike sastavljene od slikovnih elemenata (engl. *pixel*) utječe i unutarnja geometrija kamere. Određivanje *unutarnje geometrije kamere* svodi se na određivanje parametara kamere (Jain et al., 1995):

Konstana kamere koja određuje udaljenost slikovne ravnine od centra projekcije

Osnovna točka (engl. *principal point*) kojom je određen položaj ishodišta koordinatnog sustava slikovne ravnine

Koeficijenti distorzije leće kojima se opisuju promjene u slikovnoj ravnini nastale zbog optičkih nesavršenosti u leći

Faktori skaliranja kako bi se modelirala nejednaka horizontalna i vertikalna udaljenost slikovnih elemenata

Prvi korak određivanje veze između normalizirane slikovne ravnine i slikovne ravnine u prikazu matrice slikovnih elemenata jest određivanje dimenzija jednog slikovnog elementa u smjeru koordinatnih osi x i y (Ma et al., 2004). Za točku čiji je položaj u normaliziranoj slikovnoj ravnini određen sa (x, y) , vrijednosti koordinata točke u slikovnoj ravnini biti će skalirane. Ova transformacija može se opisati matricom skaliranja:

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Ovakvim modelom dozvoljava se pravokutni oblik slikovnih elemenata. Odnos $s_x : s_y$ odgovara omjeru horizontalne i vertikalne udaljenosti slikovnih elemenata, dok su slikovni elementi kvadratnog oblika kada je $s_x = s_y$. Koordinate (x_s, y_s) specificirane su u odnosu na osnovnu točku kamere, tj. mjesta na kojem os z koordinatnog sustava kamere presijeca slikovnu ravninu. Kako indeksi slikovnih elemenata najčešće određuju relativnu udaljenost od gornjeg lijevog kuta slike i pozitivni su brojevi, potrebno je translirati koordinate točaka dobivenih skaliranjem s obzirom na udaljenost referentnog elementa od osnovne točke:

$$x' = x_s + o_x, \quad (2.23)$$

$$y' = y_s + o_y, \quad (2.24)$$

gdje su (o_x, o_y) koordinate osnovne točke kamere u odnosu na referentni koordinatni sustav s ishodištem u referentnom elementu. Ukupna transformacija da dobijemo koordinate točke u referentnom koordinatnom sustavu slike $\bar{\mathbf{q}}' = [x', y', 1]$ iz koordinata dobivenih idealnom projekcijom na normaliziranu slikovnu ravninu $\bar{\mathbf{q}} = [x, y, 1]$ može se zapisati u homogenom prikazu kao (Ma et al., 2004):

$$\bar{\mathbf{q}}' \doteq \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & o_x \\ 0 & s_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Ako koordinatne osi u koordinatnom sustavu matrice slikovih elemenata zatvaraju neki kut različit od 90° , odnosno modeliraju se linearni oblici distorzije leće (Ma et al., 2004), može se uvesti općenitiji oblik matrice skaliranja:

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & s_\theta \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Prema Ma et al. (2004), proizvoljna točka s homogenim koordinatama $\bar{\mathbf{Q}}_0 = [X_0, Y_0, Z_0, 1]^T$ u koordinatnom sustavu kamere nakon idealne projekcije transformira se u točku s homogenim zapisom $\bar{\mathbf{q}} = [x, y, 1]^T$ na slikovnoj ravnini prema:

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

pri čemu je $\lambda \in \mathbb{R}_+$ proizvoljni skalar koji se pojavljuje zbog najčešće nepoznate dubine točke, Z . Matrica

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

naziva se *standardna* ili *kanonska matrica projekcije*.

Jednadžba idealne perspektivne kamere (2.27) ne uzima u obzir skaliranje i deformacije slike nastale zbog unutarnjih parametara kamere. Kombinirajući ovu jednadžbu s jednadžbama za dobivanje koordinata slikovnih elemenata (2.25) i (2.26) dobiva se

cjelokupni model stvaranja slike na kameri:

$$\lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & s_\theta & o_x \\ 0 & s_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f s_x & f s_\theta & o_x \\ 0 & f s_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\lambda \bar{\mathbf{q}}' = \mathbf{K} \Pi_0 \bar{g} \bar{\mathbf{Q}}_0. \quad (2.31)$$

Parametri zapisa (2.30) imaju posebne interpretacije pa se za njih uvode posebne oznake i imena:

- $\alpha_x = f s_x$ veličina jedinične dužine izražena s obzirom na širinu slikovnog elementa,
- $\alpha_y = f s_y$ veličina jedinične dužine izražena s obzirom na visinu slikovnog elementa,
- $\sigma = \alpha_x / \alpha_y$ omjer širine i visine slike,
- $\alpha_\theta = f s_\theta$ ukošenost slike (engl. *skewness*), često bliska 0° .

U skraćenom zapisu modela stvaranja slike (2.31) matricom $\mathbf{K}$ predstavljeni su parametri koji određuju unutarnju geometriju kamere, dok se transformacija orijentacija kamere u odnosu na koordinatni sustav svijeta opisuje pomakom krutog tijela u homogenoj notaciji $\bar{g}$ (2.15). Pomoću te jednadžbe moguće je za bilo koju točku 3-D prostora svijeta s homogenim koordinatama $\bar{\mathbf{Q}}_0$ izračunati njezine koordinate u slikovnoj ravni, $\bar{\mathbf{q}}' = [x', y', 1]^T$.

2.4. Modeliranje radijalne distorzije leće

Radijalna distorzija utječe na proces formiranja slike na način da iskrivljuje zrake svijetla za manje ili više od točnog iznosa (koji bi se dobio samo uzimajući u obzir lom svjetlosti na tankoj leći). Radijalna distorzija može se modelirati polinomom po parnim potencijama radijusa pošto je greška u lomu svjetlosti rotacijski simetrična (Jain et al., 1995).

Označe li se sa $(\tilde{x}, \tilde{y})$ prave koordinate točke na slici (dobivene uz uvažavanje radijalne distorzije), dok (x, y) označavaju neispravljene koordinate točke u normaliziranoj

slikovnoj ravnini, ispravljene koordinate mogu se dobiti iz neispravljenih dodavanjem iznosa korekcije $(\delta x, \delta y)$ (Jain et al., 1995):

$$\tilde{x} = x + \delta x, \quad (2.32)$$

$$\tilde{y} = y + \delta y. \quad (2.33)$$

Korekcije se dobivaju polinomima po parnim potencijama radijalne udaljenosti od centra distorzije:

$$\delta x = (x - x_p)(\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4), \quad (2.34)$$

$$\delta y = (y - y_p)(\kappa_1 r^2 + \kappa_2 r^4), \quad (2.35)$$

pri čemu su (x_p, y_p) korekcije lokacije osnovne točke kamere, κ_1 i κ_2 koeficijenti distorzije, dok r označava udaljenost od centra distorzije (čije koordinate dobivamo kao korekciju osnovne točke kamere):

$$r^2 = (x - x_p)^2 + (y - y_p)^2. \quad (2.36)$$

Pri modeliranju distorzije koriste se polinomi stupnja ne većeg od 6, dok je ponekad dovoljno koristiti čak i polinome drugog stupnja (Jain et al., 1995). Nakon izračuna koeficijenata potrebnih za korekciju distorzije, korekcije se mogu primjeniti na osnovnu točku kamere i koordinate točaka u slikovnoj ravnini. Ako možemo pretpostaviti da je centar distorzije isti kao i osnovna točka kamere (odnosno da su korekcije na koordinate osnovne točke male), udaljenost od centra slikovne ravnine prelazi u $r^2 = x^2 + y^2$, a kao ukupan model formiranja slike u ravnini slikovnih elemenata dobiva se (Zhang, 2000):

$$\tilde{x}' = x' + (x' - o_x)[\kappa_1(x^2 + y^2) + \kappa_2(x^2 + y^2)^2], \quad (2.37)$$

$$\tilde{y}' = y' + (y' - o_y)[\kappa_1(x^2 + y^2) + \kappa_2(x^2 + y^2)^2], \quad (2.38)$$

pri čemu su $(\tilde{x}', \tilde{y}')$ ispravljene koordinate u ravnini slikovnih elemenata dobivene prema $\tilde{x}' = o_x + \alpha_x \tilde{x}$ i $\tilde{y}' = o_y + \alpha_y \tilde{y}$ iz jednadžbe (2.25) uz pretpostavku da faktor ukošenosti iznosi 0.

3. Predložena metoda za kalibraciju kamere

Problem kalibracije kamere svodi se na određivanje parametara u jednadžbi (2.29), odnosno (2.30) te dodatno (2.34) i (2.35) uoliko se u obzir uzimaju i efekti radijalne distorzije. Pri tome je potrebno riješiti probleme vanjske orijentacije, odnosno odrediti *ekstrinsinčne parametre* kamere kao i unutarnje geometrije kojom se određuju *intrinzični parametri* kamere.

Tehnike kalibracije kamere mogu se ugrubo podijeliti u dvije kategorije (Zhang, 2000):

Fotogrametrijske tehnike kalibracije koje se provode promatrajući kalibracijski objekt s dobro poznatom 3-D geometrijom. Iako su ove tehnike vrlo precizne, zahtijevaju poznavanje vrlo preciznih dimenzija modela pa je stoga ispitna okolina vrlo složena i skupa.

Auto-kalibracijske tehnike kod kojih se ne koristi kalibracijski objekt, već se ograničenja koja se koriste pri određivanju parametara kamere dobivaju iz statičnosti promatrane scene. Iako ove tehnike pružaju veću fleksibilnost, još uvijek ne mogu s velikom točnošću procijeniti tražene parametre.

U ovom poglavlju opisana je tehnika kalibracije prvi puta predstavljena u Zhang (2000) koja se po kategorizaciji nalazi između dvije predložene kategorije tehnika kalibracije, objedinjujući prednosti oba ova pristupa. Koristeći planarni uzorak, tj. informacije o 2-D metrici objekta, postiže se robusnost fotogrametrijskih tehnika bez potrebe za korištenjem skupe ispitne okoline uz fleksibilnost auto-kalibracijskih metoda. Odijeljci ovog poglavlja redom prate korake u ovom postupku kalibracije. Kako je cijelo poglavlje pisano prema Zhang (2000), zbog čistoće i čitljivosti teksta reference na ovu literaturu izostavljene su kroz cijelo poglavlje.

3.1. Procjena homografije između ravnine modela i ravnine slikovnih elemenata

Kako se u ovom postupku kalibracije koriste slike 2-D objekta koji leži u jednoj ravnini, a koordinatni sustav svijeta možemo odabrati proizvoljno, možemo odabrati koordinatni sustav svijeta tako da točke u ravnini modela imaju dubinsku, Z koordinatu jednaku 0. Jednadžba (2.30) tada prelazi u:

$$\begin{aligned} \lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} &= \mathbf{K}\Pi_0 \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K}\Pi_0 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_3 & \mathbf{T} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{K}\Pi_0 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{T} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Kako za sve točke u ravnini modela vrijedi $Z = 0$, koristit će se ista oznaka $\overline{\mathbf{Q}}_0$ za krnji homogeni zapis točke s homogenim prikazom $\overline{\mathbf{Q}}_0 = [X_0, Y_0, 0, 1]^T$, odnosno oznaka $\mathbf{Q}_0$ za krnji vektorski zapis iste te točke. Sliku točke u ravnini slikovnih elemenata tada povezujemo s točkom u ravnini modela jednadžbom:

$$\overline{\mathbf{q}}' = \mathbf{H}\overline{\mathbf{Q}}_0 \quad \text{gdje je} \quad \mathbf{H} = \mathbf{K}\Pi_0 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{T} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

. Matricom $\mathbf{H}$ opisuje se homografija između ravnine modela i ravnine slikovnih elemenata. Iz jednadžbe (3.1) vidljivo je da su dimenzije matrice $\mathbf{H}$ jednake 3×3 pri čemu je matrica homografije određena do na konstantu.

Kako točke na slikovnoj ravnini zbog nelinearnih faktora distorzije leće te šuma prisutnog u matrici slikovnih elemenata ne zadovoljavaju (3.1) kao u idealnom slučaju, homografiju je potrebno procjeniti na temelju većeg skupa parova točka – slika točke, $\overline{\mathbf{Q}}_{0i} - \overline{\mathbf{q}}'_i$. Ako pretpostavimo da je šum pod čijim je utjecajem dobivena pojedina točka $\overline{\mathbf{q}}'_i$ Gaussov sa srednjom vrijednošću 0 i kovarijacijskom matricom Λ_i , procjena homografije H može se dobiti postupkom najveće izglednosti, odnosno minimizacijom

sume Mahalanobisovih udaljenosti između stvarne slike točke i proračunatih koordinata slike točke iz (3.1):

$$\sum_i (\bar{\mathbf{q}}'_i - \bar{\tilde{\mathbf{q}}}'_i)^T \Lambda_i^{-1} (\bar{\mathbf{q}}'_i - \bar{\tilde{\mathbf{q}}}'_i). \quad (3.2)$$

Oznakom $\bar{\tilde{\mathbf{q}}}'_i$ ovdje su označene proračunate koordinate slike točke koje se računaju prema:

$$\bar{\tilde{\mathbf{q}}}'_i = \frac{1}{\bar{\mathbf{h}}_3^T \mathbf{Q}_0 i} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{h}}_1^T \mathbf{Q}_0 i \\ \bar{\mathbf{h}}_2^T \mathbf{Q}_0 i \end{bmatrix} \quad \text{gdje je } \bar{\mathbf{h}}_i \text{ } i\text{-ti redak matrice homografije } \mathbf{H}. \quad (3.3)$$

U praksi se može pretpostaviti da su $\Lambda_i = \sigma^2 I$ za sve i ako su slike točaka dobivene neovisno istom procedurom. U tom se slučaju problem svodi na problem najmanjih kvadrata nelinearne funkcije, tj. rješavanje $\min \sum_i \|(\bar{\mathbf{q}}'_i - \bar{\tilde{\mathbf{q}}}'_i)\|$. Minimizacija se tada može provesti Levenberg-Marquardtovim algoritmom opisanim u Lourakis (2005).

Da bi smo mogli provesti ovaj postupak minimizacije, potrebno je pogoditi početnu vrijednost za postupak. Ograničenja iz kojih se može izračunati matrica $\mathbf{H}$ mogu se dobiti raspisivanjem jednadžbe (3.1). Uvedimo vektor $\mathbf{x} = [\bar{h}_1^T, \bar{h}_2^T, \bar{h}_3^T]$, stupčani vektor u koji su redom upisani elementi matrice $\mathbf{H}$. Kako bi se iz jednadžbe uklonio proizvoljni faktor λ , jednadžba (3.1) tumači se u smislu da su vektori $\bar{\mathbf{q}}'$ i $\mathbf{H}\bar{\mathbf{Q}}_0$ paralelni, odnosno da je njihov vektorski produkt jednak nuli. Sada možemo jednadžbu (3.1) napisati tako da dobijemo ograničenja potrebna za određivanje homografije:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\bar{\mathbf{Q}}_0 \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \bar{h}_1^T \bar{\mathbf{Q}}_0 \\ \bar{h}_2^T \bar{\mathbf{Q}}_0 \\ \bar{h}_3^T \bar{\mathbf{Q}}_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \bar{h}_2^T \bar{\mathbf{Q}}_0 - \bar{h}_3^T \bar{\mathbf{Q}}_0 y' \\ -\bar{h}_1^T \bar{\mathbf{Q}}_0 + \bar{h}_3^T \bar{\mathbf{Q}}_0 x' \\ \bar{h}_1^T \bar{\mathbf{Q}}_0 y' - \bar{h}_2^T \bar{\mathbf{Q}}_0 x' \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 0 & \bar{\mathbf{Q}}_0^T & -v\bar{\mathbf{Q}}_0^T \\ -\bar{\mathbf{Q}}_0^T & 0 & u\bar{\mathbf{Q}}_0^T \\ v\bar{\mathbf{Q}}_0^T & -u\bar{\mathbf{Q}}_0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_1^T \\ \bar{h}_2^T \\ \bar{h}_3^T \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} 0 & \bar{\mathbf{Q}}_0^T & -v\bar{\mathbf{Q}}_0^T \\ -\bar{\mathbf{Q}}_0^T & 0 & u\bar{\mathbf{Q}}_0^T \end{bmatrix} \mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Posljednji korak u dobivanju (3.4) moguće je napraviti zbog linearne zavisnosti redaka lijeve matrice u umnošku.

Ako postoji n zadanih položaja točaka i poznatih pozicija njihovih slika slikovnoj ravnini, može se napisati n jednažbi tipa (3.4). Svi ovi uvjeti mogu se napisati u matričnoj formi kao $\mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pri čemu $\mathbf{L}$ ima dimenzije $2n \times 9$. Kako je $\mathbf{x}$ određen do na konstantu, odnosno zanima nas netrivialno rješenje linearnog sustava s viškom ograničenja (engl. *overconstrained linear system*):

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{L}\mathbf{x}\|, \quad \text{uz} \quad \|\mathbf{x}\| = +1, \quad (3.5)$$

može se zaključiti da tražimo desni svojstveni vektor matrice $\mathbf{L}^T\mathbf{L}$ koji odgovara njezinoj apsolutno najmanjoj svojstvenoj vrijednosti (Šegvić, 2003). Ovaj se postupak provodi singularnom dekompozicijom matrice $\mathbf{L}$ (engl. *singular value decomposition, SVD*), čije se detaljno objašnjenje može pronaći u Ma et al. (2004).

3.2. Početna procjena rješenja problema kalibracije kamere u zatvorenoj formi

Nakon procjene homografije rješavanjem linearnog sustava s viškom ograničenja (3.5), možemo uz poznatu homografiju modelirati ograničenja na matricu parametara $\mathbf{K}$. Raspisivanjem jednažbe (3.1), uz označavanje $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3]$ dobiva se:

$$\begin{aligned} [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3] &= \lambda \mathbf{K} \Pi_0 \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{T} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{T}] &= \frac{1}{\lambda} \mathbf{K}^{-1} [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3] \\ \mathbf{r}_1 &= \frac{1}{\lambda} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{1}{\lambda} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 \quad (3.7)$$

pri čemu je λ proizvoljni skalar. Uvodeći oznaku $(\mathbf{M}^{-1})^T = \mathbf{M}^{-T}$ i zbog činjenice da su $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ ortonormalni vektori koji određuju rotacijsku matricu (zajedno s vektorom $\mathbf{r}_3$) te koristeći (3.6) i (3.7), dobivamo ograničenja na intrinzične parametre kamere:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 &= 0 \\ \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_1\|^2 &= \|\mathbf{r}_2\|^2 \\ \mathbf{h}_1^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_1 &= \mathbf{h}_2^T \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Iz (3.8) i (3.9) vidljivo je da jedna homografija, odnosno slika korištenog 2-D modela iz jedne perspektive postavlja 2 uvjeta na 6 intrinzičnih parametara kamere (za opisati rotaciju dovoljna su 3 parametra, dok su za opisati translaciju potrebna još 3 dodatna parametra). Ovo slijedi iz činjenice da homografija ima u općenitom slučaju 8 stupnjeva slobode.

Kako bi smo ograničenja (3.8) i (3.9) napisali kao homogene jednadžbe, uvedimo matricu $\mathbf{W}$ s vrijednošću:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = \mathbf{K}^{-\top} \mathbf{K}^{-1} &= \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x^2} & -\frac{\alpha_\theta}{\alpha_x^2 \alpha_y} & \frac{o_y \alpha_\theta - o_x \alpha_y}{\alpha_x^2 \alpha_y} \\ -\frac{\alpha_\theta}{\alpha_x^2 \alpha_y} & \frac{\alpha_\theta^2}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} + \frac{1}{\alpha_y^2} & -\frac{\alpha_\theta (o_y \alpha_\theta - o_x \alpha_y)}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} - \frac{o_y}{\alpha_y^2} \\ \frac{o_y \alpha_\theta - o_x \alpha_y}{\alpha_x^2 \alpha_y} & -\frac{\alpha_\theta (o_y \alpha_\theta - o_x \alpha_y)}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} - \frac{o_y}{\alpha_y^2} & \frac{(o_y \alpha_\theta - o_x \alpha_y)^2}{\alpha_x^2 \alpha_y^2} + \frac{o_y^2}{\alpha_y^2} + 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Kako je $\mathbf{W}$ simetrična matrica, u potpunosti je određena 6-D vektorom:

$$\mathbf{w} = [W_{11}, W_{12}, W_{22}, W_{31}, W_{32}, W_{33}]^\top. \quad (3.11)$$

Ako se i -ti redak matrice $\mathbf{H}$ označi s $\mathbf{h}_i = [h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}]^\top$, može se pisati:

$$\mathbf{h}_i^\top \mathbf{W} \mathbf{h}_j = \mathbf{v}_{ij} \mathbf{w} \quad (3.12)$$

uz

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ij} = [& h_{i1} h_{j1}, h_{i1} h_{j2} + h_{i2} h_{j1}, h_{i2} h_{j2}, \\ & h_{i3} h_{j1} + h_{i1} h_{j3}, h_{i3} h_{j2} + h_{i2} h_{j3}, h_{i3} h_{j3}]^\top, \end{aligned}$$

pa se ograničenja na intrinzične parametre prikazuju kao homogene jednadžbe po $\mathbf{w}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \mathbf{2}^\top \\ (\mathbf{v}_1 \mathbf{1} - \mathbf{v}_2 \mathbf{2})^\top \end{bmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

Uzimajući u obzir ograničenja dobivena iz svih n poznatih slika ravnine modela, dobivamo n jednadžbi oblika (3.13) koje u matričnom obliku pišemo:

$$\mathbf{V} \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

gdje je $\mathbf{V}$ dimenzija $2n \times 6$. U općem slučaju, kada je poznato $n \geq 3$ homografija, jedinstveno rješenje za $\mathbf{w}$ moguće je odrediti do u skalarni faktor singularnom dekompozicijom matrice $\mathbf{V}$, slično kao i kod (3.5). U slučaju $n = 2$ rješenje sustava može se odrediti uz pretpostavku da je ukošenost slike $\alpha_\theta = 0$, dok se u slučaju $n = 1$

mogu uvesti dodatna ograničenja na, primjerice, koordinate osnovne točke kamere, pretpostavljajući da se osnovna točka nalazi u ishodištu koordinatnog sustava slikovne ravnine.

Nakon određivanja parametara vektora $\mathbf{w}$, odnosno matrice $\mathbf{W}$, parametre kalibracijske matrice $\mathbf{K}$ možemo odrediti dekompozicijom po Choleskom (Šegvić, 2003). Dekompozicija po Choleskom primjenjiva je na simetrične pozitivno definitne matrice (poput matrice $\mathbf{W}$), s detaljnim postupkom opisanim u Higham (2008).

Uz poznatu matricu $\mathbf{K}$, parametri za rotaciju i translaciju određuju se prema (3.6) i (3.7) te:

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{T} = \lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{h}_3, \quad (3.16)$$

uz faktor λ određen prema $\lambda = 1/||\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_1|| = 1/||\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_2||$. Zbog šuma u podacima, ovako dobivena matrica $\mathbf{R}' = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3]$ u općenitom slučaju ne zadovoljava uvjete za rotacijsku matricu. No, pokazuje se da ukoliko matrica $\mathbf{R}'$ ima singularnu dekompoziciju $\mathbf{R}' = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, najbolja procjena rotacijske matrice $\mathbf{R}$ u smislu Frobeniusove norme razlike $\mathbf{R} - \mathbf{R}'$ dobiva se kao $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{V}^T$.

3.3. Iterativno optimiranje procjene parametara kalibracije

Procjena za parametre kamere dobivena u odjeljku 3.2 dobivena je minimizacijom algebarske udaljenosti bez fizičkog značenja. Ovaj rezultat može se poboljšati primjenjujući zaključivanje na temelju najveće izglednosti (engl. *maximum likelihood inference*).

Ako imamo n slika ravnine modela sa m istaknutih točaka i može se pretpostaviti da su točke u slikovnoj ravnini zaražene nezavisnim i identično distribuiranim šumom, procjena kalibracijskih parametara prema kriteriju najveće izglednosti dobiva se minimizacijom sljedećeg funkcionala:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\| \bar{\mathbf{q}}'_{ij} - \bar{\mathbf{q}}'(\mathbf{K}, \mathbf{R}_i, \mathbf{T}_i, \mathbf{Q}_{0j}) \right\|^2, \quad (3.17)$$

pri čemu je $\bar{\mathbf{q}}'(\mathbf{K}, \mathbf{R}_i, \mathbf{T}_i, \mathbf{Q}_{0j})$ projekcija točke ravnine modela $\mathbf{Q}_{0j}$ na ravninu slikovnih elemenata i prema jednadžbi (3.1). Rotacija se može prikladno parametrizirati trodimenzionalnim vektorom paralelnim s osi rotacije čija je norma jednaka iznosu

kuta rotacije. Vektorski prikaz povezan je s matričnim prikazom rotacije Rodriguesovom formulom (Ma et al., 2004).

Kako se u (3.17) radi o nelinearnom problemu minimizacije, moguće ga je riješiti Levenberg-Marquardtovim algoritmom (Lourakis, 2005) gdje se kao početni parametri za intrinzične i ekstrinzične parametre kamere $\mathbf{K}$ i $\{\mathbf{R}_i, \mathbf{T}_i | i = 1..n\}$ mogu koristiti procjene parametara dobivene u odjeljku 3.2.

Pri kalibraciji kamere uz modeliranje radijalne distorzije leće, može se umjesto minimizacije (3.17) koristiti minimizacija funkcionala koja pri izračunu projiciranih koordinata točke na slikovnu ravninu uzima u obzir i koeficijente korekcije za distorziju leće:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\| \bar{\mathbf{q}}'_{ij} - \bar{\mathbf{q}}'(\mathbf{K}, \kappa_1, \kappa_2, \mathbf{R}_i, \mathbf{T}_i, \mathbf{Q}_{0j}) \right\|^2, \quad (3.18)$$

pri čemu se projekcija točke ravnine modela na slikovnu ravninu sada računa prema (3.1), (2.37) i (2.38).

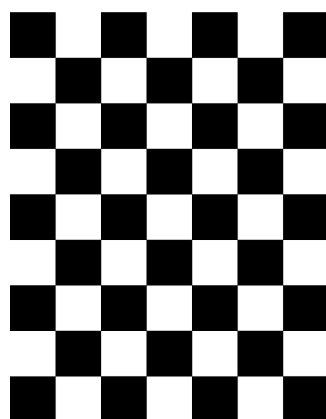
3.4. Nepovoljne konfiguracije kalibracijskog modela

Nepovoljne konfiguracije kalibracijskog modela uzrokuju da matrica $\mathbf{W}$ izračunata u odjeljku 3.2 nije pozitivno definitna pa je nemoguće provesti njenu dekompoziciju po Choleskom i tako dobiti parametre kamere. Ovo se u najopćenitijem slučaju događa kada rotacijske matrice dobivene iz različitih pogleda na ravninu modela nisu nezavisne, odnosno kada su homografije koje opisuju dobivanje formiranje slike različitih pogleda povezane samo translacijom. U tom slučaju, dodatna homografija ne donosi nikakva dodatna ograničenja na parametre kamere.

Ostale mogućnosti za dobivanje nepovoljne matrice $\mathbf{W}$ uključuju malo uparenih točaka na različitim slikama ravnine modela te situaciju kada je kalibracijski uzorak daleko od kamere (Šegvić, 2003). Kako su ove konfiguracije kalibracijskog modela upravo suprotne scenarijima za dobro umjeravanje kamere, nepovoljne se konfiguracije kalibracijskog modela lako mogu izbjeći i ne predstavljaju ograničenje na korištenje ove metode kalibracije.

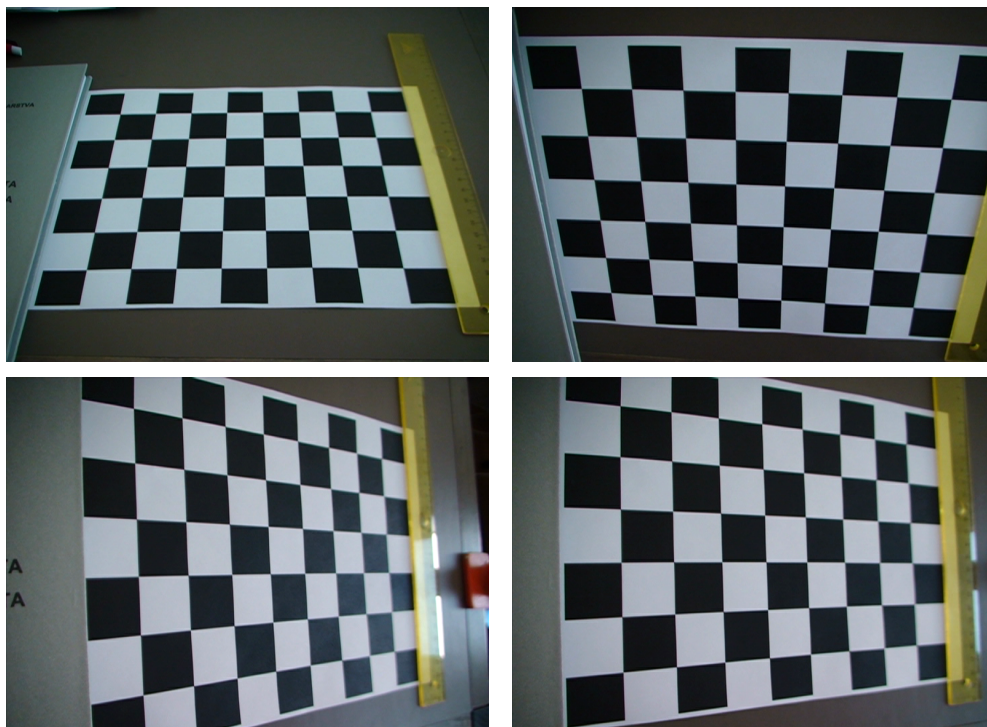
4. Primjer kalibracije kamere u programskom jeziku *MATLAB*

Za kalibraciju kamere u programskom jeziku *MATLAB* koristi se *Skup alata za kalibraciju kamere za MATLAB* (engl. *Camera Calibration Toolbox for Matlab*). Alat omogućava kalibraciju kamere uz modeliranje intrinzičnih i ekstrinzičnih parametara kamere, uz grafičke prikaze postupka kalibracije, grešaka pri kalibraciji, iznosa distorzije te mnogih drugih korisnih informacija (Bouguet, 2010).



Slika 4.1: Planaran uzorak korišten pri kalibraciji kamere skaliran na 20% izvorne veličine

U sklopu ovog seminarskog rada kalibrirana je kamera *Sony HDR-HC7*. Za kalibraciju se koristio kvadratni uzorak prikazan na slici 4.1. Postupak je dovoljno robustan da je uzorak dovoljno ispisati na laserskom pisaču i u postupku koristiti izmjerene dimenzije kvadrata uzorka. Ispisani uzorak imao je dimenzije $29.8mm \times 29.96mm$ dok je izvorna veličina uzorka $30mm \times 30mm$. Veća deformacija prisutna je uzduž dulje stranice uzorka zbog karakteristika laserskog pisača. Nakon fiksiranja kalibracijskog uzorka za tvrdi podlogu (površina radnog stola), prvi korak u kalibraciji jest snimiti video kalibracijskog uzorka u kojem su prisutni razni pogledi na uzorak. Iz videa se tada vade reprezentativne slike uzorka koje će se koristiti za kalibraciju. Ukupno je korišteno 15 prikaza uzorka za kalibraciju u *.tif* formatu, od kojih se prva četiri mogu

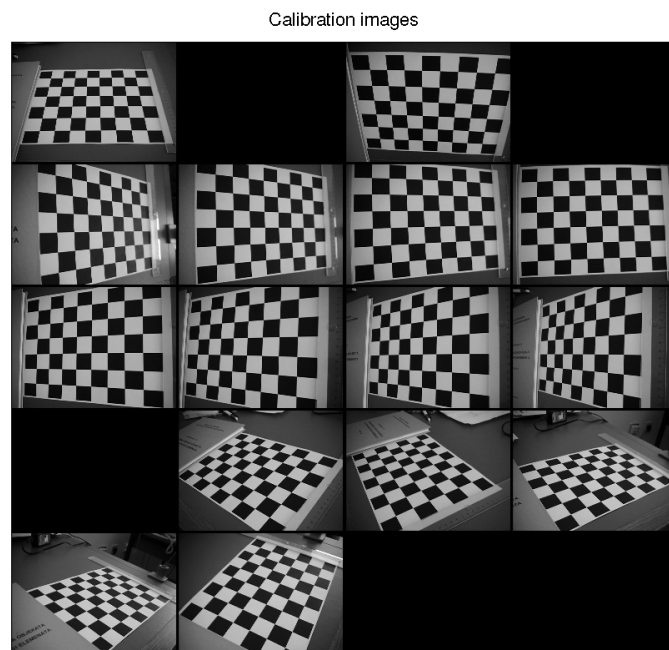


Slika 4.2: Prve četiri slike uzorka korištena u postupku kalibracije.

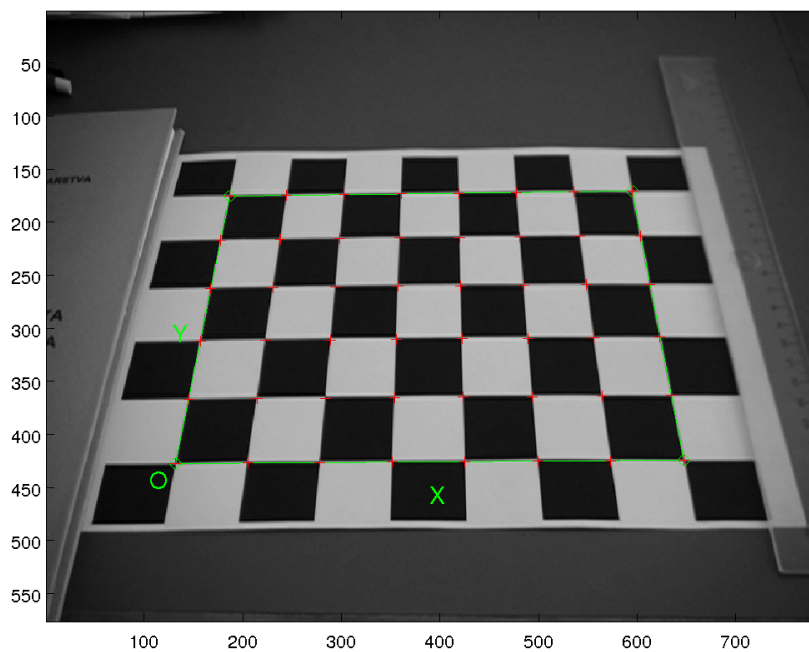
vidjeti na slici 4.2.

Nakon instaliranja korištenog skupa alata za kalibraciju kamere (detaljne upute mogu se pronaći u Bouguet (2010)), potrebno je u razvojnoj okolini *MATLAB-a* pozicionirati se u datoteku koja sadrži slike uzorka za kalibraciju. Potrebno je imenovati datoteke sa slikama uzorka za kalibraciju na način da je prefiks imena datoteke zajednički svim uzorcima, nakon čega slijedi broj te na kraju ekstenzija. Primjer imena datoteke slike uzorka korištenog za kalibraciju jest *shot0007.tif*. Naredbom `calib_gui` pokreće se korisničko sučelje okruženja za kalibraciju. Ukoliko ne postoji velik broj kalibracijskih uzoraka i slike ne zauzimaju mnogo memorijskog prostora (kao u ovom primjeru), dovoljno je dobro koristiti *standardni* način rada s kalibracijskim uzorcima gdje se uzorci učitavaju samo jednom i spremaju u radnu memoriju. Ovo se postiže odabirom tipke `Standard` u početnom prozoru.

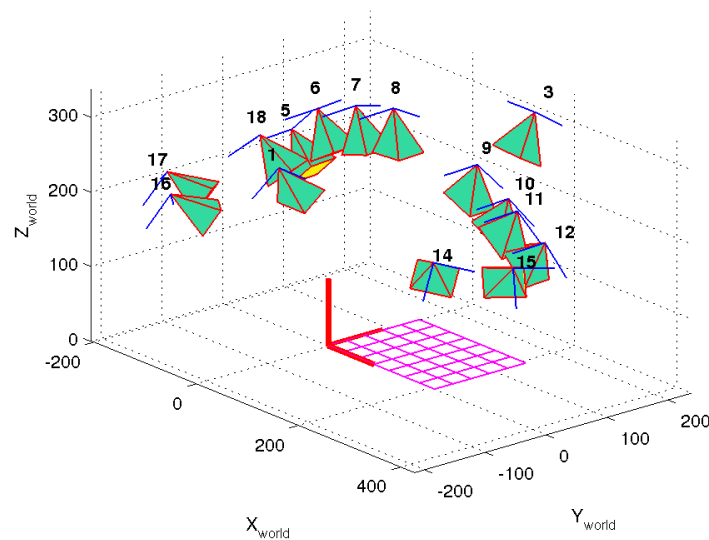
Nakon toga, otvara se sučelje za kalibraciju. Slike se učitavaju pritiskom na tipku `Read images`, pri čemu je u konzoli potrebno upisati prefiks imena datoteka (u našem slučaju, *shot*) te označiti format datoteka s uzorcima. U konzoli se sada ispisuje poruka o uspješno učitanim slikama, a učitani uzorci prikazuju se smanjenih dimenzija na jednoj slici kako se može vidjeti na Slici 4.3. Idući je korak označavanje rubova dijela uzorka korištenog za kalibraciju i pokreće se pritiskom na tipku `Extract grid`



Slika 4.3: Sažeti prikaz slika uzoraka za kalibraciju



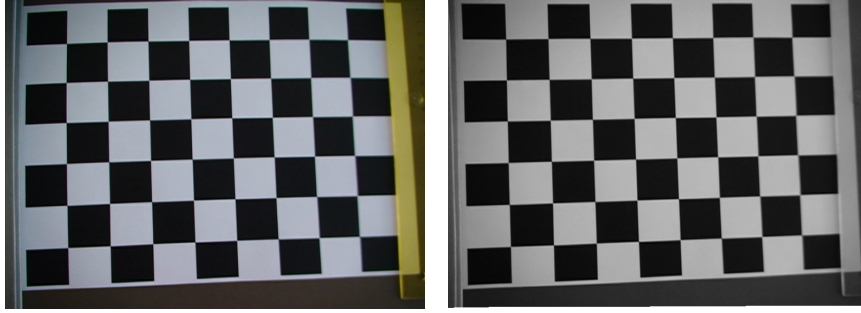
Slika 4.4: Uzorak s detektiranim rubovima kvadrata



Slika 4.5: Položaji kamere dobiveni iz uzoraka za kalibraciju

corners. Za svaku je sliku potrebno označiti četiri kuta dijela uzorka korištenog za kalibraciju u istom redoslijedu i počevši od istog kuta kako bi rekonstrukcija položaja kamere bila ispravna za sve slike uzorka. Nakon unošenja dimenzija kvadrata za prvi kalibracijski uzorak, pozicija unutarnjih rubova kvadrata kao i broj kvadrata detektiraju se automatski nakon označavanja vanjskog ruba područja uzorka na svakoj slici. Primjer detektiranih rubova na prvom kalibracijskom uzorku vidljiv je na Slici 4.4. Ostali parametri za detekciju rubova te koeficijenti distorzije korišteni u početnoj detekciji mogu se ostaviti postavljeni na pretpostavljene vrijednosti zbog toga što utjecaji deformacije na slikama nisu velike i rubovi kvadrata detektiraju se vrlo blisko stvarnim položajima.

Iz označenih rubova kvadrata dobivaju se početni parametri za kalibraciju. Kalibracija kamere sada se pokreće pritiskom na tipku *Calibration*. Može se primjetiti da je postupak kalibracije brz, odnosno da konvergira u samo 22 koraka. Nakon kalibracije, dobivaju se rezultati (i mjere nesigurnosti) za parametre kamere: žarišnu udaljenost, položaj osnovne točke kamere, koeficijent ukošenosti, koeficijente koji opisuju radijalnu i tangencijalnu distorziju te pogreške slikovnih elemenata. Za bolje rezultate (s manjim pogreškama slikovnih elemenata i mjerama nesigurnosti), može se nakon inicijalne kalibracije provesti postupak ponovne procjene rubova kvadrata na temelju



(a) Uzorak za kalibraciju

(b) Uzorak s ispravljenom distorzijom

Slika 4.6: Ispravljanje distorzije na uzorku za kalibraciju

empirijski određenih parametara kamere pritiskom na tipku `Recomp_corners` te se pokrenuti ponovni postupak kalibracije pritiskom na tipku `Calibration`. Parametri kamere dobiveni drugom kalibracijom u našem slučaju iznose:

- dimenzije jedinične dužine s obzirom na dimenzije slikovnih elemenata $(\alpha_x, \alpha_y) = (868.600, 849.306) \pm (2.021, 1.846)$
- osnovna točka leće $(o_x, o_y) = (406.380, 321.569) \pm (2.494, 2.36535)$
- koeficijent ukošenosti $s_\theta = 0$
- koeficijenti radialne distorzije $\kappa_{r1} = 0.02803 \pm 0.01327, \kappa_{r2} = -0.25716 \pm 0.06909, \kappa_{r3} = 0 \pm 0$
- koeficijenti tangencijalne distorzije $\kappa_{t1} = 0.01814 \pm 0.00103, \kappa_{t2} = 0.00741 \pm 0.00103$

Nakon kalibracije kamere alat omogućava izračun i grafički prikaz pozicija kamere pri uzimanju uzoraka za kalibraciju, kao što je prikazano na Slici 4.5. Još jedna od korisnih mogućnosti ovog programskog alata jest ispravljanje distorzije na uzorcima za kalibraciju ili na novim uzorcima dobivenim istom kamerom. Primjer ispravljanja distorzije na uzorku za kalibraciju može se vidjeti na Slici 4.6. Iako ovaj skup alata pruža mnoge druge napredne mogućnosti u postupku kalibracije kamere, ovdje su prikazane samo osnovne funkcije korištene pri kalibraciji odabrane kamere. Iscrpan opis dodatnih mogućnosti alata kao i brojni primjeri kalibracije mogu se naći u Bouguet (2010).

5. Zaključak

Analizom metode kalibracije kamere predložene u Zhang (2000) te nakon provedenog postupka kalibracije, može se zaključiti da je ova tehnika olakšala provođenje postupka kalibracije kamere. Prilikom kalibracije koristi se 2-D model koji je jednostavno za izraditi nasuprot kompleksnim modelima kakve zahtjevaju fotogrametrijske metode kalibracije kamere. Uklonjena je potreba za dobro kontroliranim laboratorijskim uvjetima kako bi se osigurala točnost rezultata kalibracije.

Također, kako predložena metoda pokazuje brzu konvergenciju, pogodna je za računalnu implementaciju pa su tako razvijeni alati za kalibraciju kamere poput onoga izloženoga u poglavlju 4. Ovakvi alati omogućavaju da se postupak kalibracije provede efikasno u relativno kratkom vremenu i bez potrebe za skupom ispitnom okolinom.

6. Literatura

Jean-Yves Bouguet. *Camera Calibration Toolbox for Matlab*, 2010. URL http://www.vision.caltech.edu/bouguetj/calib_doc/index.html.

Nicholas J. Higham. Cholesky factorization. *Wiley Interdisciplinary Reviews Computational Statistics*, 1(2):251–254, 2008.

Ramesh Jain, Rangachar Kasturi, i Brian G. Schunck. *Machine Vision*. McGraw-Hill, Inc., 1995.

Manolis I. A. Lourakis. A brief description of the levenberg-marquardt algorithm implemented by levmar. *Matrix*, 3, 2005.

Yi Ma, Stefano Soatto, Jana Košecká, i S. Shankar Sastry. *An Invitation to 3-D Vision*. Springer Science+Business Media, 2004.

Zhengyou Zhang. A Flexible New Technique for Camera Calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22:1330–1334, 2000.

Siniša Šegvić. Umjeravanje kamere ravninskim uzorkom, 2003.

7. Sažetak/Abstract

Ovaj rad opisuje pristup kalibraciji kamere koji, za razliku od tradicionalnih tehnika kalibracije, koristi planaran objekt za dobivanje informacije o parametrima kamere. Pristup opisan u ovom radu učinio je postupak kalibracije kamere pristupačnijim i lakšim za provedbu. Kalibracija kamere postupak je koji je našao brojne primjene u područjima računalnog vida i fotogrametrije. Zbog važnosti ovog postupka, pojednostavljenje procesa kalibracije kamere uvedeno ovdje opisanim pristupom omogućilo je lakši razvoj brojnih aplikacija iz ovih područja. Osim same tehnike kalibracije kamere, rad pruža pregled matematičkih modela korištenih za opisivanje problema kalibracije. U rad je također uključen i primjer kalibracije kamere u programskom jeziku *MATLAB*.

Camera calibration using a planar object

In this work, a camera calibration technique that, in contrast to traditional techniques, uses a planar object to acquire camera parameters is described. The approach described in this work made camera calibration procedures more accessible and easier to carry out. Camera calibration is a procedure with many applications in the fields of machine vision and photogrammetry. The importance of this procedure made the simplification of the process introduced by the approach described here essential for easier development of many applications in these fields. Besides the description of the calibration technique, this work contains an overview of mathematical models used to describe the camera calibration problem. The work also includes an example of camera calibration in programming language *MATLAB*.