

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 695

**Analiza i vrednovanje odabranih
izvedbenih detalja postupaka
optičkog toka**

Igor Smolković

Zagreb, srpanj 2014.

Umjesto ove stranice umetnite izvornik Vašeg rada.
Da bi ste uklonili ovu stranicu obrišite naredbu \izvornik.

Zahvaljujem se roditeljima i sestri na podršci te mentoru na pruženoj pomoći pri izradi diplomskog rada.

SADRŽAJ

Popis slika	vi
Popis tablica	vii
1. Uvod	1
2. Optički tok	3
2.1. Formalan opis problema	3
2.2. Izvod jednadžbe optičkog toka	3
2.3. Geometrijska reprezentacija problema optičkog toka	5
3. Varijacijski račun	7
3.1. Izvod Euler-Lagrangeove jednadžbe	9
3.2. Primjena u traženju optičkog toka	11
4. Izvodi odabranih postupaka	14
4.1. Korišteni matematički operatori	15
4.2. Postupak Horna i Schuncka	16
4.3. Postupak TV- L^1	21
4.3.1. Rješenje prvog problema dualnog postupka TV- L^1	24
4.3.2. Objašnjenje projekcijskog algoritma	25
4.3.3. Rješenje drugog problema dualnog postupka TV- L^1	30
4.3.4. Generalizacija za više od jedne dimenzije	32
4.3.5. Kriterij zaustavljanja minimizacije	33
4.4. Usporedba QU i TV norme	34
4.5. Postupak postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila	35
4.6. Bikubična interpolacija	38
4.7. Podjela slike na teksturni i strukturni dio	41

5. Prikaz optičkog toka i korišteni ispitni skupovi	43
5.1. Strujnice vektorskog polja	43
5.2. Kodiranje bojama	44
5.3. Ground-truth	45
5.4. Ispitni skupovi	45
6. Programska izvedba i vanjske biblioteke	47
6.1. Struktura programskog koda	48
6.1.1. Sustav za procjenu optičkog toka	48
6.1.2. Sustav za evaluaciju i vizualizaciju gustog optičkog toka . . .	49
6.2. Klasičan postupak Horna i Schuncka	50
6.3. Postupak Horna i Schuncka u prostoru mjerila	50
6.4. Postupak TV-L1 u prostoru mjerila	52
6.5. Poboljšani postupak TV-L1 u prostoru mjerila	53
6.6. Popis parametara	55
7. Eksperimentalni rezultati	56
7.1. Kriteriji uspješnosti postupaka	56
7.2. Optimiranje hiperparametara u prostoru mjerila	57
7.2.1. Postupak Horna i Schuncka	57
7.2.2. Postupak TV-L1	60
7.2.3. Poboljšani TV-L1 postupak	63
7.3. Vremena izvršavanja postupaka	63
7.3.1. Ispitno računalo	64
7.4. Analiza dobivenih rezultata	64
8. Zaključak	66
Literatura	67

POPIS SLIKA

2.1. Pomak slikovnog elementa i vektor brzine	4
2.2. Geometrijska reprezentacija jednadžbe optičkog toka	5
2.3. Problem lokalnog otvora	6
3.1. Problem brahistohrone	7
3.2. Varijacija funkcije	8
4.1. Promatrani slikovni elementi u procijeni gradijenata postupka Horna i Schuncka	18
4.2. Aproksimacija izrazima $\phi_\epsilon(x)$ i $\psi_\epsilon(\nabla \mathbf{u})$	22
4.3. Geometrijska reprezentacija uvjeta maksimuma kod Chambolleovog algoritma	27
4.4. Funkcije za usporedbu normi	34
4.5. Postupak postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila . . .	36
4.6. Prikaz problema interpolacije	38
4.7. Catmull-Rom interpolacijski polinom	39
4.8. Usporedba najbližeg susjeda, bilinearne i bikubične interpolacije . . .	40
4.9. Pogreška nastala zbog neželjenih efekata	41
5.1. Strujnice vektorskog polja	43
5.2. Kotač boja	44
5.3. Prikaz optičkog toka pomoću kotača boja	44
7.1. HS: Ovisnost EPE i AAE o parametru λ	57
7.2. HS: izgled najboljih optičkih tokova	59
7.3. Slijed Grove2: AAE i EPE u ovisnosti o θ	60
7.4. Slijed Grove2: AAE i EPE u ovisnosti o λ	60
7.5. TV-L1: izgled najboljih optičkih tokova	62

POPIS TABLICA

4.1. Vrijednosti normi	35
5.1. Popis ispitnih slijedova s priloženim ground truthovima	46
5.2. Popis ispitnih slijedova bez priloženih ground truthova	46
7.1. HS : AAE i EPE za najbolje hiperparametre	58
7.2. HS : AAE i EPE za standardne hiperparametre	58
7.3. TV-L1 : AAE i EPE za najbolje hiperparametre	61
7.4. TV-L1 : AAE i EPE za standardne hiperparametre	61
7.5. Poboljšani TV-L1 : AAE i EPE za standardne hiperparametre	63
7.6. Vremena izvršavanja postupaka	63
7.7. Usporedba dobivenih rezultata na pojedinim ispitnim slijedovima . . .	64

1. Uvod

Analiza pokreta u sceni pripada jednom od bitnijih područja računalnog vida. Općenito gledajući analiza pokreta jedan je od osnovnih zadataka svih računalnih sustava koji pokušavaju simulirati ljudski vid. Cilj je u danom video zapisu detektirati i odrediti smjer i iznos kretanja objekata. Računanje optičkog toka jedan je od pristupa pomoću kojeg se može napraviti analiza kretanja. Analiza kretanja može biti napravljena na cijeloj slici ili pojedinim dijelovima pa tako govorimo o gustom odnosno rijetkom optičkom toku. Prilikom računanja optičkog toka objekti se ne razlikuju od pozadine već se provodi procjena optičkog toka za svaki slikovni element promatranog područja posebno. Rezultat provedbe postupka je vektorsko polje koje sadrži vektore brzina koji za svaki slikovni element prikazuju brzinu promjene položaja. Brzine će biti nula ako se radi o slikovnim elementima pozadine, a različite od nula ako pripadaju objektu u pokretu.

Ovaj diplomski rad razmatra postupke gustog optičkog toka. Središnja tema je varijacijski račun i njegova primjena na računanje optičkog toka. U postupcima računanja optičkog toka varijacijskim računom cilj je provesti minimizaciju energijskog funkcionala čime se dobiva funkcija koja predstavlja rješenje traženog problema. Varijacijski račun nije ograničen samo na računanje optičkog toka već se njegova primjena nalazi i u postupcima odstranjivanja šuma na slikama. Kroz poglavlja u nastavku biti će prikazana međusobna povezanost postupaka optičkog toka i odstranjivanja šuma na slikama.

Procjena optičkog toka varijacijskim računom svoj početak doživjela osamdesetih godina prošlog stoljeća kada su Horn i Schunck [15] predložili novi pristup procjene gustog optičkog toka temeljen na minimizaciji energijskog funkcionala uz ograničenje glatkoće vektorskog polja. Paralelno uz njih razvijali su se i drugi pristupi, primjerice pristup Lucas-Kanade [19]. Devedesetih godina prošlog stoljeća Rudin, Osher i Fatemi [22] uveli su novi pristup odstranjivanja šuma na slikama temeljen na normi ukupne varijacije (engl. *Total variation norm*, TV). TV norma vrlo brzo je pronašla primjenu i u procjeni optičkog toka. Zbog dobrih karakteristika TV norme koje omogućavaju

dobar rad s oštrim rubovima na slikama optički tok može biti preciznije procijenjen. Minimizacija energijskih funkcionala matematički je vrlo zahtjevan posao te se u ovom radu obrađuju samo neki od postupaka procjene optičkog toka varijacijskim računom.

Drugo poglavlje opisuje problem traženja gustog optičkog toka te prikazuje izvod jednadžbe optičkog toka (engl. *Optical flow constraint equation*). Treće poglavlje uvodi pojam varijacijskog računa i prikazuje izvod Euler-Lagrangeovih jednadžbi za različite tipove podfunkcionalnih funkcija.

Četvrto poglavlje daje izvod i detaljno objašnjenje svih odabranih postupaka procjene optičkog toka varijacijskim računom koji se razmatraju u ovom diplomskom radu. Najprije se razmatra postupak Horna i Schuncka [15] koji je prvi postupak temeljen na varijacijskom računu. Nakon toga slijedi postupak $TV-L^1$ [24]. Prikazuje se razlika između normi koje se koriste u postupcima $TV-L^1$ i postupku Horna Schuncka. Opisuje se strategija temeljena na postupnom poboljšanju optičkog toka u prostoru mjerila i uvodi pojam bikubične interpolacije. Navedeni postupci imaju problem s promjenom osvjetljenja scene, sjenama i odsjajima. Prikazuje se postupak strukturno-teksturne dekompozicije koji ublažava utjecaj takvih neželjenih efekata.

Peto poglavlje opisuje načine vizualizacije optičkog toka te daje pregled korištenih ispitnih skupova. Šesto poglavlje prikazuje programske implementacije te daje pseudokod implementiranih metoda. U sedmom poglavlju objašnjeni su kriteriji prema kojima je napravljena evaluacija te prikazani dobiveni eksperimentalni rezultati.

2. Optički tok

U ovom poglavlju opisuje se problem traženja gustog optičkog toka. Prikazuje se postupak izvoda jednadžbe optičkog toka (engl. *Optical flow constraint equation*) temeljen na pretpostavci konstantnog intenziteta slike. Zatim se opisuju i objašnjavaju problemi koji se pojavljuju prilikom računanja optičkog toka.

2.1. Formalan opis problema

Na raspolaganju je video zapis koji se rastavlja u slijed slika uzimanjem okvira (slika) u približno jednakim vremenskim intervalima. Potrebno je na dobivenom slijedu slika $S = (I_0, I_1, I_2, \dots, I_n)$ odrediti gusti optički tok, gdje je $I_k : (\Omega \subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$. Gusti optički tok je po definiciji vektorsko polje koje svakoj točki (slikovnom elementu) (x, y) dodjeljuje vektor brzine promjene koordinata. Drugim riječima potrebno je odrediti poziciju slikovnog elementa (x, y) slike I_k na slici I_{k+1} i pri tome odrediti brzinu pomaka. Postoji puno postupaka koji se bave tom problematikom te će u ovom radu biti objašnjeni neki od postupaka temeljeni na varijacijskom računu. U nastavku slijedi izvod jednadžbe optičkog toka koja predstavlja osnovnu svih energijskih funkcionala za računanje gustog optičkog toka. Osnovna pretpostavka od koje kreće izvod je konstantnost intenziteta slike. Na raspolaganju je samo prostorno-vremenska razdioba vrijednosti intenziteta slikovnih elemenata pomoću koje se računa optički tok.

2.2. Izvod jednadžbe optičkog toka

Neka je $I(x, y, t)$ funkcija koja određuje intenzitet slike u točki (x, y) u trenutku t . Uz pretpostavku da je točka dio objekta koji se pomaknuo te da intenzitet slike ostaje konstantan nakon pomaka vrijedi:

$$I(x, y, t) = I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t) \quad (2.1)$$

Razvojem desne strane izraza 2.1 u Taylorov red prvog stupnja za vrlo male pomake δx , δy , δt slijedi [26]:

$$I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t) \simeq I(x, y, t) + \frac{\partial I}{\partial x} \delta x + \frac{\partial I}{\partial y} \delta y + \frac{\partial I}{\partial t} \delta t \quad (2.2)$$

Uvrštavanjem 2.2 u 2.1, pokratom istih članova i uvođenjem supstitucija dobiva se izraz:

$$I_x \delta x + I_y \delta y + I_t \delta t = 0, \quad (2.3)$$

gdje je

$$I_x = \frac{\partial I}{\partial x}, \quad I_y = \frac{\partial I}{\partial y}, \quad I_t = \frac{\partial I}{\partial t}$$

Razvoj u Taylorov red prvog stupnja omogućava dobivanje izraza koji sadrži prostorne i vremenske derivacije intenziteta $I(x, y, t)$. Računanjem limesa kada $\delta t \rightarrow 0$ dobiva se jednačba optičkog toka (engl. *Optical flow constraint equation*):

$$I_t = -(I_x u_x + I_y u_y), \quad (2.4)$$

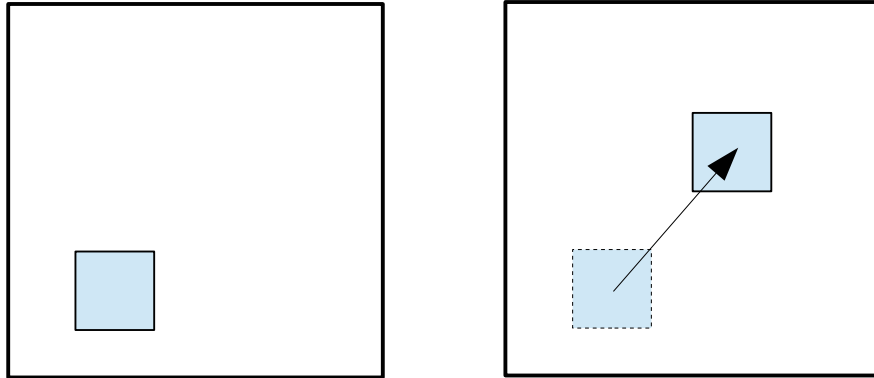
gdje je

$$u_x = \frac{\delta x}{\delta t}, \quad u_y = \frac{\delta y}{\delta t}$$

Izrazi u_x i u_y predstavljaju brzinu promjene x odnosno y koordinata u vremenu. Navedene brzine čine vektor brzine u točki (x, y) :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Na lijevom dijelu slike 2.1 prikazan je položaj točke u trenutku t , desni dio prikazuje trenutak $t + \delta t$ dok strelica prikazuje vektor brzine u točki (x, y) .



Slika 2.1: Pomak slikovnog elementa i vektor brzine

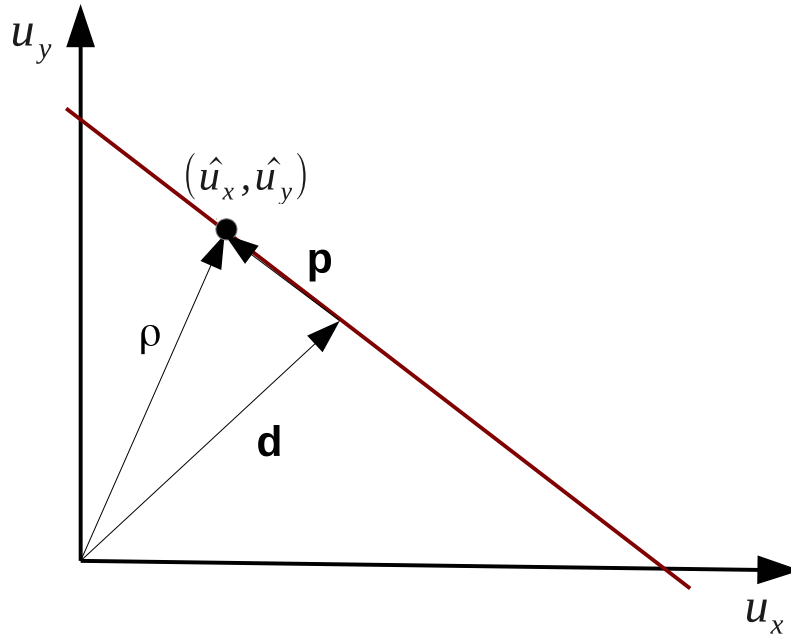
Ponekad je jednažba optičkog toka zadana i u obliku:

$$\nabla I \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial t} I = 0, \quad (2.6)$$

gdje ∇I označava prostorni gradijent funkcije koja određuje intezitet slike u točki (x, y) .

2.3. Geometrijska reprezentacija problema optičkog toka

Valja primijetiti da jednažba 2.4 ima dvije nepoznanice što povlači da jednažba ne može imati jedinstveno rješenje ako se promatra samo jedna točka. I_x, I_y mogu se procijeniti pomoću Sobelovog ili nekog drugog gradijentnog operatora. Optički tok određuje se na nizu slika koje su dobivene iz video zapisa te se I_t može procijeniti na temelju razlike dviju susjednih slika u vremenskom nizu slika. Slika 2.2 prikazuje geometrijsku reprezentaciju problema optičkog toka.



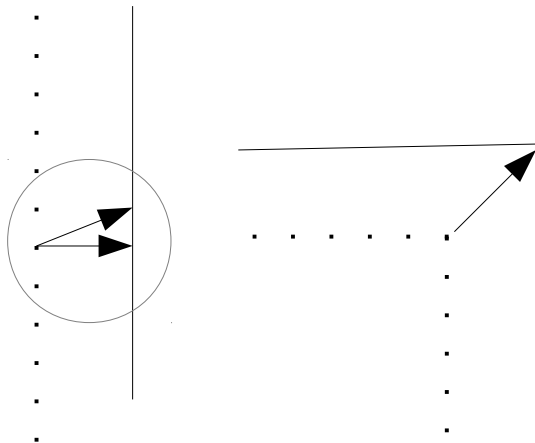
Slika 2.2: Geometrijska reprezentacija jednažbe optičkog toka

Rješenja jednažbe optičkog toka leže na prikazanom pravcu. Pretpostavimo da se rješenje nalazi u točki $(\hat{u}_x, \hat{u}_y)$. Vektor traženog optičkog toka ρ rastavlja se na komponentu u smjeru prostornog gradijenta $\mathbf{d}$ koja se još naziva i "normalni" tok te na paralelnu komponentu $\mathbf{p}$. Iznos komponente u smjeru prostornog gradijenta (normalni

tok) određuje se kao projekcija vektora $\mathbf{u}$ na vektor ∇I :

$$\|\mathbf{d}\| = \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla I}{\|\nabla I\|} = \frac{|I_t|}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}} \quad (2.7)$$

Budući da iz trenutno poznatih podataka nema načina pomoću kojeg bi se mogla odrediti paralelna komponenta, optički tok ne može biti precizno određen. Navedeni problem naziva se problem lokalnog otvora (engl. *aperture problem*), također je poznatiji i pod nazivom problem lokalnih kretnji. Do ovog problema dolazi jer se slika promatra kroz premali otvor te nije moguće odrediti točan smjer i iznos pomaka. Za detaljnije objašnjenje pogledajmo sliku 2.3:



Slika 2.3: Problem lokalnog otvora

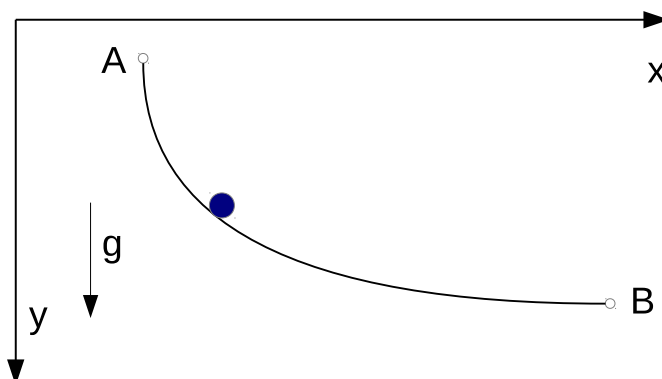
Desni dio slike 2.3 prikazuje smjer pomaka promatranog objekta kao cjeline. Na lijevoj dijelu slike promatramo kretanje samo jednog slikovnog elementa koji pripada tom objektu. Nema načina koji bi jednoznačno mogao odrediti koji je točan smjer pomaka promatranog slikovnog elementa (moguće je kretanje u bilo kojem smjeru). Posljedica je potreba za uvođenjem dodatnih uvjeta koji će jednadžbi optičkog toka pomoći da se precizno odredi optički tok. U ovom diplomskom radu promatrani postupci će zahtijevati glatkoću vektorskog polja. Slike su na računalu zapisane u diskretnoj domeni te prostorne i vremenske derivacije funkcije intenziteta ne mogu biti precizno izračunate već samo procijenjene. Posljedica je nemogućnost preciznog izračuna optičkog toka već samo njegova procjena.

3. Varijacijski račun

Varijacijski račun [14] područje je matematike koje se bavi traženjem ekstrema funkcionala. Prvu primjenu nalazi u rješavanju problema brahistohrone kojeg je definirao Johann Bernoulli 1696. godine:

Materijalna točka kreće se pod djelovanjem gravitacijske sile po glatkoj krivulji u vertikalnoj ravnini. Treba pronaći oblik krivulje koja prolazi kroz dvije unaprijed zadane točke, po kojoj će materijalna točka prijeći za najkraće vrijeme iz jednog položaja u drugi uz početnu brzinu $v = 0$.

Bernoullijev problem prikazan je na slici 3.1:



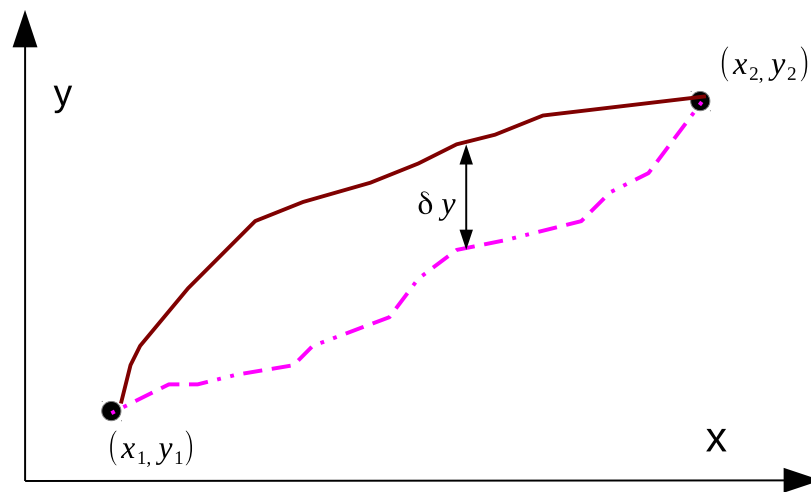
Slika 3.1: Materijalna točka se kreće po krivulji između točaka A i B , a g je gravitacijska sila.

Funkcional je generalizacija funkcije. Preslikavanje $x_0 \rightarrow f(x_0)$ je funkcija, gdje je x_0 argument funkcije f . Preslikavanje $f(x_0) \rightarrow J[f(x_0)]$ je funkcional, gdje je J funkcional, f funkcija, a x_0 njezin argument. Poseban oblik funkcionala je integralni funkcional zadan izrazom:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)] dx \quad (3.1)$$

Varijacijski račun primjenjuje se na probleme u kojima je veličina koju je potrebno minimizirati ili maksimizirati dana u obliku integralnog funkcionala. Kod procjene

optičkog toka koristi se i naziv energijski funkcional jer je cilj minimizirati energiju. Podfunkcionalna funkcija F je unaprijed poznata funkcija ovisna o nezavisnoj varijabli x , funkciji $y(x)$ te njezinoj derivaciji $y'(x) = \frac{dy}{dx}$. Integralni funkcional oblika 3.1 kao argument prima jednu ili više funkcija i vraća skalarnu vrijednost. Osnovni problem varijacijskog računa je traženje funkcije $y(x)$ koja minimizira traženi funkcional. Za razumijevanja varijacijskog računa, nužno je najprije uvesti temeljnu operaciju varijacijskog računa - varijaciju funkcije. Najprije pogledajmo priloženu sliku 3.2:



Slika 3.2: Traženje funkcije $y(x)$

Pretpostavimo [16] da funkcija $y_0(x)$ (označena punom linijom) daje najmanju moguću vrijednost funkcionala te neka je $y(x)$ funkcija (označena iscrtkano) koja se infinitezimalno malo razlikuje od funkcije $y_0(x)$ u svakoj točki promatranog intervala $[x_1, x_2]$. Varijaciju funkcije definiramo izrazom:

$$\delta y(x) = y(x) - y_0(x) \quad (3.2)$$

Simbol δ naziva se varijacijski operator. Operacije variranja i diferenciranja se razlikuju. Diferenciranje je proces u kojem se mjeri promjena funkcije prilikom promjene nezavisne varijable x . Variranje je proces u kojem se vrši promjena funkcije y bez promjene nezavisne varijable x .

Jednadžba 3.2 može se prikazati u obliku:

$$\delta y(x) = y(x) - y_0(x) = \alpha \eta(x), \quad (3.3)$$

gdje je $\eta(x)$ potpuno proizvoljna funkcija, a α parametar koji teži u nulu (naziva se i deformacija puta). Na taj način je varijacija funkcije y opisana proizvoljnom funkcijom

$\eta(x)$ pomnoženom s deformacijom puta. S obzirom na to da varijacijski operator δ označava promjenu funkcije y bez promjene x na čitavom intervalu $[x_1, x_2]$ vrijedi da je $\delta x = 0$ te nezavisna varijabla x ne sudjeluje u procesu variranja. To svojstvo će biti korisno u samom izvodu Euler-Lagrangeove jednadžbe.

Opišimo infinitezimalno malu promjenu funkcije $y(x)$ s funkcijom $y(x, \alpha)$:

$$y(x, \alpha) = y(x) + \alpha\eta(x), \quad (3.4)$$

gdje je α deformacija puta, a $\eta(x)$ proizvoljna funkcija pomoću koje se radi promjena funkcije $y(x)$. Primijetiti da se uvrštavanjem $\alpha = 0$ dobiva početna funkcija $y(x)$. Ono što želimo je postići je pronaći funkciju $y(x)$ koja predstavlja putanju između rubnih točaka (x_1, y_1) i (x_2, y_2) uz uvjet da je vrijednost koju daje funkcional minimalna. Da bi se to ostvarilo tražimo minimum traženog funkcionala uz korištenje funkcije $y(x, \alpha)$ i deformacije puta za koju vrijedi $\alpha \rightarrow 0$:

$$\left. \frac{\partial J[y(x, \alpha)]}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0. \quad (3.5)$$

3.1. Izvod Euler-Lagrangeove jednadžbe

Pretpostavimo da je $y(x, 0)$ funkcija koja minimizira funkcional J te da je $y(x, \alpha)$ njoj relativno bliska funkcija. Funkcija $\eta(x)$ može biti proizvoljno odabrana te je odaberimo tako da promatrane funkcije $y(x, 0)$ i $y(x, \alpha)$ počinju i završavaju u istoj točki. Za njihovu udaljenost u rubnim točkama tada vrijedi:

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 \quad (3.6)$$

Od funkcije $\eta(x)$ također zahtijevamo da bude derivabilna. Uz navedene uvjete putanja je opisana funkcijom $\eta(x)$ i deformacijom puta α :

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x), \quad (3.7a)$$

$$y'(x, \alpha) = \frac{dy(x, 0)}{dx} + \alpha \frac{d\eta(x)}{dx}, \quad (3.7b)$$

$$\delta y(x) = y(x, \alpha) - y(x, 0) = \alpha\eta(x), \quad (3.7c)$$

Valja primijetiti da se uz odabir konstatne α i funkcije $\eta(x)$ može dobiti bilo koja funkcija $y(x, \alpha)$ koja je u okolini funkcije $y(x, 0)$.

U izrazu 3.1 je $J[y(x)] = J[y(x, \alpha)]$:

$$J[y(x, \alpha)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)] dx \quad (3.8)$$

i uvjet ekstrema funkcionala J je:

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad (3.9)$$

Parcijalnom derivacijom funkcionala J po α slijedi:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] dx \quad (3.10)$$

Varijabla x je zanemarena jer ne ovisi o α (x ne sudjeluje u procesu variranja). Derivacijom jednažbi 3.7a i 3.7b po α slijedi:

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \eta(x) \quad (3.11a)$$

$$\frac{\partial y'(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{d\eta(x)}{dx} \quad (3.11b)$$

Nakon uvršavanja u 3.10 slijedi:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\eta(x)}{dx} \right] dx \quad (3.12)$$

Idući korak je provesti parcijalnu integraciju drugog člana desne strane prema izrazu:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du, \quad (3.13)$$

gdje je $dv = \frac{d\eta(x)}{dx}$, $u = \frac{\partial F}{\partial y'}$, $du = \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}$, $v = \eta(x)$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d\eta(x)}{dx} dx = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \eta(x) dx \quad (3.14)$$

Prvi član u izrazu 3.14 iščezava budući da je $\eta(x)$ nula u rubnim uvjetima (promatranje funkcije počinju i završavaju u istoj točki).

Uvrštavanjem izraza dobivenog nakon parcijalne integracije u 3.12 slijedi:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right] dx \quad (3.15)$$

Prema 3.9 uvjet ekstrema postaje:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_{\alpha=0} \eta(x) dx = 0 \quad (3.16)$$

Uz korištenje osnovne leme varijacijskog računa dobiva se Euler-Lagrangeova jednadžba:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (3.17)$$

Osnovna lema varijacijskog računa. *Neka je $f \in C^k$ (k puta kontinuirano derivabilna) na intervalu $[a, b]$ i neka je:*

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0$$

za svaku funkciju $h \in C^k$ na intervalu $[a, b]$ koja zadovoljava uvjete $h(a) = 0, h(b) = 0$. Prema osnovnom načelu varijacijskog računa slijedi da je $f(x) = 0$ na cijelom intervalu $[a, b]$.

3.2. Primjena u traženju optičkog toka

Traženje optičkog toka temelji se na minimizaciji energijskog funkcionala čiji će glavni dio biti jednadžba optičkog toka (podatkovni član). Svi promatrani postupci u ovom radu temeljiti će se na različitom izboru dodatnog člana kojeg nazivamo regularizacijski izraz te upotrebi funkcija koja djeluje na regularizacijski i podatkovni član. Smisao regularizacijskog člana je postaviti nekakvo ograničenje.

Prethodno je opisana Euler-Lagrangeova jednadžba i dan je izvod za traženje ekstrema koji je funkcija jedne nezavisne varijable x . U postupku traženja optičkog toka tražimo brzine u x i y smjeru. Biti će potrebno minimizirati funkcional koji ovisi o dvije funkcije $u_h(x, y)$ i $u_v(x, y)$. Posljedica je potreba za rješavanjem sustava od dvije Euler-Lagrangeove jednadžbe. Najprije slijedi objašnjenje kako pristupiti problemu kada je podfunkcionalna funkcija ovisna o više međusobno nezavisnih funkcija y koje ovise o jednoj nezavisnoj varijabli x .

Traženje ekstrema funkcionala više međusobno nezavisnih funkcija i jedne nezavisne varijable. *Neka je funkcional ovisan o n nezavisno promjenjivih funkcija:*

$$J[\mathbf{y}(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, \mathbf{y}(x), \mathbf{y}'(x)] dx,$$

gdje je $\mathbf{y}(x) = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)]$. Euler-Lagrangeove jednadžbe dane su izrazom:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

ili u vektorskom obliku:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}'} = 0,$$

Dosadašnje promatrane funkcije y i y ovisile su samo o jednoj nezavisnoj varijabli x . Postavlja se pitanje na koji način postupiti ako je podfunkcionalna funkcija F ovisna o funkciji koja ovisi o više nezavisnih varijabli. Pogledajmo slučaj u kojem podfunkcionalna funkcija ovisi o jednoj funkciji koja pak ovisi o dvije nezavisne varijable x i y . Funkcional je zadan u obliku dvostrukog određenog integrala:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} F[x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)] dx dy \quad (3.18)$$

Generalizacijom jednadžbi iz prethodnog poglavlja putanje su definirane pomoću proizvoljne funkcije $\eta(x, y)$:

$$u(x, \alpha) = u(x, y, 0) + \alpha \eta(x, y), \quad (3.19a)$$

$$u_x(x, \alpha) = u_x(x, y, 0) + \alpha \eta_x(x, y), \quad (3.19b)$$

$$u_y(x, \alpha) = u_y(x, y, 0) + \alpha \eta_y(x, y), \quad (3.19c)$$

gdje je $\eta_x(x, y) = \frac{\partial \eta}{\partial x}$, $\eta_y(x, y) = \frac{\partial \eta}{\partial y}$, $u_x(x, y)$ i $u_y(x, y)$ derivacije funkcije $u(x, y)$ po varijablama x i y .

Funkcija $\eta(x, y)$ može se proizvoljno odabrati i bira se tako da iščezava u rubnim dijelovima i mora biti derivabilna što je vidljivo i u prethodnim izrazima. Za udaljenosti u rubnim točkama tada vrijedi:

$$\eta(x_1, y_1) = \eta(x_2, y_2) = 0 \quad (3.20)$$

Uz pretpostavku da je minimum u funkciji $u(x, y, 0)$ deriviranjem funkcionala 3.18 po α dobiva se :

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \eta(x, y) + \frac{\partial F}{\partial u_x} \eta_x(x, y) + \frac{\partial F}{\partial u_y} \eta_y(x, y) \right)_{\alpha=0} dx dy \quad (3.21)$$

Isto kao i slučaju jedne varijable provodi se parcijalna integracija posljednja dva člana. Integracija se provodi posebno za svaki član te se dobiva:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right)_{\alpha=0} \eta(x, y) dx dy = 0 \quad (3.22)$$

Funkcija $\eta(x, y)$ može biti proizvoljno odabrana što znači da izraz unutar zagrada mora biti nula da bi integral bio jednak nuli. Euler-Lagrangeova jednadžba dana je izrazom:

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0 \quad (3.23)$$

U postupku traženja optičkog toka podfunktionalna funkcija ovisna je o dvije nezavisne varijable x i y , dvije međusobno nezavisne funkcije $u_h(x, y)$ (tok u horizontalnom smjeru) i $u_v(x, y)$ (tok u vertikalnom smjeru) te njihovim prvim derivacijama u x i y smjeru. Optički tok se traži rješavanjem sustava od dvije Euler-Lagrangeove jednadžbe oblika 3.23 (posebno za horizontalni i vertikalni smjer):

$$\frac{\partial F}{\partial u_h} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_{hx}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_{hy}} = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_{vx}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_{vy}} = 0 \quad (3.25)$$

4. Izvodi odabranih postupaka

Prije nego što krenemo s opisivanjem postupaka optičkog toka temeljenim na varijacijskom računu uvedimo nove oznake radi lakšeg razlikovanja prostornih derivacija komponenti toka. Označimo tok u x smjeru (horizontalnom) sa u_h te tok u y smjeru (vertikalnom) sa u_v . Raspoložemo s dvije susjedne slike $I_0, I_1 : (\Omega \subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$. Ω je otvoreni podskup od $\mathbb{R}^2$ najčešće kvadratnog ili pravokutnog oblika (odgovara slici). Da bi se odredio gusti optički tok potrebno je odrediti vektorsko polje $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ koje minimizira predviđeni funkcional. Razmatramo funkciju $\mathbf{u}$ smještenu u prostoru funkcija $L^2(\Omega)$ koje su kvadratno integrabilne i $L^1(\Omega)$ koje su apsolutno integrabilne. Ukupna energija koju daje funkcional biti će beskonačna ako $\mathbf{u}$ nije konačan. Najprije uvedimo pojam kvadratno integrabilne funkcije u prostoru $L^2(\Omega)$ i apsolutno integrabilne u prostoru $L^1(\Omega)$:

Kvadratno integrabilna funkcija. Ako za funkciju $u \in L^2(\Omega)$ vrijedi:

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < \infty \quad (4.1)$$

kažemo da je kvadratno integrabilna funkcija.

Apsolutno integrabilna funkcija. Ako za funkciju $u \in L^1(\Omega)$ vrijedi:

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty \quad (4.2)$$

kažemo da je apsolutno integrabilna funkcija.

Prije samih izvoda potrebno je uvesti pojam kvadratne norme $QU(u)$ i norme ukupne varijacije $TV(u)$ (engl. *Total variation norm*) u prostoru $L^1(\Omega)$:

$$QU(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \quad (4.3)$$

$$TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})| d\mathbf{x}, \quad (4.4)$$

gdje je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, a $|\cdot|$ apsolutna vrijednost vektora $\nabla u(\mathbf{x})$.

Za funkciju $u(\mathbf{x})$, gdje je $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ vrijedi:

$$|\nabla u(\mathbf{x})| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2} \quad (4.5)$$

$|\cdot|$ je apsolutna vrijednost vektora $\nabla f(\mathbf{x})$ i odgovara L^2 normi. Prilikom računanja optičkog toka koristi se vektorsko polje $\mathbf{u}(x, y)$. Norme $QU(\mathbf{u})$ i $TV(\mathbf{u})$ su u tom slučaju 2D norme i potrebno je koristiti izraz:

$$|\nabla \mathbf{u}(x, y)|_{2,q} = \left(|\nabla u_h(x, y)|^2 + |\nabla u_v(x, y)|^2 \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.6)$$

U slučaju $QU(\mathbf{u})$ koristi se $q = 1$, a u slučaju $TV(\mathbf{u})$ $q = 2$. U postupku računanja optičkog toka biti će korištene norme:

$$QU(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 d\Omega, \quad (4.7)$$

$$TV(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| d\Omega, \quad (4.8)$$

Radi konzistentnosti s korištenom literaturom [21] svi promatrani funkcionali u nastavku koriste $d\Omega$ umjesto dx .

4.1. Korišteni matematički operatori

Ovo potpoglavlje daje opis operatora [17] korištenih u izvodima te prikazuje njihove ekvivalentne oblike. Rješenje problema gustog optičkog toka je vektorsko polje koje daje informaciju o kretanju slikovnih elemenata (točaka) slike:

$$\mathbf{u}(x, y) = u_h(x, y)\mathbf{i} + u_v(x, y)\mathbf{j} \quad (4.9)$$

Divergencija vektorskog polja je skalarno polje i označava se sa $div \mathbf{u}$, a definira formulom:

$$div \mathbf{u} = \frac{\partial u_h}{\partial x} + \frac{\partial u_v}{\partial y} \quad (4.10)$$

Divergencija vektorskog polja može se prikazati i preko ∇ operatora. Valja uočiti da je divergencija vektorskog polja formalno skalarni produkt vektora ∇ sa vektorom $\mathbf{u}$ te da vrijedi:

$$div \mathbf{u} = \frac{\partial u_h}{\partial x} + \frac{\partial u_v}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_h \\ u_v \end{pmatrix} = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.11)$$

Gradijent skalarnog polja $\phi(x, y)$ je vektor:

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} \quad (4.12)$$

Laplaceov operator definiran je izrazom:

$$\text{div}(\text{grad } \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (4.13)$$

Primijetiti da je skalarni produkt ∇ sa samim sobom:

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.14)$$

te da vrijedi:

$$\text{div}(\text{grad } \phi) = \nabla \cdot (\nabla \phi) = (\nabla \cdot \nabla) \phi = \Delta \phi \quad (4.15)$$

4.2. Postupak Horna i Schuncka

Horn i Schunk su u svom radu [15] prvi predložili upotrebu varijacijskog računa u određivanju optičkog toka. Postupak se temelji na minimizaciji sljedećeg funkcionala:

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (I_t + I_x u_h + I_y u_v)^2 + \lambda (|\nabla u_h|^2 + |\nabla u_v|^2) \, d\Omega. \quad (4.16)$$

Prvi član naziva se podatkovni član i predstavlja odstupanje od jednadžbe optičkog toka (idealno bi trebao biti nula). Drugi član se naziva regularizacijski izraz, a λ je konstanta koja omogućava uravnoteživanje tih dvaju članova. Uz korištenje $\lambda = 0$ nema utjecaja regularizacijskog člana, dok uz prevelik λ dobivamo konstantan tok. Optimalan λ određuje se unakrsnom validacijom. U poglavlju 2 bilo je objašnjeno da optički tok ne može biti jednoznačno određen budući da se pojavljuje problem lokalnog otvora. Horn i Schunk su problem riješi uvođenjem globalnog zahtjeva na glatkoću vektorskog polja. Taj zahtjev predstavlja regularizacijski član i zahtijeva da gradijent optičkog toka bude minimalan. Drugim riječima želimo ograničiti nagle promjene optičkog toka u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Time se zahtijeva da optički tok u promatranom slikovnom elementu bude približno jednak optičkim tokovima u njegovoj okolini. Funkcional Horna i Schuncka za opisano ograničenje koristi normu $QU(\mathbf{u})$. Posljedica zahtjeva je da se postupak ne može dobro nositi s diskontinuitetima zbog prevelikog kažnjavanja velikih gradijenata funkcija u_h i u_v . Problem se primjećuje kod oštih rubova zbog čega dolazi do njihovog "razmazivanja". Svaki puta

kada bi promjena optičkog toka trebala biti velika postupak će preferirati manju. Kvadratni podatkovni član ne podržava outliere. Outlieri su oni slikovni elementi za koje je pogrešno zaključeno da se gibaju ili stoje zbog kršenja uvjeta konstantnog intenziteta uzrokovanog šumom. Postupak određivanja u_h i u_v bazira se na traženju minimuma funkcionala 4.16. Podfunkcionalna funkcija F cijeli je izraz ispod integrala u funkcionalu 4.16 i ovisi o x , y , $u_h(x, y)$, $u_v(x, y)$, $\mathbf{u}'_h(x, y)$ i $\mathbf{u}'_v(x, y)$. Primijetiti da su prve derivacije komponenti toka vektori budući da se derivira u x i y smjeru. Najprije odredimo derivacije podfunkcionalne funkcije F po komponentama toka:

$$\frac{\partial F}{\partial u_h} = 2(I_t + I_x u_h + I_y u_v)I_x, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_v} = 2(I_t + I_x u_h + I_y u_v)I_y. \quad (4.18)$$

Obratimo pozornost na regularizacijski član koji koristi normu $QU(\mathbf{u})$. Prethodno je spomenuto da prve derivacije komponenti optičkog toka čine vektor. Primjenom norme QU dobiva se zbroj kvadrata parcijalnih derivacija komponenti toka $|\nabla \mathbf{u}| = u_{hx}^2 + u_{hy}^2 + u_{vx}^2 + u_{vy}^2$. Parcijalne derivacije podfunkcionalne funkcije F po parcijalnim derivacijama komponenti optičkog toka u horizontalnom i vertikalnom smjeru određene su izrazima:

$$\frac{\partial F}{\partial u_{hx}} = 2u_{hx}, \quad \frac{\partial F}{\partial u_{hy}} = 2u_{hy}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_{vx}} = 2u_{vx}, \quad \frac{\partial F}{\partial u_{vy}} = 2u_{vy}. \quad (4.20)$$

Za određivanje optičkog toka rješava se sustav od dvije Euler-Lagrangeove jednadžbe. Iz jednadžbe za horizontalnu komponentu dobiva se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_h} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_{hx}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_{hy}} &= 2(I_t + I_x u_h + I_y u_v)I_x \\ -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \{2u_{hx}\} - \lambda \frac{\partial}{\partial y} \{2u_{hy}\} &= 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

iz čega slijedi:

$$(I_t + I_x u_h + I_y u_v)I_x = \lambda \nabla^2 u_h \quad (4.22)$$

$\nabla^2 u_h$ slijedi direktno iz definicije operatora $\nabla^2 f = \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ budući da je desna strana jednaka $\frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial y^2}$.

Iz jednadžbe u vertikalnom smjeru se dobiva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u_v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_{vx}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_{vy}} &= 2 (I_t + I_x u_h + I_y u_v) I_y \\ -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \{2u_{vx}\} - \lambda \frac{\partial}{\partial y} \{2u_{vy}\} &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

iz čega slijedi:

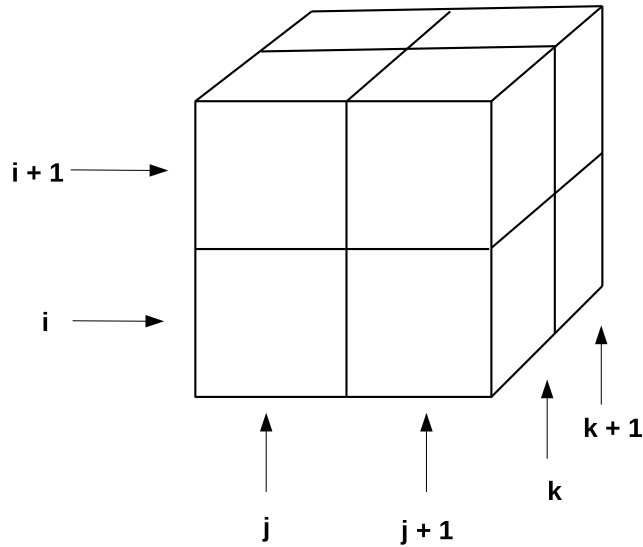
$$(I_t + I_x u_h + I_y u_v) I_y = \lambda \nabla^2 u_v. \quad (4.24)$$

Dobiven je sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} I_x^2 u_h + I_x I_y u_v &= \lambda \nabla^2 u_h - I_x I_t \\ I_x I_y u_h + I_y^2 u_v &= \lambda \nabla^2 u_v - I_y I_t \end{aligned} \quad (4.25)$$

Ono što želimo postići je minimizirati ukupnu pogrešku $E(\mathbf{u})$ nastalu zbrajanjem pogrešaka na svim slikovnim elementima. Greška kod slikovnog elementa se javlja radi odstupanja od optičkog toka okoline ili odstupanja koje nastaje u podatkovnom članu.

Da bi se moglo odrediti rješenje sustava jednadžbi potrebno je napraviti procjenu prostornih gradijenata I_x i I_y , te vremenskog gradijenta I_t . U postupku određivanja optičkog toka uvijek radimo s dvije susjedne slike. Označimo s k trenutni sliku, a s $k+1$ prvu sljedeću sliku. Budući da slike na računalu nisu u kontinuiranoj domeni gradijenti moraju biti procijenjeni. Horn i Schunck su predložili procjenu na temelju četiri točke jedne slike i korespondentne četiri iz druge slike. Promatrani slikovni elementi prikazani su na slici 4.1:



Slika 4.1: Slikovni elementi koji se promatraju u procjeni gradijenata

Izrazi na temelju koji se procijenjuju gradijenti [20]:

$$I_x \approx \frac{1}{4} \{ I_{i,j+1,k} - I_{i,j,k} + I_{i+1,j+1,k} - I_{i+1,j,k} + I_{i,j+1,k+1} - I_{i,j,k+1} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i+1,j,k+1} \}, \quad (4.26)$$

$$I_y \approx \frac{1}{4} \{ I_{i+1,j,k} - I_{i,j,k} + I_{i+1,j+1,k} - I_{i,j+1,k} + I_{i+1,j,k+1} - I_{i,j,k+1} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i,j+1,k+1} \}, \quad (4.27)$$

$$I_t \approx \frac{1}{4} \{ I_{i,j,k+1} - I_{i,j,k} + I_{i+1,j,k+1} - I_{i+1,j,k} + I_{i,j+1,k+1} - I_{i,j+1,k} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i+1,j+1,k} \}. \quad (4.28)$$

Na rubnim dijelovima slike koriste se Neumannovi rubni uvjeti. Uvjeti definiraju da su prve derivacije na rubnim dijelovima jednake nuli. Dodatni problem koji se pojavljuje je izračun Laplasijana komponenti vektora brzine u_h i u_v . Za izračun Laplasijana komponenti vektora brzine koristi se aproksimacija po uzoru na razliku Gaussovih funkcija opisanu u članku Davida Lowea [18]. Aproksimacija Laplasijana određena je razlikom lokalnog prosjeka osam susjednih vektora brzina i trenutnog vektora brzine:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_h &\approx (\bar{u}_h - u_h), \\ \nabla^2 u_v &\approx (\bar{u}_v - u_v), \end{aligned} \quad (4.29)$$

gdje su $\bar{u}_h$ i $\bar{u}_v$ lokalni prosjeci komponenti vektora brzine:

$$\begin{aligned} \bar{u}_h &\approx \frac{1}{6} (u_{h,i-1,j}^n + u_{h,i+1,j}^n + u_{h,i,j-1}^n + u_{h,i,j+1}^n) \\ &\quad + \frac{1}{12} (u_{h,i-1,j-1}^n + u_{h,i+1,j-1}^n + u_{h,i-1,j+1}^n + u_{h,i+1,j+1}^n), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_v &\approx \frac{1}{6} (u_{v,i-1,j}^n + u_{v,i+1,j}^n + u_{v,i,j-1}^n + u_{v,i,j+1}^n) \\ &\quad + \frac{1}{12} (u_{v,i-1,j-1}^n + u_{v,i+1,j-1}^n + u_{v,i-1,j+1}^n + u_{v,i+1,j+1}^n). \end{aligned} \quad (4.31)$$

U područjima na slici koja se naizgled ne kreću (tamo gdje je prostorni gradijent slike nula) optički tok biti će prosjek brzina susjednih slikovnih elemenata.

Uvrštavanjem dobivene aproksimacije i poznavanjem izraza za procjenu gradijenta funkcije intenziteta $I(x, y, t)$ slijedi sustav jednažbi:

$$\begin{aligned} I_x^2 u_h + I_x I_y u_v &= \lambda (\bar{u}_h - u_h) - I_x I_t, \\ I_x I_y u_h + I_y^2 u_v &= \lambda (\bar{u}_v - u_v) - I_y I_t. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sustav je moguće preoblikovati u oblik pogodan za iterativno traženje rješenja:

$$\begin{aligned}(\lambda + Ix^2 + Iy^2)(u_h - \bar{u}_h) &= I_x(I_x\bar{u}_h + I_y\bar{u}_v + I_t), \\(\lambda + Ix^2 + Iy^2)(u_v - \bar{u}_v) &= I_y(I_x\bar{u}_h + I_y\bar{u}_v + I_t) .\end{aligned}\tag{4.33}$$

Korištenjem iterativnog postupka Gaussa i Seidela optički tok se određuje prema izrazima:

$$\begin{aligned}u_h^{n+1} &= \bar{u}_h^n - I_x \frac{I_x\bar{u}_h^n + I_y\bar{u}_v^n + I_t}{\lambda + I_x^2 + I_y^2} \\u_v^{n+1} &= \bar{u}_v^n - I_y \frac{I_x\bar{u}_h^n + I_y\bar{u}_v^n + I_t}{\lambda + I_x^2 + I_y^2}\end{aligned}\tag{4.34}$$

Kriterij zaustavljanja postupka opisan je u potpoglavlju 4.3.5, a inicijalne vrijednosti opisane su u poglavlju 6.2.

4.3. Postupak TV-L¹

Prethodno je objašnjen postupak traženja optičkog toka primjenom postupka Horna i Schuncka te opisani problemi koji se pojavljuju. U ovom potpoglavlju biti će objašnjen pristup koji pokušava riješiti problem diskontinuiteta kako bi se mogli očuvati oštri rubovi. Najprije pogledajmo funkcional Horna i Schuncka:

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (I_t + I_x u_h + I_y u_v)^2 + \lambda(|\nabla u_h|^2 + |\nabla u_v|^2) d\Omega. \quad (4.35)$$

Podatkovni član može se zapisati i u obliku:

$$I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - I_0(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.36)$$

Izraz 4.36 zapisan je u nelinearnom obliku. Zbog toga se provodi linearizacija prvog člana $I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u})$ razvojem u Taylorov red oko $(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0)$:

$$I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0) + \nabla I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \quad (4.37)$$

Podatkovni član u ovom obliku 4.36 omogućava laganiju primjenu postupka postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila. Omogućava lakše provođenje interpolacije prilikom smanjivanja razlučivosti slike. Uvedimo supstituciju za podatkovni član:

$$\rho(\mathbf{u}) = I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - I_0(\mathbf{x}) \quad (4.38)$$

Uvrštavanjem nove formulacije podatkovnog člana Horn Schunck funkcional postaje:

$$\int_{\Omega} (\rho(\mathbf{x}))^2 + \lambda(|\nabla u_h|^2 + |\nabla u_v|^2) d\Omega. \quad (4.39)$$

Općeniti zapis dobivenog funkcionala je:

$$\int_{\Omega} \lambda\phi(\rho(\mathbf{x})) + \psi(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}, \dots) d\Omega, \quad (4.40)$$

gdje je $\phi(x)$ funkcija koja djeluje na podatkovni član te $\psi(x)$ funkcija koja djeluje na regularizacijski član. Konstanta za uravnoteživanje može biti pokraj podatkovnog ili regularizacijskog člana. Za postupak Horna i Schuncka se odabire $\phi(x) = x^2$ te $\psi(\nabla \mathbf{u}) = |\nabla \mathbf{u}|^2$.

Ako se umjesto QU norme na regularizacijskom članu uvede TV norma 4.4 te na podatkovnom članu koristi L^1 norma, tj. $\phi(x) = |x|$ i $\psi(x) = |\nabla \mathbf{u}|$, dobiva se TV- L^1 funkcional:

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \lambda|\rho(\mathbf{u})| + |\nabla \mathbf{u}| d\Omega, \quad (4.41)$$

gdje je $|\nabla \mathbf{u}| = \sqrt{|\nabla u_h|^2 + |\nabla u_v|^2}$.

Upotrebom $TV-L^1$ funkcionala 4.41 rješava se problem diskontinuiteta čije su objašnjenje i opravdanje dani su u potpoglavlju 4.4. Također kod postupka Horna i Schunka javlja se problem outliera (nisu podržani), koji je kod ovog postupka ublažen L^1 normom. Međutim ovo poboljšavanje donosi velike računske probleme budući da podatkovni i regularizacijski član nisu kontinuirano diferencijabilni. Pogledajmo Euler-Lagrangeovu jednadžbu koja se dobije za horizontalnu komponentu toka:

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0)}{\partial x} - \frac{\nabla \cdot (\nabla u_h)}{|\nabla \mathbf{u}|} = 0 \quad (4.42)$$

Pokazuje se da se rješenje jednadžbe ne može zapisati u zatvorenoj formi zbog nelinearnog člana $\frac{1}{|\nabla \mathbf{u}|}$. Nije moguće izraziti veličine koje su sadržane u nelinearnom članu jer se nalaze unutar korijena. Također za $\nabla \mathbf{u} = 0$ jednadžba nije definirana.

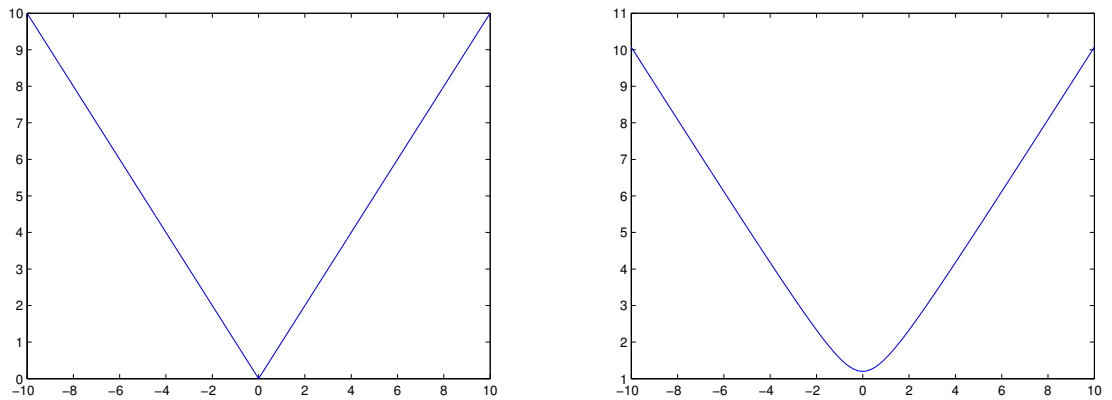
Jedan od načina pomoću kojeg se može pristupiti ovom problemu je za $\phi(x)$ i $\psi(\nabla \mathbf{u})$ odabrati aproksimacijske izraze iz članka [4]:

$$\phi_\epsilon(x) = \sqrt{x^2 + \epsilon^2}, \quad (4.43)$$

$$\psi_\epsilon(\nabla \mathbf{u}) = \sqrt{|\nabla \mathbf{u}|^2 + \epsilon^2}, \quad (4.44)$$

gdje je ϵ vrlo mala konstanta i provoditi minimizaciju dobivenog funkcionala.

Geometrijski prikaz aproksimacije za funkciju jedna varijable prikazan je na sljedećoj slici 4.2:



Slika 4.2: Aproksimacija izrazima 4.43 i 4.44. Lijeva slika nacrtana je uz $\epsilon = 0$, dok je desna uz $\epsilon = 1.2$

Aproksimacijom se postiže lagano zaglađenje oko mjesta prekida. Uvođenjem male vrijednosti ϵ još uvijek postoji problem prekida, dok uvođenje velike vrijednosti

stvara preveliku pogrešku [4] u procjeni optičkog toka čime se gubi podrška za oštre rubove. Ako se u aproksimacijski izraz podatkovnog člana uvrsti vektor brzine za koji bi podatkovni član trebao biti nula ne dobiva se nula jer ϵ stvara pogrešku. Poboljšan je problem nedefiniranog rješenja, međutim svejedno postoji nelinearni član te se rješenje ne može zapisati u zatvorenoj formi. Minimum funkcionala dobivenog korištenjem aproksimacijskih izraza može se pronaći po uzoru na originalni članak ROF [22] rješavanjem diferencijalne jednačbe postupkom najbržeg spusta (engl. *Explicit Time Marching Scheme*) opisanog u doktoratu Thomasa Pocka [21]. Rješenje izraza 4.42 pronašlo bi se korištenjem:

$$u_h^{n+1} = u_h^n - dt \left[-\nabla \cdot \left(\frac{\nabla u_h}{|\nabla u_h|_\epsilon} \right) + \frac{\partial I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0)}{\partial x} \right] \quad (4.45)$$

U ovom radu biti će opisana modernija i bolja metoda koja se bazira na algoritmu koji problem dijeli na dva dijela od kojih se svaki posebno minimizira (engl. *duality based algorithm*). Da bi se to uopće moglo primijeniti na funkcional 4.41 potrebno je uvesti konveksnu relaksaciju opisanu u doktoratu Thomasa Pocka [21].

Uvođenjem relaksacije dobiva se funkcional:

$$E_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \lambda |\rho(\mathbf{v})| + \frac{1}{2\theta} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 + |\nabla \mathbf{u}| \, d\Omega \quad (4.46)$$

Osnovna ideja konveksne relaksacije je odvajanje minimizacije podatkovnog člana od regularizacijskog člana. Zbog toga se uvodi dodatna varijabla $\mathbf{v}$ (vektorsko polje) koja predstavlja kopiju postojeće varijable $\mathbf{u}$. U podatkovni član smještamo polje $\mathbf{v}$, dok u regularizacijskom ostaje $\mathbf{u}$. Kako bi vektorska polja ostala povezana i omogućila konvergenciju uvodi se dodatni član $\frac{1}{2\theta} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$. Vrlo mala vrijednost parametra θ omogućuje da $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ budu jednaki kako bi vrijednost funkcionala bila minimalna. Posljedica relaksacije je mogućnost promatranja dobivenog funkcionala kao dva odvojena problema. Minimizacija se provodi tako da se jedna varijabla fiksira te se traži rješenje po drugoj varijabli.

Uz fiksiranu varijablu $\mathbf{v}$ podatkovni član $|\rho(\mathbf{v})|$ je konstantan te se prilikom minimizacije može zanemariti. Tom činjenicom prvi problem postaje:

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 \, d\Omega \right\}. \quad (4.47)$$

Dobiveni funkcional 4.47 u literaturi se pronalazi pod nazivom ROF [22] model nazvan prema prezimenima autora: Rudin, Osher i Fatemi. ROF model koristi se za odstranjivanje šumova na slikama i prvi je model koji koristi TV normu u varijacijskom računu. Rješenje funkcionala može se pronaći projekcijskim algoritmom koji je predložio Antonin Chambolle u radovima [8], [9] i [21].

Uz fiksiranu varijablu $\mathbf{u}$ može se zanemariti $|\nabla \mathbf{u}|$ čime se provodi minimizacija sljedećeg funkcionala:

$$\min_{\mathbf{v}} \left\{ \int_{\Omega} \lambda |\rho(\mathbf{v})| + \frac{1}{2\theta} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 d\Omega \right\}. \quad (4.48)$$

Rješenje ovog problema traži pomoću praga budući da funkcional ne ovisi o prostornim derivacijama varijable $\mathbf{v}$. U sljedećim potpoglavljima opisani su konkretni izrazi koji omogućavaju procijenu optičkog toka.

4.3.1. Rješenje prvog problema dualnog postupka TV-L1

Najprije će biti prikazano traženje rješenja za rektificirani stereo slučaj (1D) [27], a nakon toga će biti prikazan način na koji se to može generalizirati za više od jedne dimenzije (kod optičkog toka je 2D slučaj). Ono što želimo napraviti je izvesti postupak traženja rješenja u slučaju kada je optički tok u horizontalnom smjeru različit od nule, a u vertikalnom smjeru nula. Razlog traženja rješenja uz to ograničenje leži u činjenici da se za rješavanje ROF problema koristi Chambolleov algoritam čija je prvenstvena namjena za primjenu na skalarne funkcije (slika), a ne vektorsko polje. Pomoću dobivenog rješenja željeli bismo omogućiti rješavanje problema optičkog toka. Najprije se vratimo na izraz 4.36: $I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - I_0(\mathbf{x})$. Ograničimo polje pomaka da bude različito od nula samo u horizontalnom smjeru, tako da se prvi član može zapisati u obliku $I_1(\mathbf{x} + (u_x(\mathbf{x}), 0))$. Skraćeno se može drugi član zapisati samo s $I_1(\mathbf{x} + u)$. Provedimo linearizaciju koristeći razvoj u Taylorov red prvog stupnja oko točke $\mathbf{x} + u_0$:

$$I_1(\mathbf{x} + u) = I_1(\mathbf{x} + u_0) + (u - u_0)I_1^x(\mathbf{x} + u_0), \quad (4.49)$$

gdje je I_1^x derivacija slike I_1 u x smjeru, a u_0 je pomak piksela promatranog slikovnog elementa (engl. *disparity map*). Provodi se minimizacija sljedećeg funkcionala:

$$E(u) = \int_{\Omega} \lambda |I_1(\mathbf{x} + u_0) + (u - u_0)I_1^x(\mathbf{x} + u_0) - I_0(\mathbf{x})| + |\nabla u| d\Omega. \quad (4.50)$$

Uvedimo relaksaciju kojom se uvodi dodatna varijabla v , dodatni član koji povezuje varijable u i v te parametar θ koji prisiljava varijable da budu jednake. Smjestimo varijablu v u podatkovni član, a varijablu u ostavimo u regularizacijskom članu. Nakon primjene spomenutih modifikacija dobiva se funkcional:

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \lambda |\rho(v)| + \frac{1}{2\theta} (u - v)^2 + |\nabla u| d\Omega \quad (4.51)$$

Kao što je već spomenuto smisao parametra θ je omogućiti da varijable u i v budu približno jednake. Od parametra θ se zahtijeva da bude pozitivan. Primijetiti da uz

$\theta \rightarrow 0$ funkcional prelazi na oblik 4.50. Potrebno je izvesti izraze koji omogućavaju iterativno traženje minimuma fiksiranjem jedne varijable i minimizacijom po drugoj. Uz fiksiranje varijable v potrebno je minimizirati funkcional:

$$\min_u \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2\theta} (u - v)^2 + |\nabla u| d\Omega \right\} \quad (4.52)$$

Navedeni problem je ROF problem [22], a njegovo rješenje prikazano je u nastavku.

Rješenje ROF problema projekcijskim gradijentnim spustom. *Rješenje [9] dano je izrazom:*

$$u = v + \theta \nabla \cdot \mathbf{p} \quad (4.53)$$

gdje se dualna varijabla $\mathbf{p}$ pronalazi projekcijskim gradijentnim spustom ($k = 1 \dots N$):

$$\tilde{\mathbf{p}}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \frac{\tau}{\theta} [\nabla(v + \theta \nabla \cdot \mathbf{p})] \quad (4.54)$$

$$\mathbf{p}^{k+1} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}^{k+1}}{\max\{1, \|\tilde{\mathbf{p}}^{k+1}\|\}} \quad (4.55)$$

gdje je $\mathbf{p}^0 = \mathbf{0}$, konstanta $\tau \leq 1/4$, a N broj iteracija provođenja postupka.

4.3.2. Objašnjenje projekcijskog algoritma

Pogledajmo normu ukupne varijacije skalarne funkcije $u \in L^1(\Omega)$:

$$TV(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| d\Omega, \quad u \in L^1(\Omega). \quad (4.56)$$

Općenitija definicija TV norme dana je izrazom:

$$TV(u) = \max \left\{ \int_{\Omega} u (\nabla \cdot \mathbf{p}) d\Omega : \|\mathbf{p}\|_{\infty} \leq 1 \right\}, \quad (4.57)$$

gdje $\mathbf{p} \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ kontinuirano integrabilna vektorska funkcija na prostoru $\mathbb{R}^2$ ili njegovom podskupu Ω (nije nužno da bude samo na Ω), $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$. Ukupna varijacija funkcije u predstavljena je skalarnim produktom funkcije $u(x, y)$ i divergencijom vektorske funkcije $\mathbf{p}$ za koju se postiže maksimum. Maksimalni $\mathbf{p}$ zahtijeva se normom beskonačno $\|\mathbf{p}\|_{\infty}$ koja vraća $\mathbf{p}$ čija je apsolutna vrijednost najveća. Objašnjenje i opravdanje ovakve formulacije dodatno opisano je u radovima Chan [11], Pock [21], Zhu [28] i Carter [6].

Ono što želimo postići je iskoristiti teorem Gaussa i Greena kako bismo preoblikovali izraz 4.57 u:

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{p}) d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{p} d\Omega \quad (4.58)$$

Iz teorema Gaussa i Greena slijedi:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{R} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \quad (4.59)$$

uvođenjem supstitucije $\mathbf{R} = u \mathbf{p}$ slijedi:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(u \mathbf{p}) = \int_{\partial\Omega} (u \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.60)$$

Vrijedi da je $\mathbf{p}$ nula na rubnom dijelu Ω te je desna strana jednaka nuli. Na lijevom dijelu imamo divergenciju umnoška skalarne i vektorske funkcije te vrijedi:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x}(u p_1(x, y)) + \frac{\partial}{\partial y}(u p_2(x, y)) d\Omega = 0. \quad (4.61)$$

Iskorištavanjem formule za parcijalnu derivaciju umnoška dvije skalarne funkcije dobiva se:

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial p_1(x, y)}{\partial x} + u \frac{\partial p_2(x, y)}{\partial y} d\Omega = \int_{\Omega} -\frac{\partial u}{\partial x} p_1(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y} p_2(x, y) d\Omega. \quad (4.62)$$

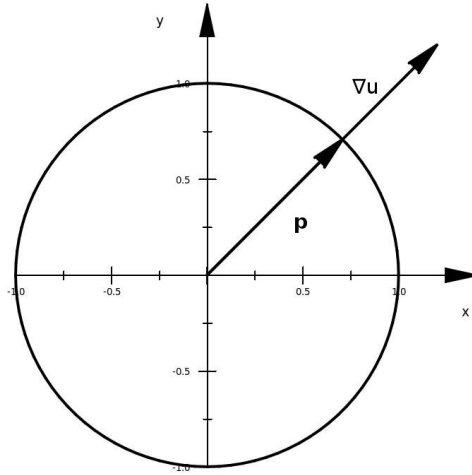
Iz dobivene jednakosti slijedi:

$$\int_{\Omega} u(\nabla \cdot \mathbf{p}) d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{p} d\Omega \quad (4.63)$$

Korištenjem dobivene jednakosti te promjenom prednaka $\mathbf{p}$ slijedi izraz za normu ukupne varijacije:

$$TV(u) = \max \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{p} d\Omega : \|\mathbf{p}\|_{\infty} \leq 1 \right\}. \quad (4.64)$$

Lagano je primjetiti da će skalarni produkt biti maksimalan onda kada su vektori ∇u i $\mathbf{p}$ paralelni. Uvjet $\|\mathbf{p}\|_{\infty} \leq 1$ također zahtjeva i da $\mathbf{p}$ bude normiran vektor ∇u . Sljedeća slika prikazuje geometrijsku reprezentaciju uvjeta maksimuma:



Slika 4.3: Položaj $\mathbf{p}$ i ∇u

Uvrštavanjem izraza 4.64 u funkcional 4.52 dobiva se:

$$\min_u \max_{\|\mathbf{p}\|_2 \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2\theta} (u - v)^2 + \mathbf{p} \cdot \nabla u \, d\Omega \right\} \quad (4.65)$$

Potrebno je provoditi minimizaciju po dvije varijable (u i $\mathbf{p}$) i trebalo bi na neki način eliminirati jednu varijablu. Ono što možemo napraviti je zamijeniti operatore minimuma i maksimuma te pronaći minimalni u za općeniti $\mathbf{p}$. Pogledajmo što bi bila Euler-Lagrangeova jednadžba po varijabli u :

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} = 0 \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{\theta} (u - v) \quad (4.67)$$

Primjetiti da je skalarni produkt vektorskog polja $\mathbf{p}$ i vektora ∇u skalarno polje:

$$\mathbf{p} \cdot \nabla u = p_1 \frac{\partial u}{\partial x} + p_2 \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = p_1, \quad \frac{\partial F}{\partial u_y} = p_2 \quad (4.69)$$

Uz korištenje dobivenih parcijalnih derivacija i definicije operatora divergencije vektorskog polja 4.9 dobiva se jednadžba:

$$u = v + \theta \nabla \cdot \mathbf{p}. \quad (4.70)$$

Uvrštavanjem dobivene jednadžbe u funkcional 4.65 dobije se eliminacija varijable u , čime se problem pretvara u traženje maksimalnog $\mathbf{p}$. Problem maksimizacije može biti pretvoren u problem minimizacije traženjem minimalnog negativnog $\mathbf{p}$:

$$\min_{\|\mathbf{p}\|_2 \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} -\mathbf{p} \cdot \nabla v + \frac{\theta}{2} (\nabla \cdot \mathbf{p})^2 d\Omega \right\}. \quad (4.71)$$

Najprije raspišimo izraze koji se nalaze ispod integrala:

$$\mathbf{p} \cdot \nabla v = p_1 \frac{\partial u}{\partial x} + p_2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.72)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{p} = \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y}. \quad (4.73)$$

Potrebno je riješiti sustav od dvije Euler-Lagrangeove jednadžbe:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p_{1x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial p_{1y}} = 0, \quad (4.74)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_2} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p_{2x}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial p_{2y}} = 0. \quad (4.75)$$

Parcijalne derivacije po komponentama:

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial p_2} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p_{1x}} = \theta \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial p_{1y}} = \theta \frac{\partial^2 p_1}{\partial y^2}, \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial p_{2x}} = \theta \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial p_{2y}} = \theta \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2}. \quad (4.78)$$

Uvrštavanjem dobivenih parcijalnih derivacija i zbrajanjem jednadžbi slijedi jedna Euler-Lagrangeova jednadžba:

$$-\nabla(v + \theta \nabla \cdot \mathbf{p}) = 0, \quad \|\mathbf{p}\|_{\infty} \leq 1. \quad (4.79)$$

Primijetiti da ovako dobivena Euler-Lagrangeova jednadžba nigdje nema potencijalnih dijeljenja s nulom čime je uklonjen problem nedefiniranog rješenja.

Za određivanje $\mathbf{p}$ koristi se projekcijski gradijentni spust te se $\mathbf{p}$ određuje iterativno prema izrazima 4.54 i 4.55:

$$\tilde{\mathbf{p}}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \frac{\tau}{\theta} [\nabla(v + \theta \nabla \cdot \mathbf{p})], \quad (4.80)$$

$$\mathbf{p}^{k+1} = \frac{\tilde{\mathbf{p}}^{k+1}}{\max\{1, \|\tilde{\mathbf{p}}^{k+1}\|\}}. \quad (4.81)$$

Parametar τ definira brzinu konvergencije i u praksi se pokazalo [8] da se najbrža konvergencija postiže uz $\tau \leq \frac{1}{4}$. Izraz 4.80 predstavlja gradijentni spust. Gradijentni spust se naziva projekcijski jer se u svakom koraku dualna varijabla $\mathbf{p}$ projicira na jedinični disk.

Prema Chambolleovom članku [8] operator divergencije dan je izrazom:

$$(\nabla \cdot \mathbf{p})_{i,j} = \begin{cases} p_1(i, j) - p_1(i-1, j) & \text{ako } 1 < i < N, \\ p_1(i, j), & \text{ako } i = 1, \\ -p_1(i-1, j) & \text{ako } i = N, \end{cases} \quad (4.82)$$

$$+ \begin{cases} p_2(i, j) - p_2(i, j-1) & \text{ako } 1 < j < N, \\ p_2(i, j), & \text{ako } j = 1, \\ -p_2(i, j-1) & \text{ako } j = N \end{cases}$$

Gdje je $(\nabla \cdot \mathbf{p})_{i,j}$ vrijednost koju poprima operator divergencije na poziciji slikovnog elementa (i, j) , a $p_1(i, j)$ i $p_2(i, j)$ komponente vektorskog polja $\mathbf{p}$.

Chambolle je u [8] predložio još jedan pristup traženu dualne varijable $\mathbf{p}$. Dualna varijabla se pronalazi prema izrazu:

$$\mathbf{p}^{k+1} = \frac{\mathbf{p}^n + \tau/\lambda(\nabla v + \lambda \nabla \cdot \mathbf{p}^n)}{1 + \tau/\lambda|\nabla v + \lambda \nabla \cdot \mathbf{p}^n|} \quad (4.83)$$

Prikazano rješenje se naziva Chambolleov algoritam. Ne radi se projekcija na jedinični disk kao u prethodnom slučaju. U praksi [21] se pokazalo da prikazani prvi pristup (projekcijski algoritam) ima bržu konvergenciju od Chambolleovog algoritma. Bilo koji od opisanih Chambolleovih postupaka može se primjeniti samo na skalarne funkcije te je za procijenu optičkog toka potrebno napraviti prilagodbu. Pristup koji se odabire je dva puta provesti rješavanje ROF problema (posebno za horizontalni i vertikalni smjer). Radi lakše implementacije na računalu rješenje ROF problema projekcijskim gradijentnim (analogno i za drugo rješenje) spustom može se preoblikovati u:

$$\begin{cases} u = v + \theta \nabla \cdot \mathbf{p} \\ \tilde{p}^{k+1} = p^k + \frac{\tau}{\theta} \nabla u \\ p^{k+1} = \frac{1}{\max(1, \|\tilde{\mathbf{p}}^{k+1}\|)} \end{cases} \quad (4.84)$$

4.3.3. Rješenje drugog problema dualnog postupka TV-L1

Uz fiksiranu varijablu u minimiza se funkcional:

$$\min_v \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2\theta} (u - v)^2 + \lambda |\rho(v)| \right\} \quad (4.85)$$

Minimizacijom funkcionala 4.85 dobiva se Euler-Lagrangeova jednadžba:

$$v - u + \lambda \theta \frac{\rho(v)}{|\rho(v)|} I_1^x(\mathbf{x} + u_0) = 0 \quad (4.86)$$

Primijetiti da ovako dobivena Euler-Lagrangeova jednadžba ne ovisi o prostornim derivacijama varijable v (nema $\frac{\partial v}{\partial x}$ ili $\frac{\partial v}{\partial y}$). Izraz $\rho(v)/|\rho(v)|$ predstavlja funkciju $\text{sgn}[\rho(v)]$ koja određuje predznak koji poprima $\rho(v)$, a I_1^x je gradijent koji se već određen. Posljedica je mogućnost rješavanja jednadžbe metodom eksplicitnog testiranja funkcije $\rho(v)$. Potrebno je pogledati koju vrijednost poprima varijabla v ako $\rho(v) = 0$, $\rho(v) < 0$ ili $\rho(v) > 0$. Odabirom konstante θ zahtijevalo se da varijable u i v budu približno jednake što znači da $\rho(v)$ može biti opisan preko $\rho(u)$. Najprije pogledajmo definiciju izraza $\rho(u)$ i $\rho(v)$:

$$\rho(u) = I_1(\mathbf{x} + u_0) + (u - u_0)I_1^x(\mathbf{x} + u_0) - I_0(\mathbf{x}), \quad (4.87)$$

$$\rho(v) = I_1(\mathbf{x} + u_0) + (v - u_0)I_1^x(\mathbf{x} + u_0) - I_0(\mathbf{x}), \quad (4.88)$$

početni pomak u_0 isti je u oba slučaja budući da se zahtijeva da je v kopija u . Primijetiti da je konstantni dio u oba izraza jednak i označimo ga s:

$$I_{\rho}(\mathbf{x}) = I_1(\mathbf{x} + u_0) - I_0(\mathbf{x}) - u_0 I_1^x(\mathbf{x} + u_0) \quad (4.89)$$

Uz korištenje dobivenog izraza prethodne jednadžbe mogu se zapisati pomoću:

$$\rho(u) = I_{\rho}(\mathbf{x}) + u I_1^x(\mathbf{x} + u_0), \quad (4.90)$$

$$\rho(v) = I_{\rho}(\mathbf{x}) + v I_1^x(\mathbf{x} + u_0). \quad (4.91)$$

Sada možemo izvesti izraz koji opisuje odnos između $\rho(u)$ i $\rho(v)$:

$$\rho(v) = \rho(u) - u I_1^x(\mathbf{x} + u_0) + v I_1^x(\mathbf{x} + u_0). \quad (4.92)$$

1. $\rho(v) > 0$

$$\rho(u) - u I_1^x(\mathbf{x} + u_0) + v I_1^x(\mathbf{x} + u_0) > 0 \quad (4.93)$$

Iz izraza 4.86 slijedi:

$$v = u - \lambda \theta I_1^x(\mathbf{x} + u_0). \quad (4.94)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza u 4.93 dobiva se uvjet

$$\rho(u) > \lambda \theta (I_1^x(\mathbf{x} + u_0))^2. \quad (4.95)$$

2. $\rho(v) < 0$

$$\rho(u) - u I_1^x(\mathbf{x} + u_0) + v I_1^x(\mathbf{x} + u_0) < 0 \quad (4.96)$$

Iz izraza 4.86 slijedi:

$$v = u + \lambda \theta I_1^x(\mathbf{x} + u_0). \quad (4.97)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza u 4.96 dobiva se uvjet

$$\rho(u) < -\lambda \theta (I_1^x(\mathbf{x} + u_0))^2 \quad (4.98)$$

3. $\rho(v) = 0$

$$\rho(u) = (u - v) I_1^x(\mathbf{x} + u_0) \quad (4.99)$$

Iskorištavanjem dobivene jednadžbe slijedi rješenje:

$$v = u - \frac{\rho(u)}{I_1^x(\mathbf{x} + u_0)}. \quad (4.100)$$

Da bi jednakost vrijedila $\rho(u)$ mora zadovoljavati uvjet:

$$-\lambda \theta (I_1^x(\mathbf{x} + u_0))^2 \leq \rho(u) \leq \lambda \theta (I_1^x(\mathbf{x} + u_0))^2 \quad (4.101)$$

Konačno rješenje dobiveno metodom eksplicitnog testiranja vrijednosti funkcije $\rho(v)$:

$$v = u + \begin{cases} \lambda \theta I_1^x & \text{ako } \rho(u) < -\lambda \theta (I_1^x)^2, \\ -\lambda \theta I_1^x & \text{ako } \rho(u) > \lambda \theta (I_1^x)^2, \\ -\rho(u)/I_1^x & \text{ako } |\rho(u)| \leq \lambda \theta (I_1^x)^2. \end{cases} \quad (4.102)$$

4.3.4. Generalizacija za više od jedne dimenzije

U postupku određivanja optičkog toka radi se poljem pomaka koje ide u dvije dimenzije (2D). Nelinearni dio podatkovnog člana linearizira se razvojem u Taylorov red prvog stupnja oko $(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0)$ čime podatkovni član postaje.

$$\rho(\mathbf{u}) = I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0) + \nabla I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) - I_0(\mathbf{x}) \quad (4.103)$$

Generalizacijom izraza 4.51 dobiva se funkcional:

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_d |\nabla u_d| + \frac{1}{2\theta} \sum_d (u_d - v_d)^2 + \lambda |\rho(\mathbf{v})| \right\} d\Omega \quad (4.104)$$

Uvođenjem više dimenzije postupak minimizacije malo je složeniji. Provodi se ista metoda kao i kod 1D slučaja samo što je sada potrebno isti postupak [21] provoditi za svaki $d \in \{1, 2, \dots, N\}$ posebno.

Postupak traženja rješenja:

1. Za svaki d i fiksirani v_d pronaći minimum funkcionala:

$$\min_{u_d} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u_d| + \frac{1}{2\theta} (u_d - v_d)^2 d\Omega \right\} \quad (4.105)$$

Rješenje se traži Chambolleovim projekcijskim algoritmom [8]. Razlika je u tome što je sada konstanta $\tau = 1/(2N)$, gdje je N dimenzija prostora.

2. Za fiksirani $\mathbf{u}$ pronaći minimum funkcionala:

$$\min_{\mathbf{v}} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2\theta} \sum_d (u_d - v_d)^2 + \lambda |\rho(\mathbf{v})| d\Omega \right\} \quad (4.106)$$

Generalizirano rješenje dobiveno metodom eksplicitnog testiranja vrijednosti funkcije $\rho(v)$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \begin{cases} \lambda\theta \nabla I_1 & \text{ako } \rho(\mathbf{u}) < -\lambda\theta \|\nabla I_1\|^2, \\ -\lambda\theta \nabla I_1 & \text{ako } \rho(\mathbf{u}) > \lambda\theta \|\nabla I_1\|^2, \\ -\rho(u) \nabla I_1 / \|\nabla I_1\| & \text{ako } |\rho(\mathbf{u})| \leq \lambda\theta \|\nabla I_1\|^2. \end{cases} \quad (4.107)$$

Ostaje još problem procjene prostornih gradijenata. U članku [24] predloženo je korištenje gradijentnog operatora koji uzima sredinu razlike dvaju susjednih slikovnih elemenata uz korištenje Neumannovih rubnih uvjeta (na rubovima su derivacije nula):

$$\frac{\partial}{\partial x} I_1(i, j) = \begin{cases} \frac{I_1(i+1, j) - I_1(i-1, j)}{2} & \text{ako } 1 < i < N_x \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (4.108)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} I_1(i, j) = \begin{cases} \frac{I_1(i, j+1) - I_1(i, j-1)}{2} & \text{ako } 1 < j < N_y \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (4.109)$$

gdje je N_x broj slikovnih elemenata u retku, a N_y broj slikovnih elemenata u stupcu.

Također potrebno je i izračunati gradijente komponenti optičkog toka u x i y smjeru. Prikladni način je korištenje unazadnih razlika uz korištenje Neumannovih rubnih uvjeta:

$$\frac{\partial}{\partial x} u(i, j) = \begin{cases} u(i+1, j) - u(i, j) & \text{ako } 1 \leq i < N_x \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (4.110)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(i, j) = \begin{cases} u(i, j+1) - u(i, j) & \text{ako } 1 \leq j < N_y \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad (4.111)$$

4.3.5. Kriterij zaustavljanja minimizacije

Isto kao i kod postupka Horna i Schucka ukupna pogreška koja se pojavljuje je zbroj pogrešaka na pojedinim slikovnim elementima. Pogreška koja se dobiva je nešto manja budući da se primjenjuju norme koje manje kažnjavaju odstupanje u podatkovnom i regularizacijskom članu.

Postupak se provodi iterativno te želimo osigurati da je prosječna promjena apsolutne vrijednosti optičkih tokova slikovnog elementa trenutne i prethodne iteracije manja ili jednaka maksimalnoj dopuštenoj ϵ . Ovisno koliko precizno želimo procijeniti optički tok. Uvjet zaustavljanja dan je izrazom:

$$\frac{1}{N_x N_y} \sum_{i,j} \left(u_h^{k+1}(i, j) - u_h^k(i, j) \right)^2 + \left(u_v^{k+1}(i, j) - u_v^k(i, j) \right)^2 < \epsilon, \quad (4.112)$$

gdje je N_x broj slikovnih elemenata u retku, N_y broj slikovnih elemenata u stupcu, a ϵ maksimalna dopuštena promjena. Dodatno želimo još ograničiti broj iteracija provođenja postupka. Postupak će završiti ako je proveden predviđeni broj iteracija ili je prosječna razlika apsolutnih vrijednosti vektora toka manja od maksimalno dopuštene.

4.4. Usporedba QU i TV norme

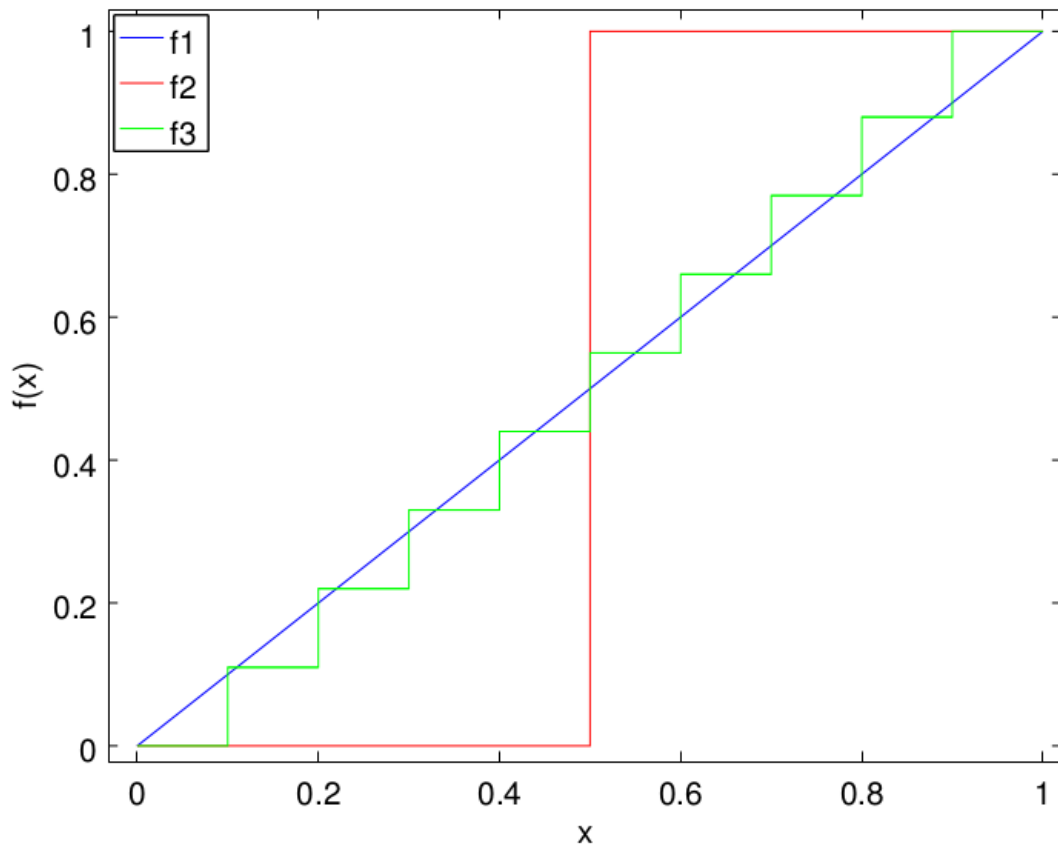
QU norma diskretne funkcije $f(x)$:

$$QU[f(x)] = \sum_1^n (x_i - x_{i-1})^2. \quad (4.113)$$

TV norma diskretne funkcije $f(x)$:

$$TV[f(x)] = \sum_1^n |x_i - x_{i-1}|. \quad (4.114)$$

Pogledajmo sljedeće tri funkcije: $f_1(x)$, $f_2(x)$ i $f_3(x)$ prikazane na slici 4.4.



Slika 4.4: Funkcije za usporedbu

U tablici 4.1 prikaze su vrijednosti koje poprimaju norme na intervalu $[0, 1]$. Tablica je dobivena uzimanjem $n = 100$ uzoraka iz intervala $[0, 1]$ koji su korišteni u računanju vrijednosti normi. Zadovoljeni su rubni uvjeti $f(0) = 0.0$, $f(1) = 1.0$. Sve funkcije su monotone na promatranom intervalu.

Funkcija	TV norma	QU norma
$f_1(x)$	1.0	0.01
$f_2(x)$	1.0	1.0
$f_3(x)$	1.0	0.11

Tablica 4.1: Vrijednosti normi

Valja primijetiti da se vrijednost TV norme ne mijenja niti za jednu funkciju dok QU norma daje manje vrijednosti kako funkcija postaje sve bolje i bolje glatka. Upravo radi ove karakteristike TV norma omogućava bolji rad sa diskontinuitetima, što je karakteristika oštih rubova na slikama (iznosi prostornih gradijenata na tim mjestima su jako veliki).

Do sada je objašnjeno na koji način TV-L1 model dobro radi s diskontinuitetima. U sljedećem potpoglavlju biti će objašnjeno na koji način omogućiti algoritmu procjene optičkog toka da bolje radi s velikim pomacima korištenjem metode postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila (engl. *Coarse-to-fine approach*).

4.5. Postupak postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila

Postupak postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila [1] (engl. *coarse-to-fine approach*) koristi se u algoritmima procjene optičkog toka da bi se podržala mogućnost većeg pomaka i poboljšala točnost. Prilikom traženja gustog optičkog toka na raspolaganju su dvije slike I_k i I_{k+1} . Od ulaznih slika napravi se piramida slika $s = \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$ odnosno prostor mjerila postupkom iterativnog smanjivanje slike (engl. *downsampling*). Kreće se od originalne slike i svaka sljedeća skalira se za konstantni faktor $\eta \in [0, 1]$. Prije nego što se slika skalira napravi se glaćenje Gaussovim filtrom koje je po definiciji konvolucija slike s Gaussovom funkcijom:

$$G(x, y, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (4.115)$$

standardne devijacije σ . Standardna devijacija ovisi o faktoru η i računa se prema izrazu:

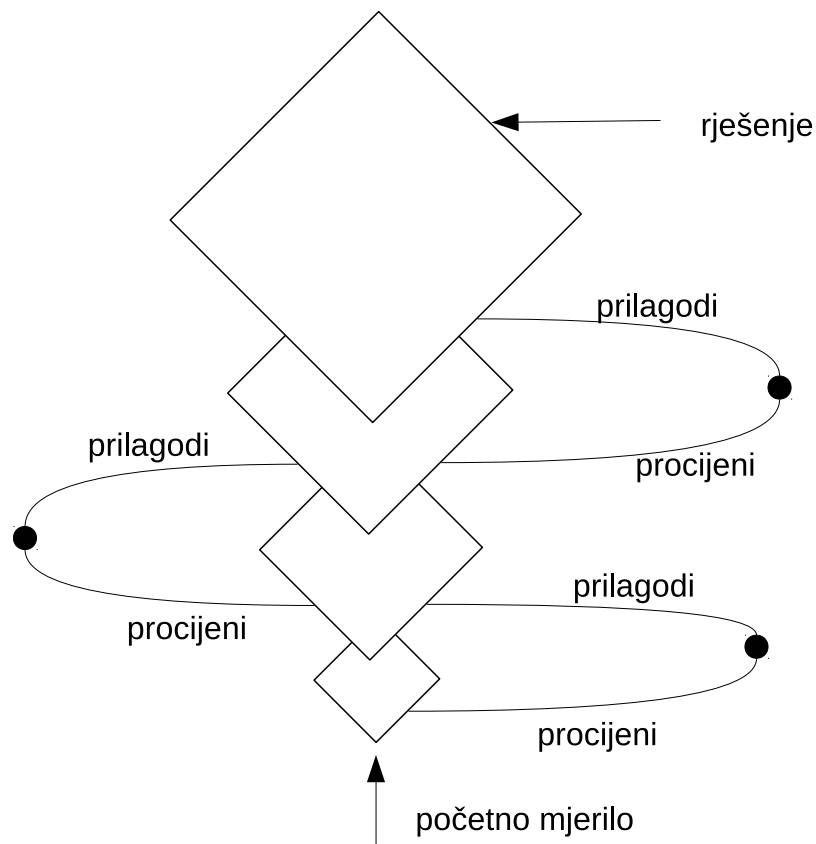
$$\sigma(\eta) = \sigma_0 \sqrt{\eta^{-2} - 1}. \quad (4.116)$$

Za faktor skaliranja blizu 1 stvara se previše mjerila što jako usporava sam postupak procjene optičkog toka, dok se za faktor blizu 0 generira premali broj mjerila i nema

osjetnog poboljšanja u odnosu na klasični postupak. Također standardna devijacija σ ne smije biti previše velika jer slika postaje previše zaglađena čime se gubi potencijalno korisna informacija. Parametar σ_0 određuje se empirijski za slijed slika na kojem se radi procjena optičkog toka.

U području računalnog vida za primjenu Gaussovog filtra na sliku često se koristi konvolucijska matrica. Sam postupak glađenja tada se temelji na računanju težinske sume koeficijenata maske i slikovnih elemenata koje maska pokriva. Time se dobiva ubrzanje budući da se koeficijenti samo jednom izračunaju. Nakon primjene konvolucije, slike je potrebno interpolirati bikubičnom interpolacijom.

Provodi se procjena optičkog toka od najmanje slike prema originalnoj. Postupak se temelji na činjenici da će veliki pomak na smanjenoj slici biti mali čime će se omogućiti njegova ispravna detekcija. Također potrebno je definirati kolika je minimalna veličina slike (prema člancima [27], [20] prikladno je uzeti 16×16 slikovnih elemenata). Na svakoj sljedećoj slici veće veličine detektiraju se finiji pomaci sve dok se ne dođe do originalne slike. Slika 4.5 prikazuje postupak postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila:



Slika 4.5: Postupak postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila

Nakon pomaka na sliku veće dimenzije potrebno je prilagoditi vektorsko polje (korak prilagodi na prethodnoj slici) $\mathbf{u}$ za tu dimenziju slike prema izrazu:

$$\mathbf{u}^{s-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}^s(\eta \mathbf{x}), \quad s = \{1, 2, \dots, s-1\} \quad (4.117)$$

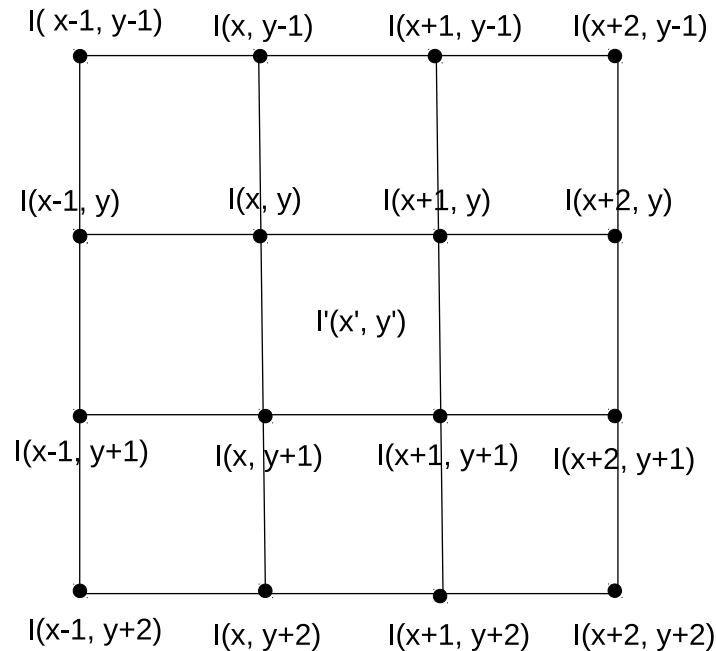
i provesti bikubičnu interpolaciju. Opisani postupak naziva se naduzorkovanje (engl. *upsampling*). Da bi se ispravno mogli detektirati veliki pomaci mora vrijediti da je apsolutna vrijednost najvećeg pomaka na slici manja ili jednaka $\frac{1}{\eta} N_s - 1$, gdje je N_s broj generiranih mjerila. Potrebno je smanjiti iznos velikog pomaka do maksimalnog pomaka od jednog slikovnog elementa. Nedostatak koji se pojavljuje je mogućnost zanemarivanja kretanja jako malih objekata zbog njihovih nestajanja na slikama s grubljom rezolucijom. Ako se parametar η ne pogodi veliki pomaci na manjim slikama možda neće biti ispravno detektirani. To se može dogoditi u slučaju kada je η premali. Omjer između dimenzija susjednih slika biti će prevelik te postupak procjene optičkog toka neće biti u mogućnosti detektirati taj veliki pomak.

U svrhu dodatnog poboljšanja stabilnosti postupka na pojedinom mjerilu postupak možemo provoditi nekoliko puta (engl. *warping*). Time se poboljšava greška koju daje podatkovni član, budući da se $I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0)$ i $\nabla I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0)$ računaju više puta, a umjesto $\mathbf{u}_0$ se koristi optički tok dobiven u prethodnom izračunu (početno je $\mathbf{u}_0 = 0$). Opisano poboljšanje jako utječe na brzinu izvođenja postupka te je potrebno pronaći ravnotežu između efikasnosti i točnosti.

4.6. Bikubična interpolacija

Prilikom smanjivanja ili uvećavanja slike dolazi do problema određivanja vrijednosti koju poprimaju slikovni elementi nove slike. Koordinate slikovnog elementa nove slike više nisu cjelobrojne te nije moguće odrediti intenzitet koji slikovni element prima. Potencijalni kandidati su svi slikovni elementi o njegovoj okolini. Međutim lošim izborom intenziteta jako se gubi na kvaliteti slike. Da bi se preciznije odredio intenzitet, slikovni elementi u okolini promatranog se interpoliraju. Moderni postupci procijene optičkog toka za rješavanje problema interpolacije koriste bikubičnu interpolaciju. Njezina primjena je u slučajevima kada brzina nije od jako velikog značaja. Iz dosadašnjih razmatranja postupaka temeljenih na varijacijskom računu lagano je zaključiti da se procjena optičkog toka ne može provoditi u realnom vremenu bez da se napravi paralelizacija.

Za razliku od bilinearne interpolacije koja gleda 4 (2×2) slikovna elementa kod bikubne interpolacije promatra se 16 (4×4) slikovnih elemenata. Potrebno je provesti kubnu interpolaciju u dvije dimenzije. Promatrani slikovni elementi čine matricu dimenzija 4×4 :



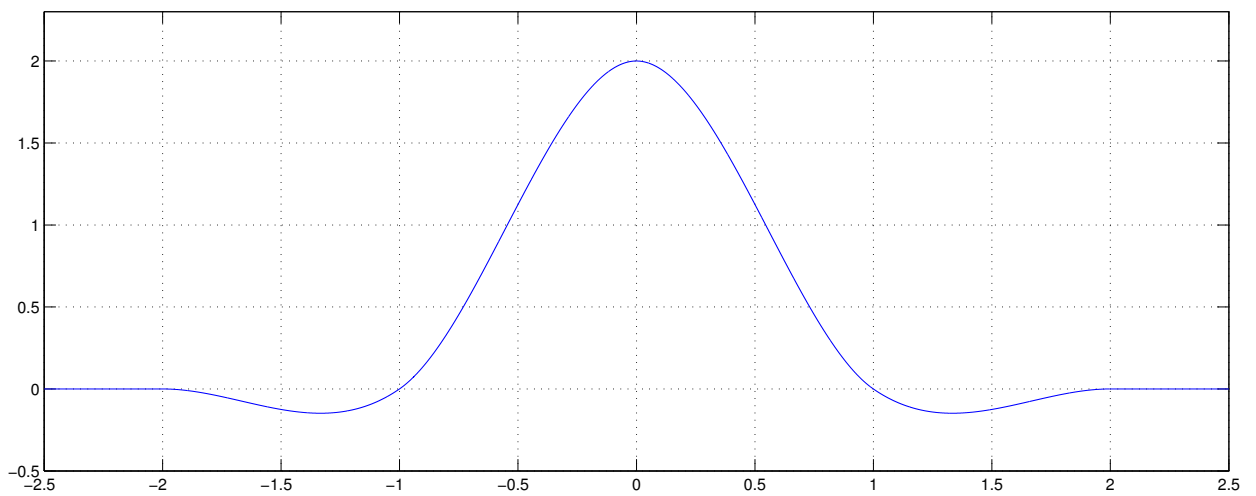
Slika 4.6: Prikaz problema interpolacije

Poznati su intenziteti u okolnim slikovnim elementima. Traži se intenzitet u slikovnom elementu (x', y') korištenjem bikubične interpolacije. Kubičnu interpolaciju

moguće je provesti na više načina [5] te će u ovom radu biti opisana interpolacija uz korištenje Catmull-Rom [5], [7] kubičnog interpolacijskog splajna (engl. *spline*). Catmull-Rom interpolacijski splajn zadan je pomoću polinoma trećeg stupnja zadanog po dijelovima:

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} 3 \cdot |x|^3 - 5 \cdot |x|^2 + 2, & \text{za } 0 \leq |x| < 1 \\ -|x|^3 + 5 \cdot |x|^2 - 8 \cdot |x| + 4 & \text{za } 1 \leq |x| < 2 \\ 0 & \text{za } |x| \geq 2 \end{cases} \quad (4.118)$$

Na slici 4.7 prikazan je opisani polinom:



Slika 4.7: Catmull-Rom interpolacijski polinom

Pseudokod određivanja intenziteta slikovnog elementa (x', y') na slici $I(x, y)$ korištenjem bikubične interpolacije:

Pseudokod 4.1: Bikubična interpolacija

```

1  BICUBIC_INTERPOLATION(I, x', y')
2  q ← 0
3  FOR j = 0 TO 3
4    y ← ⌊y'⌋ + j - 1
5    p ← 0
6    FOR i = 0 TO 3
7      x ← ⌊x'⌋ + i - 1
8      p ← p + I(x, y) * P(x' - x)
9    END FOR
10   q ← q + p * P(y' - y)
11 END FOR
12 RETURN q
13 END BICUBIC_INTERPOLATION

```

Varijable x i y određuju koji slikovni element slike $I(x, y)$ se razmatra (vrijednosti moraju biti cjelobrojne zato se koristi najveće cijelo). $y' - y$ i $x' - x$ definiraju udaljenost promatranog slikovnog elementa od onoga koji se interpolira u horizontalnom i vertikalnom smjeru. Bikubična interpolacija provodi se u dva koraka. Najprije se četiri puta provodi kubna interpolacija u horizontalnom smjeru za svaki redak slike 4.6 posebno. U drugom koraku provodi se kubična interpolacija prethodno dobivenih vrijednosti u vertikalnom smjeru. Napisani pseudokod bikubične interpolacije slikovnog elementa (x', y') primjenjiv je na bilo koju vrstu kubičnog interpolacijskog polinoma.

Prilikom postupka iterativnog smanjivanja slike bikubična interpolacija se koristi kako bi se odredile razine svjetlosnih intenziteta smanjene slike. Nakon što se provede računanje optičkog toka na trenutnom mjerilu provodi se postupak prilagodbe optičkog toka mjerila trenutne razine za mjerilo finije razine. Bikubična interpolacija omogućava određivanje vektora brzine koji se dodjeljuju slikovnim elementima u mjerilu finije razine. Slika 4.8 prikazuje usporedbu interpolacija:

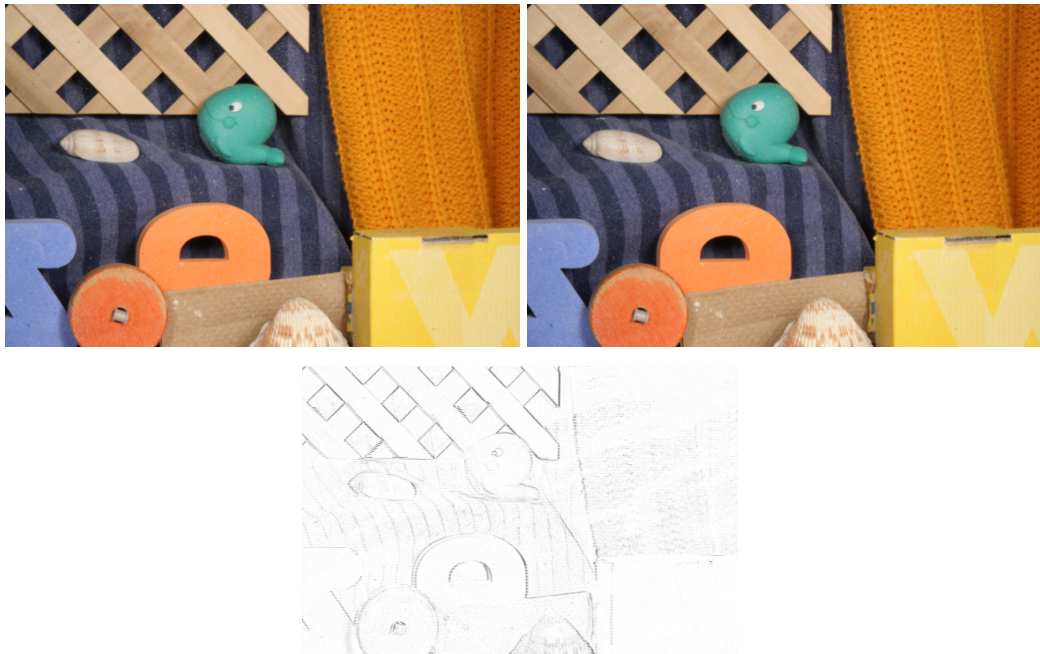


Slika 4.8: Usporedba interpolacija: gornja lijeva slika dobivena je najbližim susjedom, gornja desna bilinearnom interpolacijom dok je donja dobivena bikubičnom interpolacijom.

4.7. Podjela slike na teksturni i strukturni dio

Podatkovni član $I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}) - I_0(\mathbf{x})$ zahtijeva da vrijednosti intenziteta ostaju nepromijenjene prilikom pomaka na drugu poziciju. Međutim u stvarnosti to baš nije slučaj [25] jer dolazi do promjene osvjetljenja scene, pojavi se odsjaj ili sjena te intenzitet više nije konstantan.

Na raspolaganju je par slika I_0 i I_1 te ground truth optički tok (više o ground truthu u poglavlju 5). U svrhu prikaza neželjenih efekata, slike se međusobno poravnavaju korištenjem ground trutha te se prikazuje razlika intenziteta poravnatih slika. Rezultate možemo vidjeti na slici 4.7:



Slika 4.9: Prve dvije slike su međusobno poravnate uz korištenje priloženog ground trutha. Treća slika prikazuje razliku intenziteta. Područja koja su malo jače izražena predstavljaju promjenu intenziteta nastalu zbog šuma, sjene ili odsjaja.

Da bi se umanjio utjecaj neželjenih efekata jedan od načina pomoću kojeg se može pristupiti problemu je korištenje strukturno-teksturne dekompozicije. Procjena optičkog toka provodi se na teksturnoj komponenti slike. Osnovna ideja koja stoji iza toga je da strukturnu komponentu slike čine glavni veliki objekti, a teksturni dio fini detalji prema članku [2]. Strukturno-teksturna dekompozicija može biti postignuta na različite načine opisane u [2]. Pristupi koji se spominju su: $TV-L^2$ (ROF), $TV-L^1$, TV-Hilbert, TV-G (Meyer). Prema nazivima postupaka TV se odnosi na regularizacijski

član, dok se drugi dio imena odnosi na podatkovni član. Razlika među postupcima dekompozicije je u korištenju norme koja djeluje na podatkovni član.

U ovom radu razmatran je ROF problem te će taj postupak biti korištenje za provođenje strukturno-teksturne dekompozicije, a njegovo rješenje dano izrazom 4.55. Funkcional koji je potrebno minimizirati:

$$\min_{I_S} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla I_S| + \frac{1}{2\theta} (I_S - I)^2 d\Omega \right\} \quad (4.119)$$

Strukturna komponenta slike prema članku [25] dobiva se provođenjem projekcijskog gradijentnog spusta 100 iteracija i korištenjem $\theta = 0.125$. Na Middlebury ispitnim slikama postupak se izvršava ispod jedne sekunde budući da postupak nije potrebno provoditi na više mjerila, već samo za originalnu dimenziju slike. Uz poznatu strukturnu komponentu, teksturna komponenta se jednostavno dobiva uzimanjem razlike originalne slike i dobivene strukturne slike:

$$I_T(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) - I_S(\mathbf{x}) \quad (4.120)$$

Razlog provedbe procjene optičkog toka na teksturnoj slici je što se sjene i drugi neželjeni efekti pojavljuju samo na strukturnoj slici. Spomenuti postupak moguće je primijeniti i na postupak Horna i Schuncka i na TV-L1 bilo uz korištenje postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila ili ne. Dobivena teksturna slika ulazi u postupak postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila. Dodatno poboljšanje koje se uvodi je primjena filtriranja vektora optičkog toka nakon provedbe jedne iteracije postupka procjene optičkog toka. U radovima [10], [23] i [25] predlaže se korištenje median filtera. Median filter promatra okolinu trenutnog vektora te za horizontalnu i vertikalnu komponentu brzine postavi vrijednost koja je median promatranih. U članku [10] najbolji rezultati su se pokazali uz promatranje 3×3 susjedstva, dok se u članku [23] preferira promatranje 5×5 susjedstva.

5. Prikaz optičkog toka i korišteni ispitni skupovi

Ovo poglavlje daje opis nekih od načina prikaza optičkog toka. Prikazan je najčešće korišteni način pomoću kotača boja (engl. *color wheel*) te prikaz pomoću strujnica vektorskog polja. Objašnjen je pojam ground trutha te opisani korišteni ispitni skupovi.

5.1. Strujnice vektorskog polja

Gusti optički tok predstavlja opis kretanja svih slikovnih elemenata promatrane slike. Pogled na dobivene brojeve čovjeku ne omogućava laganu vizualizaciju u kojem se smjeru slikovni elementi kreću i koliko je pomak. Jedan od načina na koji se to može lagano vizualizirati je prikaz strujnica vektorskog polja pomoću strelica. Duljina strelice označava iznos pomaka. Slika 5.1 prikazuje vizualizaciju pomoću strelica:



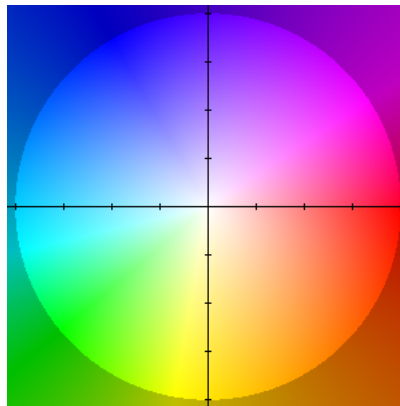
Slika 5.1: Strujnice vektorskog polja

Smjer i iznos pomaka određeni su korištenjem izraza:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}| &= \sqrt{u_h^2 + u_v^2} \\ \tan \theta &= \frac{u_v}{u_h} \end{aligned} \quad (5.1)$$

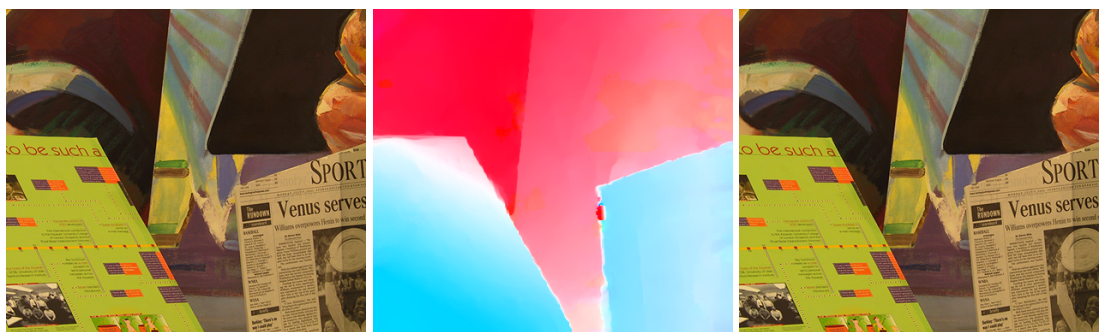
5.2. Kodiranje bojama

Optički tok se radi lakšeg prikaza često kodira bojama. Osnovna ideja je prikazati smjerove pomaka različitim tonovima boje (engl. *hue*), dok se iznos pomaka (apsolutna vrijednost vektora) prikazuje različitim zasićenjem (engl. *saturation*). Slika 5.2 prikazuje prikaz pomoću tzv. kotača boja (engl. *color wheel*):



Slika 5.2: Kotač boja

Na slici 5.2 je prikazan koordinatni sustav čije su koordinatne osi u_h i u_v (komponente vektora brzine). Zasićenje se mijenja u ovisnosti o apsolutnoj vrijednosti vektora brzine (manji iznos znači manje zasićenje). Iznosi zasićenja određuju se u odnosu na minimalni i maksimalni iznos pojedine komponente brzine. Slika 5.2 prikazuje optički tok predstavljen pomoću različitih tonova i zasićenja boje:



Slika 5.3: Prikaz optičkog toka pomoću kotača boja ispitnog slijeda Venus

Slika u sredini prikazuje gusti optički tok kodiran bojama, a lijeva i desna slika prikazuju dva okvira (slike) na temelju kojih je napravljena procjena optičkog toka. Crveni dio prikazuje kretanje udesno, dok plavi dio pokazuje kretanje u lijevo.

5.3. Ground-truth

Uvođenjem novog poboljšanja u postupak procjene optičkog toka potrebno je na neki odrediti koliko se poboljšanje dobilo u odnosu na postojeći postupak. Rezultat provedbe postupka je gusti optički tok (vektori brzina). Da bi se moglo utvrditi koliko su ti vektori precizni mora postojati referentni optički tok u odnosu koji se radi usporedba. Referentni optički tok koji služi za ispitivanje dobivenog gustog optičkog toka naziva se (engl. *ground-truth*). Postupak određivanja referentnog optičkog toka vrlo je zahtjevan posao. Postupak opisan u [3] zasniva se na postavljanju scene koja omogućava jako mala pomicanja pomoću sustava kontroliranog računalom. Postavljeni sustav omogućava pomak za maksimalno dva slikovna elementa. Sve površine scene oboje se fluorescentnim bojama koje su približno iste pravim bojama. Korištenjem vrlo kvalitetne kamere uzimaju se parovi slika dobiveni slikanjem scene obasjane ambijentnim i ultraljubičastim (UV) osvjetljenjem. Nakon toga se scena pomakne i ponovi postupak uzimanja slika. Budući da je fluorescentna boja jako vidljiva pod UV osvjetljenjem objekti scene mogu biti precizno poravnati. Ground-truth je izračunat praćenjem slikovnih elemenata prozora fiksne veličine na slikama dobivenim pod djelovanjem UV osvjetljenja. U [3] koristi se prozor veličine 15×15 slikovnih elemenata. Slike visoke razlučivosti dobivene pod ambijentnim osvjetljenjem skaliraju se 20 puta da bi se dobili ispitni sljedovi čime se postiže da je veličina promatranog prozora ima promjer manji od 2 slikovna elementa. Kombinacijom UV osvjetljenja, skaliranja slike i praćenja prozora fiksne veličine izračunat je referentni optički tok.

5.4. Ispitni skupovi

Optički tok jedno je od područja računalnog vida koje je od svojih početaka imalo bazu za određivanje točnosti implementiranih postupaka. Razvojem modernih postupaka procjene optičkog toka potrebno je konstantno usavršavanje baze ground truthova. U današnje vrijeme u centru pažnje su Middlebury [3] i KITTI [12], [13] baze testnih slijedova i pripadnih ground-truthova. U ovom radu biti će korištena Middlebury baza podataka. Zapisivanje vektora optičkih tokova nije standardizirano te je za korištenje

željene baze potrebno preuzeti biblioteku koja omogućava čitanje zapisanih optičkih tokova i pretvaranje u oblik pogodan za provođenje evaluacije. Middlebury baza sastoji se od osam javno dostupnih ground truthova i pripadnih parova susjednih okvira (slika) na kojim se provodi evaluacija. Nazivi ispitnih sljedova prikazani su u tablici 5.1.

Javno dostupni ground-truthovi	
Dimetrodon	RubberWhale
Grove2	Urban2
Grove3	Urban3
Hydrangea	Venus

Tablica 5.1: Popis ispitnih sljedova s priloženim ground truthovima

Uz ispitne sljedove za koje je poznat ground-truth moguće je skinuti i sljedove koji su korišteni u Middlebury online evaluatoru. Za njih nisu javno dostupni ground-truthovi. Nazivi sljedova prikazani su u tablici 5.2.

Ispitni sljedovi online evaluatora	
Dimetrodon	RubberWhale
Army	Backyard
BasketBall	DumpTruck
Evergreen	Groove
Mequon	Scheffera
Teddy	Urban
Wooden	Yosemite

Tablica 5.2: Popis ispitnih sljedova bez priloženih ground truthova

Razlučivosti ispitnih sljedova pripadaju jednoj od u tri kategorije: 640×480 , 584×388 ili 420×360 . Većina ispitnih sljedova koristi razlučivost 640×480 . Ground-truthovi su zapisani u .flo formatu. Radi se o formatu koji u datoteku direktno zapisuje float vrijednosti vektora brzina uz zaglavlje datoteke. U zaglavlju se najprije zapiše ključna riječ *PIEH*, a nakon toga broj slikovnih elemenata u retku i stupcu. Ostatak datoteke sadrži float vrijednosti parova horizontalnog i vertikalnog optičkog toka za svaki slikovni element. Veličine datoteka .flo formata kreću se od 2 - 3 MB, a ovise o razlučivosti slika kojima ground-truth pripada.

6. Programska izvedba i vanjske biblioteke

Ovo poglavlje daje pregled pseudokodova implementiranih postupaka te organizaciju programskog koda. Za potrebe vrednovanja preuzeto je i prilagođeno nekoliko programskih kodova. Programski kodovi za provođenje klasičnog i piramidalnog (postupno poboljšanje u prostoru mjerila) postupka Horna i Schunck preuzeti su iz IPOL članka [20], osnovni TV-L1 postupak preuzet je iz IPOL članka [24]. Poboljšani TV-L1 postupak koji se temelji na strukturno-teksturnoj dekompoziciji implementiran je na temelju preuzetog TV-L1 programskog koda uz provedbu potrebnih modifikacija. Rezultat prilagodbe je programska biblioteka koja sadrži sve postupke koji su opisani u ovom diplomskom radu. Biblioteka se može koristiti jednostavnim uključivanjem zaglavlja u program uz pregled dostupne dokumentacije.

Da bi se moglo čitati ground truthove pojedinih baza ispitnih sljedova potrebno je preuzeti biblioteku koja omogućava njihovo čitanje i pretvaranje u oblik pogodan za provođenje evaluacije. Middlebury baza uz sljedove i ground truthove pruža biblioteku za čitanje ground truthova za Matlab i programski jezik C++.

Za potrebe vizualizacije preuzeta je programska biblioteka koja omogućava kodiranje vektora brzina uz korištenje kotača boja (engl. *color wheel*). Prikaz vektora brzina pomoću strujnica napravljen je u Matlab-u uz korištenje ugrađene funkcije *quiver*.

Za potrebe dobivanje rezultata vrednovanja bilo je potrebno razviti programski sustav koji omogućava vrednovanje promatranih postupaka procjene optičkog toka po različitim kriterijima i tipovima pogrešaka. Implementirani programski sustav omogućava:

1. Usporedbu iznosa pogrešaka implementiranih postupaka.
2. Optimiranje hiperparametara.
3. Prikaz grafičke ovisnosti hiperparametara o pogreškama.

4. Prikaz grafičke ovisnosti uvjeta zaustavljanja minimizacije o pogreškama.
5. Usporedbu vremena izvršavanja procjene optičkog toka o izboru hiperparametara i uvjeta zaustavljanja.
6. Traženje hiperparametara koji daju najmanju pogrešku na cijeloj ispitnoj bazi, a ne samo pojedinim slijedovima.

Pogreške prema kojima se provodi evaluacija opisane su u poglavlju 7. U nastavku je najprije objašnjena struktura programskog koda te prikazani pseudokodovi implementiranih metoda uz potrebna objašnjenja.

6.1. Struktura programskog koda

Programski kod je organiziran u dva dijela. Jedan dio zadužen je za procjenu optičkog toka i sadrži implementacije svih postupaka opisanih u poglavlju 4. Drugi dio je zadužen za provođenje evaluacije implementiranih postupaka uz korištenje ground-trutha te vizualizaciju dobivenih vektora optičkog toka za njihovo lakše razumijevanje.

6.1.1. Sustav za procjenu optičkog toka

Implementirane postupke procjene optičkog toka: postupak Horna i Schuncka, TV-L1 i poboljšani TV-L1 moguće je koristiti upotrebom razvijene biblioteke *OpticalFlowLib*. Uz implementacije klasičnih postupaka moguće je koristiti i implementacije koje rade procjenu optičkog toka u prostoru mjerila. Biblioteka se može koristiti jednostavnim uključivanjem datoteke zaglavlja. Biblioteka se sastoji od jezgrenog (engl. *core*) dijela koji sadrži implementacije bikubične interpolacije, metoda za normalizaciju slike, različitih implementacija gradijentnih operatora te metoda za provođenje iterativne metode smanjivanja slike i korištenje rubnih uvjeta. Drugi dio biblioteke čine implementacije glavnih metoda čiji su pseudokodovi dani u nastavku.

Postupci su implementirani u programskom jeziku C. Da bi se korisnicima olakšalo korištenje implementiranih postupaka prilikom prevođenja dijela programskog koda zaduženog za procjenu optičkog toka za svaki od postupaka nastaje poseban program. Programi koriste vanjsku biblioteku *iio* za učitavanja i spremanje slika različitih formata. Biblioteka omogućava učitavanje slika u obliku decimalnih brojeva te pretvaranje slika iz RGB u vrijednosti sivih razina (engl. *Gray scale*). Navedeno svojstvo izuzetno je korisno za procjenu optičkog toka budući da je potrebna visoka preciznost

što se samo promatranjem cijelih vrijednosti svih razina ne bi postiglo. Biblioteka sadrži i metode koje omogućavaju spremanje vektora optičkog toka u *.flo* formatu.

6.1.2. Sustav za evaluaciju i vizualizaciju gustog optičkog toka

Sustav za evaluaciju sastoji se od podsustava koji računa pogreške na temelju vektora optičkih tokova dobivenih postupkom procijene optičkog toka te ground-trutha. Podržana su računanja dva tipa pogreške: srednja kutna pogreška te srednja apsolutna pogreška koje su objašnjenje u poglavlju 7. Podsustav za računanje pogrešaka napisan je u programskom jeziku C++. Za optimiranja hiperparametara te provođenje testiranja prema ostalim kriterijama napisana je skripta *eval.py* u skriptnom jeziku Python. Skripta omogućava provođenje optimiranja parametara za svaki od implementiranih postupaka. Prilikom optimiranja hiperparametara za trenutni skup hiperparametara poziva se tražena implementacija postupka procijene optičkog toka koja zapisuje rezultate u *.flo* datoteku. Nakon toga poziva se podsustav za računanje pogreške koji izračuna tražene tipove pogrešaka i svoje rezultate predaje skripti u kojoj se poziva. Skripta dalje obrađuje dobivene podatke. Za grafički prikaz podataka dobivenih evaluacijom razvijena je skripta *plot.py*.

Sustav za evaluaciju koristi nekoliko vanjskih biblioteka:

1. *imageLib*
2. *flowIO*
3. *colorFlow*

Biblioteke *imageLib* i *flowIO* koriste se u podsustavu za provođenje evaluacije. Biblioteka *imageLib* još je jedna biblioteka koja omogućava učitavanje različitih formata slika. Biblioteka *flowIO* omogućava učitavanje i zapisivanje vektora optičkih tokova u *.flo* formatu i ovisi o biblioteci *imageLib* budući da koristi njezine strukture za pohranu učitanih optičkih tokova.

Biblioteka *colorFlow* ovisi o biblioteci *imageLib* i koristi se za vizualizaciju vektora optičkih toka uz korištenje kotača boja (engl. *color wheel*).

6.2. Klasičan postupak Horna i Schuncka

Najprije je dan pseudokod metode koja provodi klasičan postupak Horna i Schuncka prema originalnim izrazima za procjenu vremenskih i prostornih gradijenata i lokalnih prosjeka iz članka [15].

Pseudokod 6.1: Klasični postupak Horna i Schuncka

```
1  HORN_SCHUNCK_CLASSIC( $I_0, I_1, \lambda, N_{iter}, \epsilon$ )
2    Izračunaj prostorne i vremenske gradijente  $I_x, I_y, I_t$ 
3     $u_h \leftarrow 0$ 
4     $u_v \leftarrow 0$ 
5     $n \leftarrow 0$ 
6    WHILE  $n < N_{iter}$  &&  $uvjet\_zaustavljanja > \epsilon$ 
7      Izračunaj lokalne prosjeke  $\bar{u}_h, \bar{u}_v$ 
8       $u_h \leftarrow \bar{u}_h - I_x \frac{I_x \bar{u}_h + I_y \bar{u}_v + I_t}{\lambda + I_x^2 + I_y^2}$ 
9       $u_v \leftarrow \bar{u}_v - I_y \frac{I_x \bar{u}_h + I_y \bar{u}_v + I_t}{\lambda + I_x^2 + I_y^2}$ 
10     Izračunaj kriterij zaustavljanja
11      $n \leftarrow n + 1$ 
12   END WHILE
13   RETURN  $\mathbf{u} = (u_h, u_v)$ 
14 END HORN_SCHUNCK_CLASSIC
```

Metoda na ulaz dobiva par slika za koje se traži optički tok te parametre koji se koriste: regularizacijski parametar, maksimalni broj iteracija i željeni prag zaustavljanja. Postupak kreće inicijalizacijom vektora horizontalne i vertikalne komponente optičkog toka te broja iteracija na nulu. Gradijenti slike računaju se samo jednom i to se obavi prije provođenja iterativnog postupka. U svakoj iteraciji klasičnog postupka Horna i Schuncka osvježavaju se vektori horizontalne i vertikalne komponente optičkog toka na temelju prosjeka okolnih vektora i prethodno izračunati prostornih i vremenskih gradijenata slike. Kriterij zaustavljanja predstavlja prosječnu promjenu tokova trenutne i prethodne iteracije koja se izračunava prema izrazu 4.112 te maksimalni dozvoljeni broj iteracija. Klasični postupak Horna i Schuncka vrlo je jednostavan za implementaciju.

6.3. Postupak Horna i Schuncka u prostoru mjerila

Postupak Horna i Schuncka u prostoru mjerila u odnosu na klasičan postupak uvodi novu metodu koja pokreće generiranje prostora mjerila te provodi procijenu optičkog toka od grubljih prema finijim mjerilima. Na isti način kao i kod TV-L1 postupka

potrebno je podatkovni član zapisati u obliku 4.36 pogodnom za provedbu u prostoru mjerila. Metoda koja generira prostor mjerila te pokreće procijenu optičkog toka na pojedinom mjerilu prikazana je u nastavku.

Pseudokod 6.2: Postupak Horna i Schuncka u prostoru mjerila

```

1  HORN_SCHUNCK_COASE_TO_FINE ( $I_0, I_1, \eta, N_{iter}, \epsilon, \lambda, N_{warps}$ )
2  Normaliziraj slike od 0 do 255
3  Napravi početno glađenje Gaussovim filtrom
4  Stvori prostor mjerila  $I^S$  uz korištenje  $\eta$ 
5   $\mathbf{u}^{N_{SCALES}-1} \leftarrow (0, 0)$ 
6  FOR  $s \leftarrow N_{SCALES} - 1$  TO 0
7    HORN_SCHUNCK ( $I_0, I_1, N_{iter}, \epsilon, \lambda, N_{warps}$ )
8    IF  $s > 0$ 
9       $\mathbf{u}^{s-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}^s(\eta \mathbf{x})$ 
10   END IF
11 END FOR
12 END HORN_SCHUNCK_COASE_TO_FINE

```

Još je potrebno izmjeniti metodu koja računa optički tok na jednom mjerilu. Pseudokod je dan u nastavku. Metoda je preuzeta iz članka [20].

Pseudokod 6.3: Postupak Horna i Schuncka u prostoru mjerila

```

1  HORN_SCHUNCK ( $I_0, I_1, \eta, N_{iter}, \epsilon, \lambda, N_{warps}$ )
2  FOR  $n \leftarrow 1$  TO  $N_{warps}$ 
3    Izračunaj  $I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})), \nabla I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$  uz korištenje bikubične
4    interpolacije
5     $u_h^n \leftarrow u_h$ 
6     $u_v^n \leftarrow u_v$ 
7     $r \leftarrow 0$ 
8    WHILE  $r < N_{iter}$  && uvjet_zaustavljanja  $> \epsilon$ 
9      Izračunaj lokalne prosjeke komponenti toka  $\bar{u}_h, \bar{u}_v$ 
10      $u_h \leftarrow (1 - w) + w \frac{(I_0 - I_1 + I_1^x u_h^n - I_1^y (u_v - u_v^n)) I_1^n + \lambda \bar{u}_h}{I_1^{2,x} + \lambda}$ 
11      $u_v \leftarrow (1 - w) + w \frac{(I_0 - I_1 - I_1^x (u_h - u_h^n) + I_1^y u_v^n) I_1^y + \lambda \bar{u}_v}{I_1^{2,y} + \lambda}$ 
12     Izračunaj uvjet zaustavljanja
13      $r \leftarrow r + 1$ 
14   END WHILE
15 END FOR
16 END HORN_SCHUNCK

```

Zbog primjene u prostoru mjerila bilo je potrebno prilagoditi podatkovni član. Posljedica je potreba za izmjenom izraza za osvježavanje komponenti vektora optičkog toka. Parametar w je parametar koji omogućava stabilnost iterativnog postupka i prema [20] se postavlja na 1.9.

6.4. Postupak TV-L1 u prostoru mjerila

Postupak $TV-L^1$ rastavlja se u dvije zasebne metode. Jedna metoda radi procjenu optičkog toka na jednom mjerilu, dok druga omogućava primjenu postupka postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila. Najprije je prikazana metoda koja radi procjenu optičkog toka na jednom mjerilu.

Pseudokod 6.4: TV-L1 postupak na jednom mjerilu

```

1  TV-L1_FLOW( $I_0, I_1, \mathbf{u}, N_{iter}, \epsilon, \alpha, \theta, \tau, N_{warps}$ )
2     $p_1 \leftarrow (0, 0)$ 
3     $p_2 \leftarrow (0, 0)$ 
4    FOR  $w \leftarrow 1$  TO  $N_{warps}$ 
5      Izračunaj  $I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})), \nabla I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$  uz korištenje bikubične
6      interpolacije
7       $n \leftarrow 0$ 
8      WHILE  $n < N_{iter}$  && uvjet_zaustavljanja  $> \epsilon$ 
9         $\mathbf{v} \leftarrow TH(\mathbf{u}_0, \mathbf{u})$ 
10        $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{v} + \theta div(\mathbf{p})$ 
11        $\mathbf{p} \leftarrow \frac{\mathbf{p} + \tau / \theta \nabla \mathbf{u}}{1 + \tau / \theta |\nabla \mathbf{u}|}$ 
12       Izračunaj kriterij zaustavljanja
13        $n \leftarrow n + 1$ 
14     END WHILE
15   END FOR
16 END TV-L1_FLOW

```

Druga metoda omogućava provedbu postupka postupnog poboljšanja optičkog toka u prostoru mjerila i dana je pseudokodom u nastavku.

Pseudokod 6.5: TV-L1 postupak u prostoru mjerila

```

1  TV-L1_COASE_TO_FINE( $I_0, I_1, \eta, N_{iter}, \epsilon, \lambda, \theta, \tau, N_{warps}$ )
2    Normaliziraj slike od 0 do 255
3    Napravi početno glaćenje Gaussovom filtrom
4    Stvori prostor mjerila  $I^S$  uz korištenje  $\eta$ 
5     $\mathbf{u}^{N_{SCALES}-1} \leftarrow (0, 0)$ 
6    FOR  $s \leftarrow N_{SCALES} - 1$  TO 0
7      TV-L1_FLOW( $I_0, I_1, N_{iter}, \epsilon, \lambda, \theta, \tau, N_{warps}$ )
8      IF  $s > 0$ 
9         $\mathbf{u}^{s-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}^s(\eta \mathbf{x})$ 
10     END IF
11   END FOR
12 END TV-L1_COASE_TO_FINE

```

$TV-L^1$ postupak na ulaz dobiva par slika na temelju kojih se traži gusti optčki tok. Dobiven par slika najprije se normalizira u rasponu od 0 do 255 da bi se uklonili

utjecaji lošeg kontrasta. Nakon toga se generira prostor mjerila korištenjem Gaussovog filtra i iterativnog postupka smanjivanja slike. Uz generiran prostor mjerila potrebno je za svako mjerilo procijeniti optički tok te nakon procjene prilagoditi za mjerilo niže razine. Postupak procijene optičkog toka na jednom mjerilu baziran je dualnom TV- L^1 postupku. Optički tok se procijenjuje korištenjem Chambolleovog algoritma za rješavanje ROF problema te postupka eksplicitnog testiranja vrijednosti funkcije $\rho(v)$ označenog s $TH(\cdot)$. Metoda kreće inicijalizacijom dualnih varijabli $\mathbf{p}_1$ i $\mathbf{p}_2$ na $(0, 0)$. Na jednom mjerilu procjena optičkog toka provodi se više puta, a broj ponavljanja definiran je parameterom N_{warps} . Parametar N_{warps} također definira koliko puta se računaju članovi $I(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0)$ i $\nabla I(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0)$. Svaka procjena optičkog toka provodi se do maksimalnog broja iteracija ili do ispunjenja uvjeta prosječne apsolutne razlike optičkog toka slikovnih elemenata koja označava kraj minimizacije.

6.5. Poboljšani postupak TV-L1 u prostoru mjerila

Da bi se objasnio poboljšani TV- L^1 najprije je potrebno objasniti metodu koja traži median promatranih vektora brzina te metodu koja provodi strukturno-teksturnu dekompoziciju ulaznih slika.

Pseudokod 6.6: Median filter

```

1  MEDIAN_FILTER(array, size, k)
2    i, j, l, m, x
3    l = 0, m = size - 1
4    WHILE l < m
5      x = array[k]
6      i = l, j = m
7      DO
8        WHILE (array[i] < x) i++
9        WHILE (array[j] > x) j--
10       IF (i <= j)
11         SWAP(array[i], array[j])
12         i++, j--
13       WHILE (i <= j)
14         IF (j < k) l = i
15         IF (k < i) m = j
16     END WHILE
17     RETURN array[k]
18 END MEDIAN_FILTER

```

Metoda prima polje elemenata u kojem se traži median, veličinu polja, te indeks središnjeg elementa promatranog polja. Dobiveno polje biti će sortirano od najmanjeg

prema najvećem elementu te će metoda vratiti element koji se nalazi u sredini polja, a taj element odgovara medianu dobivenih elemenata. Strukturno teksturna dekompozicija postignuta je uz korištenje rješenja za minimizaciju ROF postupka. Na raspolažanju je Chambolleov projekcijski algoritam opisan u potpoglavlju 4.3.1. Pseudokod poboljšanog TV-L1 postupka gotovo je identičan regularnom postupku. Razlika je u korištenju median filtera te predobradi slika u kojoj se provodi drugačija normalizacija slika i strukturno-teksturna dekompozicija. Slike je potrebno normalizirati u interval $[-1, 1]$. U nastavku su dani pseudokodovi metoda poboljšanog TV- L^1 postupka. Najprije je prikazana metoda koja provodi procijenu optičkog toka na jednom mjerilu.

Pseudokod 6.7: Poboljšani TV-L1 postupak na jednom mjerilu

```

1  TV-L1_FLOW_IMPROVED ( $I_0, I_1, \mathbf{u}, N_{iter}, \epsilon, \alpha, \theta, \tau, N_{warps}$ )
2     $p_1 \leftarrow (0, 0)$ 
3     $p_2 \leftarrow (0, 0)$ 
4    FOR  $w \leftarrow 1$  TO  $N_{warps}$ 
5      Izračunaj  $I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})), \nabla I_1(\mathbf{x} + \mathbf{u}_0(\mathbf{x}))$  uz korištenje bikubične
6      interpolacije
7       $n \leftarrow 0$ 
8      WHILE  $n < N_{iter}$  && uvjet_zaustavljanja  $> \epsilon$ 
9         $\mathbf{v} \leftarrow TH(\mathbf{u}_0, \mathbf{u})$ 
10        $\mathbf{u} \leftarrow \mathbf{v} + \theta div(\mathbf{p})$ 
11        $\mathbf{p} \leftarrow \frac{\mathbf{p} + \tau / \theta \nabla \mathbf{u}}{1 + \tau / \theta |\nabla \mathbf{u}|}$ 
12       Provedi median filter
13       Izračunaj kriterij zaustavljanja
14        $n \leftarrow n + 1$ 
15     END WHILE
16   END FOR
17 END TV-L1_FLOW

```

Druga metoda provodi procijenu optičkog toka u prostoru mjerila.

Pseudokod 6.8: Poboljšani TV-L1 postupak u prostoru mjerila

```

1  TV-L1_IMPROVED_COASE_TO_FINE ( $I_0, I_1, \eta, N_{iter}, \epsilon, \lambda, \theta, \tau, N_{warps}$ )
2    Normaliziraj slike od -1 do 1
3    Napravi strukturno-teksturnu dekompoziciju
4    Napravi početno glaćenje Gausovim filtrom
5    Stvori prostor mjerila  $I^S$  uz korištenje  $\eta$ 
6     $\mathbf{u}^{N_{SCALES}-1} \leftarrow (0, 0)$ 
7    FOR  $s \leftarrow N_{SCALES} - 1$  TO 0
8      TV-L1_FLOW_IMPROVED ( $I_0, I_1, N_{iter}, \epsilon, \lambda, \theta, \tau, N_{warps}$ )
9      IF  $s > 0$ 
10        $\mathbf{u}^{s-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta} \mathbf{u}^s(\eta \mathbf{x})$ 
11     END IF
12   END FOR
13 END TV-L1_IMPROVED_COASE_TO_FINE

```

Strukturno-teksturna dekompozicija se postiže provođenjem 100 iteracija Chambolleovog projekcijskog algoritma 4.3.1 uz korištenje parametra $\theta = 0.125$ prema članku [25].

6.6. Popis parametara

- λ je regularizacijski parametar. Omogućava uravnoteživanje podatkovnog i regularizacijskog člana. Zahtijeva glatkoću vektorskog polja.
- ϵ je parametar koji označava maksimalnu dozvoljenu prosječnu razliku apsolutnih vrijednosti vektora brzine trenutne i prethodne iteracije. Mora biti zadovoljen definirani iznos da bi se zaustavio postupak minimizacije. Postavljanje parametra na nižu vrijednost zahtijeva provođenje više iteracija da bi se postigla željena preciznost. Naziva se i prag zaustavljanja. Uobičajeno se postavlja na 0.0001.
- θ je parametar koji se koristi kod TV- L^1 i poboljšanog TV- L^1 postupka. Omogućava da vektorska polja u i v budu jednaka. Manja vrijednost prisiljava da razlika vektorskih polja bude čim manja.
- η je parametar koji se koristi kod iterativnog smanjivanja slike. $\eta \in (0, 1)$ i definira koji je odnos trenutne i sljedeće slike. Uobičajeno se postavlja na 0.5 čime se postiže da je svaka sljedeća slika duplo manja od prethodne.
- τ je parametar koji se koristi kod TV- L^1 postupka i definira brzinu konvergencije projekcijskog algoritma. Uobičajeno se postavlja na ≤ 0.25 .
- N_{scales} broj generirani mjerila generiranih postupkom iterativnog smanjivanja slike. Ovisi o parametru η . Određuje se automatski prema veličini slike.
- N_{warps} je parametar koji definira koliko puta se ponavlja postupak procjene optičkog toka na pojedinom mjerilu. Jako utječe na brzinu izvođenja postupka. Uobičajeno se postavlja na 5.
- N_{iter} je broj iteracija izvođenja postupka procjene optičkog toka.

7. Eksperimentalni rezultati

Ovo poglavlje daje opis korištenih kriterija prema kojima je mjerena uspješnost implementiranih postupka procijene optičkog toka. Detaljna analiza provedena je za svaki od implementiranih postupaka. Prikazani su dobiveni eksperimentalni rezultati te je dana njihova ocjena. Eksperimentalni rezultati razvrstani su u nekoliko kategorija koje redom slijede u nastavku poglavlja.

7.1. Kriteriji uspješnosti postupaka

Uspješnost implementiranih postupaka ispitana je prema vremenu izvršavanja te dva tipa pogrešaka. Prije definiranja konkretnih izraza za pogreške prebacimo vektore optičkog toka u 3D koordinatni sustav. Označimo vektor procijenjenog optičkog toka sa $\mathbf{u} = (u_h \ u_v \ 1.0)$ te vektor referentnog optičkog toka (ground-truth) sa $\mathbf{u}_{gt} = (u_{gh} \ u_{gv} \ 1.0)$. Prilikom vrednovanja postupaka procijene optičkog toka najviše se koristi srednja kutna pogreška (engl. *Average Angular Error*) dana izrazom:

$$AAE := \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_x} \arccos \left(\frac{\mathbf{u}(i, j) \cdot \mathbf{u}_{gt}(i, j)}{|\mathbf{u}(i, j)| |\mathbf{u}_{gt}(i, j)|} \right) \quad (7.1)$$

Razlog prebacivanja vektora u 3D prostor je izbjegavanje dijeljenja s nulom. Pogreška prikazuje prosječni kut između vektora procijenjenog optičkog toka i ground-trutha. Pogreška je izražena u stupnjevima.

Drugi tip pogreške koji će biti korištenje je srednja apsolutna pogreška (engl. *Average End-Point Error*) dana izrazom:

$$EPE := \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i=1}^{N_y} \sum_{j=1}^{N_x} |\mathbf{u}(i, j) - \mathbf{u}_{gt}(i, j)|. \quad (7.2)$$

Srednja apsolutna pogreška izražena je u slikovnim elementima i pokazuje za koliko slikovnih elemenata postupak u prosjeku griješi na jednom slikovnom elementu.

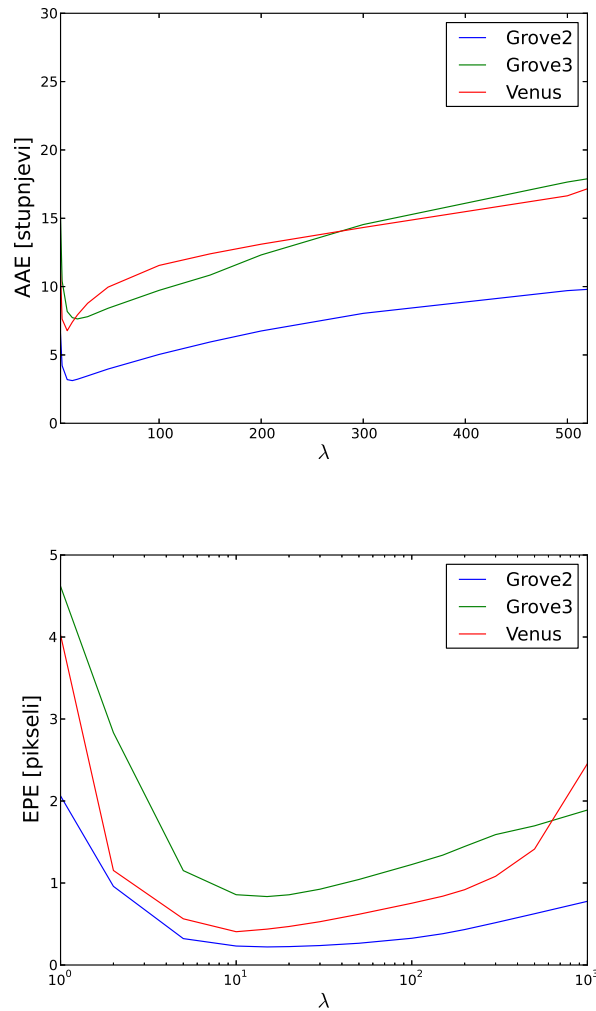
7.2. Optimiranje hiperparametara u prostoru mjerila

U procesu optimiranja hiperparametara postupaka pronađeni su parametri koji daju najmanje pogreške na pojedinom ispitnom slijedu te parametri koji daju najmanje pogreške primjenom na sve ispitne sljedove.

7.2.1. Postupak Horna i Schuncka

U svrhu dobivanja eksperimentalnih rezultata korišteni su sljedeći parametri: $N_{warps} = 5$, $N_{scales} = 5$, $\epsilon = 0.0001$, $\eta = 0.65$, $N_{iter} = 300$.

Slika 7.1 prikazuju ovisnost srednje kutne i srednje apsolutne pogreške o hiperparametru λ za tri različita ispitna slijeda.



Slika 7.1: HS: Ovisnost EPE i AAE o parametru λ

Iz priloženih grafova je vidljivo da se idealna vrijednost hiperparametra λ kod postupka Horna i Schuncka kreće od 5 do 40, a ovisi o ispitnom slijedu. λ određuje glatkoću vektorskog polja. Na slici 7.1 vidljivo je da za male vrijednosti λ vektorsko polje preslabo zaglađeno te je greška dosta velika, dok se za preveliki λ postaje previše zaglađeno te pogreška opet počinje rasti.

U tablici 7.3 prikazane su vrijednosti srednjih apsolutnih i kutnih pogrešaka dobivenih za najbolje hiperparametre za svaki od ispitnih slijedova.

Slijed	λ	AAE [stupnjevi]	EPE [pikseli]
Dimetrodon	13	2.6357	0.1431
Grove2	15	3.1311	0.2213
Grove3	14	7.5735	0.8420
Hydrangea	17	3.1992	0.3056
RubberWhale	11	7.5671	0.2311
Urban2	15	5.5149	0.5806
Urban3	9	8.8571	0.9427
Venus	9	6.7562	0.4072

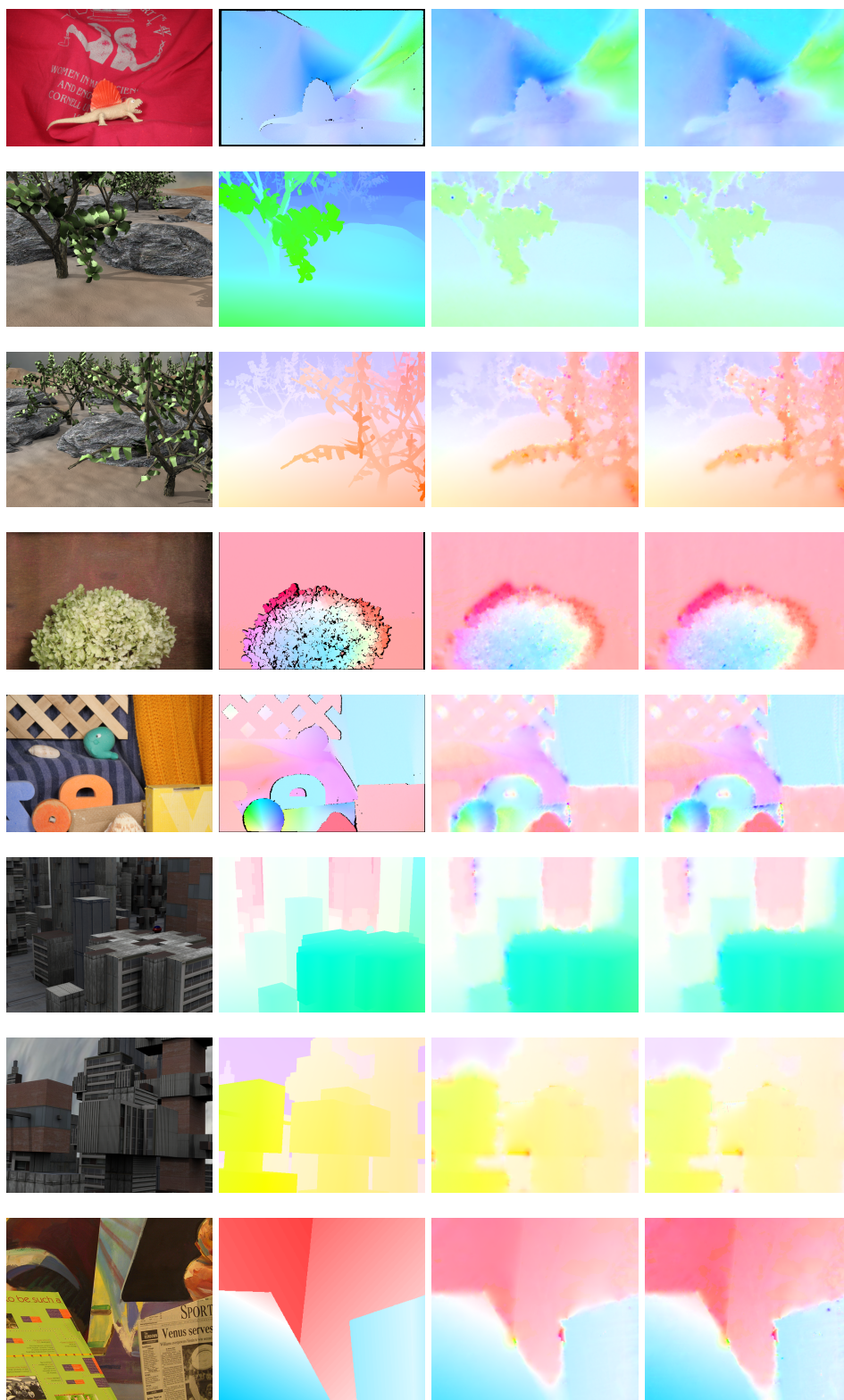
Tablica 7.1: HS : AAE i EPE za najbolje hiperparametre

Hiperparametar $\lambda = 15$ daje najmanju pogrešku primjenom na sve slijedove ispitne baze. U tablici 7.2 prikazani su dobiveni rezultati.

Slijed	AAE [stupnjevi]	EPE [pikseli]
Dimetrodon	2.6361	0.1436
Grove2	3.1311	0.2213
Grove3	7.5671	0.8462
Hydrangea	3.1992	0.3056
RubberWhale	7.7971	0.2376
Urban2	5.5149	0.5806
Urban3	10.6084	1.06953
Venus	7.6210	0.4515

Tablica 7.2: HS : AAE i EPE za standardne hiperparametre

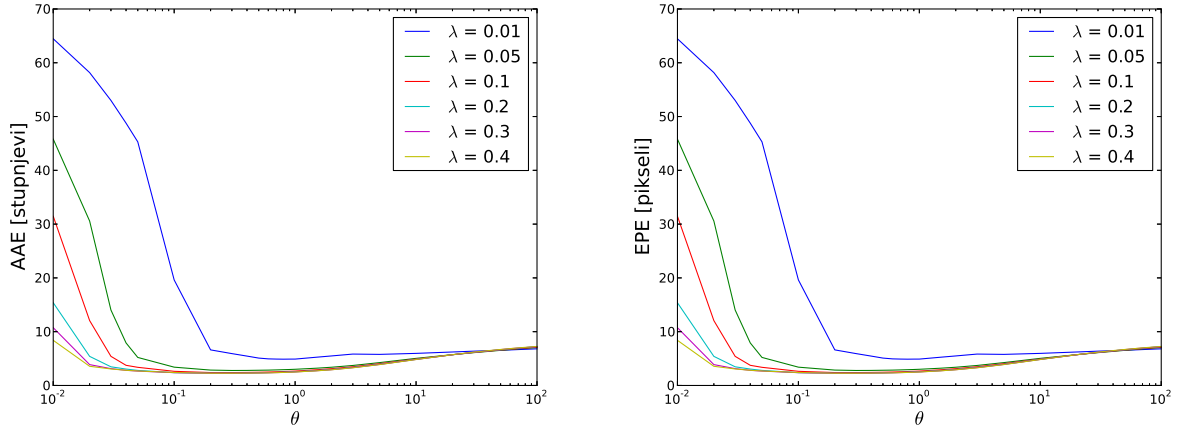
Usporedbom tablica 7.1 i 7.2 vidljiva je važnog dobrog izbora hiperparametra λ kako bi se smanjila dobivena pogreška. Na slici 7.2 uz ground-truth prikazani su dobiveni gusti optički tokovi za svaki od osam ispitnih slijedova.



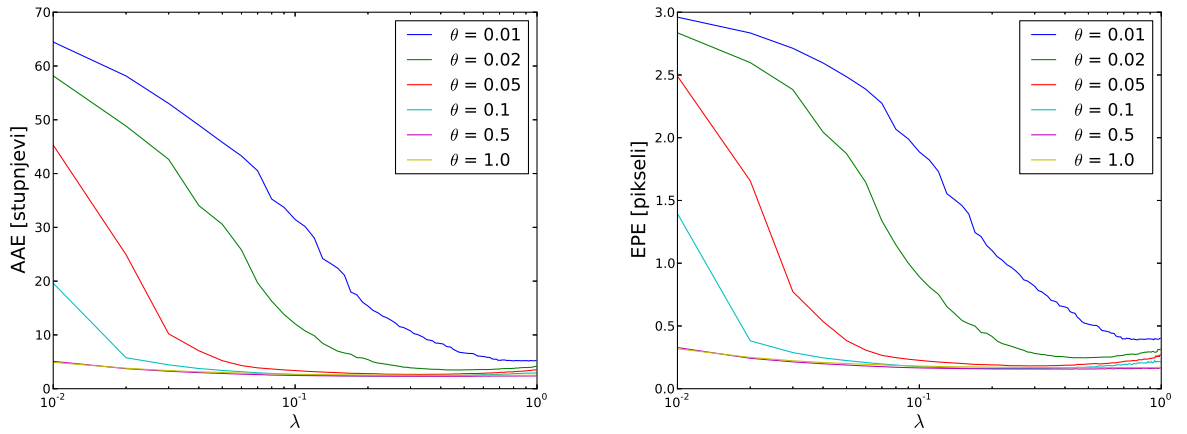
Slika 7.2: Prva slika prikazuje ispitni slijed, druga ground-truth, na zadnje dvije slike prikazan je optički tok za standardne parametre te najbolje parametre.

7.2.2. Postupak TV-L1

U svrhu dobivanja eksperimentalnih rezultata postavljeni su sljedeći parametri: $N_{iter} = 300$, $\tau = 0.25$, $\eta = 0.5$, $N_{warps} = 5$ te $\epsilon = 0.01$. Slika 7.3 prikazuje ovisnost srednje apsolutne i srednje kutne pogreške o hiperparametru θ , dok slika 7.4 prikazuje ovisnost o hiperparametru λ .



Slika 7.3: Slijed Grove2: AAE i EPE u ovisnosti o θ



Slika 7.4: Slijed Grove2: AAE i EPE u ovisnosti o λ

Iz priloženih grafova je vidljivo da se idealna vrijednost hiperparametra θ i λ kreće između 0.1 i 1.0. Hiperparametar θ definira sličnost vektorskih polja u i v . Kako se vrijednost θ povećava iznad 1.0 vidi se da vektorska polja postaju manje slična što je vidljivo i u povećavanju pogrešaka. U slučaju jako male vrijednosti θ gubi se značaj podatkovnog i regularizacijskog člana. Hiperparametar λ definira glatkoću vektorskog

polja. Uz mali λ vektorsko polje je previše zaglađeno, a uz preveliki λ premalo zaglađeno što je vidljivo prema pogreškama na slici 7.4.

U tablici 7.3 prikazane su vrijednosti srednjih apsolutnih i kutnih pogrešaka dobivenih za najbolje parametre (λ , θ te broj korištenih mjerila) za svaki od ispitnih sljedova.

Slijed	λ	θ	Br. mjerila	AAE [stupnjevi]	EPE [piksli]
Dimetrodon	0.3	0.3	5	2.6393	0.1449
Grove2	0.3	0.3	6	2.2617	0.1532
Grove3	0.5	0.4	4	6.3642	0.6721
Hydrangea	0.1	0.8	4	2.4636	0.2278
RubberWhale	0.4	0.4	4	6.3305	0.1955
Urban2	0.5	0.3	6	2.7066	0.3576
Urban3	0.9	0.7	5	4.2211	0.5383
Venus	0.4	0.6	4	4.3802	0.2964

Tablica 7.3: TV-L1 : AAE i EPE za najbolje hiperparametre

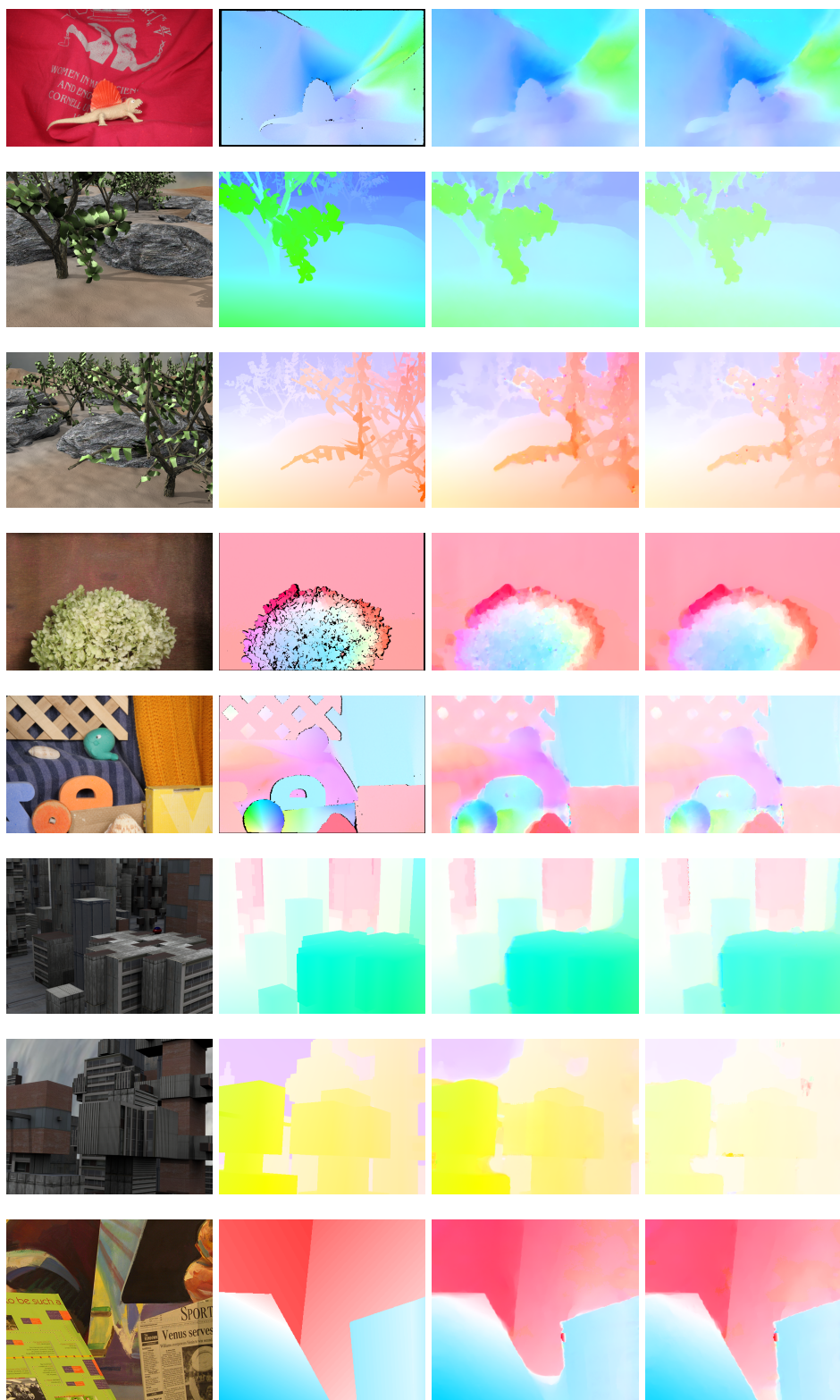
Optimalni hiperparametri za cijelu ispitnu bazu određeni su traženjem onih parametara koji daju najmanju pogrešku na cijelom skupu. Za najbolje parametre ukupna pogreška dobivena sumiranjem pogrešaka na pojedinim sljedovima je minimalna. Za parametar λ dobivena je vrijednost 0.15 dok je za parametar θ dobivena vrijednost 0.3.

U tablici 7.4 prikazane su vrijednosti pogreški dobivene za navede hiperparametre.

Slijed	AAE [stupnjevi]	EPE [piksli]
Dimetrodon	2.7497	0.1547
Grove2	2.3133	0.1561
Grove3	6.5947	0.7207
Hydrangea	2.607	0.2411
RubberWhale	6.7554	0.2120
Urban2	3.0403	0.3832
Urban3	6.6185	0.7101
Venus	6.8483	0.3947

Tablica 7.4: TV-L1 : AAE i EPE za standardne hiperparametre

Na slici 7.5 uz ground-truth prikazani su dobiveni gusti optički tokovi za svaki od osam ispitnih sljedova, po redu prema rezultatima u tablicama 7.3 i 7.4.



Slika 7.5: Prva slika prikazuje ispitni slijed, druga ground-truth, na zadnje dvije slike prikazan je optički tok za standardne parametre te najbolje parametre.

7.2.3. Poboljšani TV-L1 postupak

Poboljšani TV-L1 postupak provodi procjenu optičkog toka na teksturnoj slici uz korištenje median filtera. U svrhu dobivanja eksperimentalnih rezultata korišteni su sljedeći parametri: $N_{warps} = 10$, $N_{scales} = 10$, $\epsilon = 0.0001$, $\eta = 0.5$, $N_{iter} = 300$. U tablici 7.5 prikazni su iznosi pogrešaka za standardne hiperparametre.

Slijed	λ	θ	AAE [stupnjevi]	EPE [pikseli]
Dimetrodon	30	0.25	2.5428	0.1283
Grove2	30	0.25	2.7576	0.1875
Grove3	30	0.25	7.2367	0.7971
Hydrangea	30	0.25	2.2562	0.2178
RubberWhale	30	0.25	6.6875	0.1977
Urban2	30	0.25	3.8582	0.4661
Urban3	30	0.25	8.8026	0.9469
Venus	30	0.25	8.3207	0.4915

Tablica 7.5: Poboljšani TV-L1 : AAE i EPE za standardne hiperparametre

7.3. Vremena izvršavanja postupaka

U tablici 7.6 prikazana su vremena izvršavanja postupaka u prostoru mjerila za najbolje hiperparametre na svim ispitnim sljedovima Middlebury ispitne baze. Vremena su prikazana u sekundama.

Slijed	HS	TV-L1	poboljšani TV-L1
Dimetrodon	0.916	0.867	91.272
Grove2	1.677	1.307	141.233
Grove3	1.727	1.911	159.634
Hydrangea	1.217	1.801	108.618
RubberWhale	1.141	1.085	97.771
Urban2	1.806	1.684	139.465
Urban3	1.804	4.414	150.198
Venus	0.875	1.676	70.309

Tablica 7.6: Vremena izvršavanja postupaka

U tablici 7.6 vidljivo je da su vremena izvršavanja postupka Horna i Schuncka

i običnog TV-L1 postupka približno jednaka, dok kod poboljšanog TV-L1 postupka značajno odskaču. U nastavku je opisano ispitno računalo.

7.3.1. Ispitno računalo

- Intel Core i7 3632QM
- 8GB DDR3
- 250 GB SSD
- NVIDIA GeForce GT 730M

7.4. Analiza dobivenih rezultata

U tablici 7.7 prikazani su dobiveni rezultati za najbolje hiperparametre za svaki od ispitnih skupova. Tablica prikazuje srednje apsolutne pogreške, a najbolji rezultati posebno su naznačeni.

Slijed	HS	TV-L1	poboljšani TV-L1
Dimetrodon	0.1431	0.1449	0.1283
Grove2	0.2213	0.1532	0.1875
Grove3	0.8420	0.6721	0.7971
Hydrangea	0.3056	0.2278	0.2178
RubberWhale	0.2311	0.1955	0.1977
Urban2	0.5806	0.3576	0.4661
Urban3	0.9427	0.5383	0.9469
Venus	0.4072	0.2964	0.4915

Tablica 7.7: Usporedba dobivenih rezultata na pojedinim ispitnim slijedovima

U tablici 7.7 vidljiva je dominacija TV-L1 postupaka u odnosu na postupak Horna i Schuncka. Prikazani rezultati za poboljšavani TV-L1 postupak dobiveni su za iste hiperparametre $\lambda = 30$ i $\theta = 0.25$ uz korištenje istog broja mjerila kao kod dobivanja eksperimentalnih rezultata za postupak Horna i Schuncka i za običan postupak TV-L1. U tablici 7.6 prikazana su vremena izvršavanja pojedinog postupka na svim ispitnim slijedovima. Vremena izvršavanja ovise o ispitnom slijedu na kojem se provode budući da sve slike nisu iste razlučivosti. Također izbor hiperparametara jako utječe na vrijeme izvođenja postupka.

Za provođenje procjene optičkog toka potrebno je koristiti vrlo veliki iznos hiperparametra λ te je u tablici 7.6 jasno vidljiv odnos vremena izvršavanja između TV-L1 i poboljšanog TV-L1 postupka. Vremena upućuju na potrebu za korištenjem paralelizacije ako se želi postići veća preciznost postupka procjene optičkog toka uz korištenje strukturno-teksturne dekompozicije i median filtera. Paralelizacija omogućava korištenje većeg broja ponavljanja procjene optičkog toka na jednom mjerilu (engl. *warps*). U poboljšanom postupku TV-L1 korišteno je 10 ponavljanja što se pokazalo nedovoljno da bi se dobili rezultati bolji u odnosu na postupak TV-L1 bez korištenja strukturno-teksturne dekompozicije i median filtera. Za većinu ispitnih slijedova rezultati dobiveni poboljšanim TV-L1 postupkom bolji su od postupka Horna i Schuncka. Korištenje median filtera jako usporava postupak procjene optičkog toka jer je potrebno provesti sortiranje elemenata kako bi se pronašao median u svakom slikovnom elementu. Korištenje median filtera omogućava veću robusnost prilikom pojavljivanja outliera. Bez korištenje paralelizacije nije pogodno provesti ispitivanje različitih median filtera koji bi promatrali veću okolinu slikovnog elemenata za koji se traži medijan. Kod 3×3 median filtera potrebno je promatrati 9 slikovnih elemenata, npr. za 5×5 median filter koji se koristi u članku [23] bilo bi potrebno promatrati 25 slikovnih elemenata.

8. Zaključak

Kroz ovaj diplomski rad prikazana je mogućnost rješavanja problema optičkog toka korištenjem varijacijskog računa. Prikazana je mogućnost rješavanja problema gustog optičkog toka minimizacijom energijskog funkcionala. Naglasak rada je na prikazuju matematičkog računa koji stoji iza procijene gustog optičkog toka. Euler-Lagrangeove jednadžbe predstavljaju osnovni matematički alat za minimizaciju energijskih funkcionala te je dano njihovo detaljno objašnjenje. Pokazalo se da se minimizacijom energijskog funkcionala može vrlo precizno procijeniti gusti optički tok uz korištenje različitih implementacijskih detalja. Implementacijski detalji sadržani su u izboru različitih funkcija koje djeluju na podatkovni i regularizacijski član i korištenju prikladne predobrade slike.

Pokazalo se da izbor funkcija koje djeluju na podatkovni i regularizacijski član ima jako veliku ulogu u preciznosti dobivenog gustog optičkog toka. U radu je naglasak na iskorištavanju dobrih karakteristika norme ukupne varijacije koja djeluje na regularizacijski član. Najvažnije svojstvo TV norme je mogućnost očuvanja oštih rubova na slikama čime se efektivno omogućava podrška za diskontinuitete. Razmatran je postupak Horna i Schuncka koji se dobije korištenjem QU norme za regularizacijski član, odnosno L^2 norme za podatkovni član te TV- L^1 postupci.

Razvijen je programski sustav koji omogućava evaluaciju postupaka procijene optičkog toka. Eksperimentalni rezultati dobiveni provođenjem evaluacije na Middlebury ispitnoj bazi opravdavaju poboljšanja koja se dobiju izborom različitih implementacijskih detalja. Rezultati su pokazali dominantnost implementiranih TV- L^1 postupaka u odnosu na postupak Horna i Schuncka. Pravci za budući rad uključuju paralelizaciju postupaka procijene optičkog toka te mogućnost korištenje drugih implementacijskih detalja, od kojih je možda najprivlačnija konstantnost gradijenata.

LITERATURA

- [1] Tomer Amiaz, Eyal Lubetzky, i Nahum Kiryati. Coarse to over-fine optical flow estimation. *Pattern Recognition*, 40:2496–2503, 2007.
- [2] Jean-François Aujol, Guy Gilboa, Tony Chan, i Stanley Osher. Structure-texture image decomposition—modeling, algorithms, and parameter selection. *International Journal of Computer Vision*, 67(1):111–136, 2006. ISSN 0920-5691. doi: 10.1007/s11263-006-4331-z. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11263-006-4331-z>.
- [3] Simon Baker, Daniel Scharstein, J. P. Lewis, Stefan Roth, Michael J. Black, i Richard Szeliski. A database and evaluation methodology for optical flow. *Int. J. Comput. Vision*, 92(1):1–31, Ožujak 2011. ISSN 0920-5691. doi: 10.1007/s11263-010-0390-2. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11263-010-0390-2>.
- [4] Thomas Brox, Andrés Bruhn, Nils Papenberg, i Joachim Weickert. High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping. stranice 25–36. Springer, 2004.
- [5] Wilhelm Burger i Mark J. Burge. *Principles of Digital Image Processing: Fundamental Techniques*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1 izdanju, 2009. ISBN 1848001908, 9781848001909.
- [6] Jamylle Laurice Carter. *Dual Methods for Total Variation-Based Image Restoration*. Doktorska disertacija, University of California, Los Angeles, 2001.
- [7] E. Catmull i R. Rom. A class of local interpolating splines. U R. Barnhill i R. Riesenfeld, urednici, *Computer Aided Geometric Design*, stranice 317–326. Academic Press, 1974.
- [8] Antonin Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications, 2004.

- [9] Antonin Chambolle. Total variation minimization and a class of binary mrf models. U *Proceedings of the 5th International Conference on Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition, EMMCVPR'05*, stranice 136–152, Berlin, Heidelberg, 2005. Springer-Verlag. ISBN 3-540-30287-5, 978-3-540-30287-2. doi: 10.1007/11585978_10. URL http://dx.doi.org/10.1007/11585978_10.
- [10] Antonin Chambolle i Thomas Pock. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging, 2010.
- [11] Tony F. Chan, Gene H. Golub, i Pep Mulet. A nonlinear primal-dual method for total variation-based image restoration. *SIAM J. Sci. Comput.*, 20(6):1964–1977, Svibanj 1999. ISSN 1064-8275. doi: 10.1137/S1064827596299767. URL <http://dx.doi.org/10.1137/S1064827596299767>.
- [12] Jannik Fritsch, Tobias Kuehnl, i Andreas Geiger. A new performance measure and evaluation benchmark for road detection algorithms. U *International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, 2013.
- [13] Andreas Geiger, Philip Lenz, Christoph Stiller, i Raquel Urtasun. Vision meets robotics: The kitti dataset. *International Journal of Robotics Research (IJRR)*, 2013.
- [14] Zvonko Glumac. *Matematičke metode fizike*, poglavlje 11. Osijek, 2013.
- [15] Berthold K.P. Horn i Brian G. Schunck. Determining optical flow. Technical report, Cambridge, MA, USA, 1980.
- [16] J. Kasač. Vođenje tehničkih sustava: Materijali za predavanja i vježbe, 2007.
- [17] L. Korkut, M. Krnić, i M. Pašić. *Vektorska analiza*. Element, 2010.
- [18] David G. Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *Int. J. Comput. Vision*, 60(2):91–110, Studeni 2004. ISSN 0920-5691. doi: 10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94. URL <http://dx.doi.org/10.1023/B:VISI.0000029664.99615.94>.
- [19] Bruce D. Lucas i Takeo Kanade. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. U *Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence - Volume 2, IJCAI'81*, stranice 674–679,

- San Francisco, CA, USA, 1981. Morgan Kaufmann Publishers Inc. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1623264.1623280>.
- [20] Enric Meinhardt-Llopis, Javier Sánchez Pérez, i Daniel Kondermann. Horn-Schunck Optical Flow with a Multi-Scale Strategy. *Image Processing On Line*, 2013:151–172, 2013. doi: 10.5201/ipol.2013.20.
 - [21] Thomas Pock. *Fast Total Variation for Computer Vision*. Doktorska disertacija, Graz University of Technology, January 2008.
 - [22] Leonid I. Rudin, Stanley Osher, i Emad Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys. D*, 60(1-4):259–268, Studeni 1992. ISSN 0167-2789. doi: 10.1016/0167-2789(92)90242-F. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-F](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-F).
 - [23] Deqing Sun, Stefan Roth, i Michael J. Black. Secrets of optical flow estimation and their principles, 2010.
 - [24] Javier Sánchez Pérez, Enric Meinhardt-Llopis, i Gabriele Facciolo. TV-L1 Optical Flow Estimation. *Image Processing On Line*, 2013:137–150, 2013. doi: 10.5201/ipol.2013.26.
 - [25] Andreas Wedel, Thomas Pock, Christopher Zach, Horst Bischof, i Daniel Cremers. Statistical and geometrical approaches to visual motion analysis. poglavlje An Improved Algorithm for TV-L1 Optical Flow, stranice 23–45. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009. ISBN 978-3-642-03060-4. doi: 10.1007/978-3-642-03061-1_2. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-03061-1_2.
 - [26] Ying Wu. Optical flow and motion analysis. Advanced Computer Vision Notes Series 6, stranice 3–7. Northwestern University, 2013.
 - [27] C. Zach, T. Pock, i H. Bischof. A duality based approach for realtime tv-l1 optical flow. U *Proceedings of the 29th DAGM Conference on Pattern Recognition*, stranice 214–223, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag. ISBN 978-3-540-74933-2. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1771530.1771554>.
 - [28] Mingqiang Zhu, Stephen Hurst Wright, i Tony Chan. Duality-based algorithms for total-variation-regularized image restoration. *Computational Optimization and Applications*, 47(3):377–400, 2010.

Analiza i vrednovanje odabranih izvedbenih detalja postupaka optičkog toka

Sažetak

U radu se razmatra problem određivanja gustog optičkog toka u videu. U okviru rada proučeni su postupci procjene optičkog toka varijacijskim računom, gdje je cilj minimizacija energijskog funkcionala. Izvedene su diferencijalne jednačbe odabranih postupaka te je prikazan postupak njihova rješavanja. Razvijen je programski sustav koji omogućava evaluaciju i vizualizaciju rezultata dobivenih procijenom optičkog toka. Na kraju su prezentirani eksperimentalni rezultati dobiveni provođenjem evaluacije postupaka na ispitnoj bazi Middlebury te je dana njihova ocjena.

Ključne riječi: analiza pokreta, gusti optički tok, varijacijski račun, energijski funkcional, norma ukupne varijacije, konveksne optimizacije, Middlebury, računalni vid

Analysis and evaluation of optical flow implementation details

Abstract

In this paper we study estimation of dense optical flow in the video. Selected methods based on calculus of variations are analyzed. Variational methods aim to minimize an energy functional for the estimation of optical flow field. Differential equations of selected methods are derived and procedures for their solving are shown. A system for evaluation and visualisation of results obtained by optical flow estimation procedures is developed. Finally, experimental results obtained by conducting of evaluation procedures on Middlebury database are presented and graded.

Keywords: motion analysis, dense optical flow, calculus of variations, energy functional, total variation norm, convex optimizations, Middlebury, computer vision