Umjeravanje kamere ravninskim uzorkom

Uvod u egzaktnu 3D interpretaciju slika

Siniša Šegvić

Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Sveučilište u Zagrebu

Sadržaj

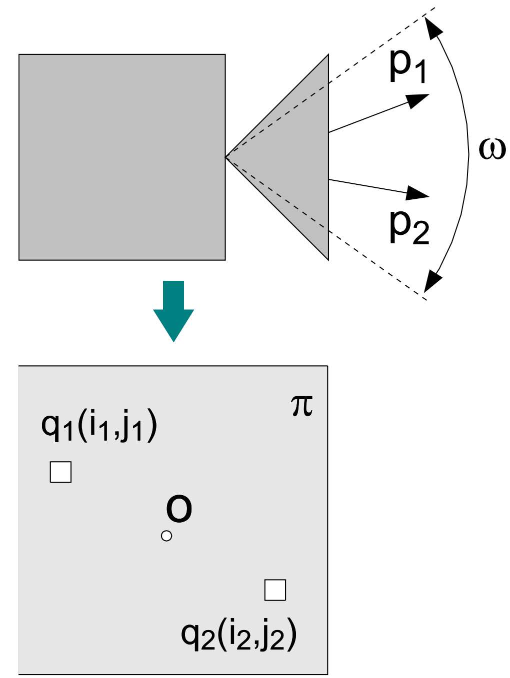
- Uvod
- Pretpostavljeni modeli i matematički alati
- Pregled literature
  - metode koje podrazumijevaju mjerni uzorak (etalon)
  - metode bez mjernih uzoraka
- Umjeravanje kamere ravninskim uzorkom
- Rezultati
- Primjene
  - korekcija radijalne distorzije
  - određivanje vanjskih parametara skupa kamera
  - umjeravanje postolja s dva stupnja slobode
  - geometrija sustava za stereo vid

Uvod (kamera kao crna kutija)

- Stvaranje slike je preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
  $\mathcal{D}(f)$ - Euklidski 3D prostor $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{K}(f)$ - slikovna ravnina π

- Zbog pravocrtnog širenja svjetlosti:
  $\forall y \in \pi \; \exists p \in \mathcal{P} : f(x) = y, \forall x \in p$
  $\mathcal{P}$ - skup pravaca iz $\mathcal{D}(f)$
  - $p \in \mathcal{P}$ definira zraku koja podražava odgovarajući senzorski element

- Problem umjeravanja (kalibracije):
  - inverzno preslikavanje $\kappa : \pi \rightarrow \mathcal{P}$?
  - omogućava određivanje kvantitativnih odnosa u sceni
  - tolerancija je svojstvo postupka (može se ocijeniti)



$\mathcal{P}$ ... skup pravaca scene

$p_1, p_2 \in \mathcal{P}$; $q_1, q_2 \in \pi$;

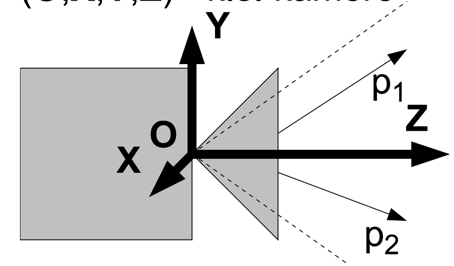
kalibracija $\equiv \kappa : \pi \rightarrow \mathcal{P}$

$\kappa(q_1) = p_1$; $\kappa(q_2) = p_2$

Konteksti umjeravanja kamere

- Umjeravanje intrinsičnih (unutrašnjih) parametara:
  - pravci scene se opisuju u svojstvenom k.s. kamere
  - dobiveno preslikavanje ne ovisi o položaju kamere u odnosu na scenu, svojstveno je kameri

O - presjecište rubova vidnog polja (rvp)
Z - simetrala rvp
X,Y - paralelni sa odgovarajućim rvp
(**O**,**X**,**Y**,**Z**) - k.s. kamere



$\mathcal{P}$ ... pravci u (**O**,**X**,Y,**Z**)
kalibracija $\equiv \kappa : \pi \rightarrow \mathcal{P}$

- Umjeravanje vanjskih parametara:
  - definiraju položaj kamere u referentnom k.s. scene (Euklidska transformacija, šest stupnjeva slobode)
  - korisni kod određivanja 3D položaja značajki čiji je položaj ograničen poznatom ravninom
  - korisni kod uparivanja interpretacija više kamera

Projekcijska geometrija

- Iznimno bitna u računarskom vidu jer omogućava linearan opis stvaranja slike i transformacija među koordinatnim sustavima
- Homogene koordinate točke projekcijskog prostora:

$$\mathbf{x} = \left[\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\ \right]^T \in \mathbb{P}^n$$
$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{y} \tag{1}$$

- Projekcija je linearna transformacija $\mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n$: može se opisati matricom $\mathbf{P}_{m+1 \times n+1}$ (vrijedi $\mathbf{P} \sim \lambda \cdot \mathbf{P}$); projekcija $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ (matrica $\mathbf{H}_{3\times 3}$) — homografija
- Projekcijske invarijante: kolinearnost, križni omjer (udaljenosti, kutovi i paralelizam — ne)

Odnos projekcijskog i Euklidskog prostora

- Izomorfno preslikavanje $\mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n$:

$$\left[\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_n \end{array}\right]^T \mapsto \left[\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_n, 1 \end{array}\right]^T \quad (2)$$

- Za sve $\mathbf{y} \in \mathbb{P}^n : y_{n+1} \neq 0$ vrijedi obratno preslikavanje:

$$\left[\begin{array}{c} y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{array}\right]^T \mapsto \left[\begin{array}{c} \frac{y_1}{y_{n+1}}, \frac{y_2}{y_{n+1}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \end{array}\right]^T \quad (3)$$

- $\mathbf{y} \in \mathbb{P}^n : y_{n+1} = 0$ se nazivaju točke u beskonačnosti i nemaju prikaz u $\mathbb{R}^n$; skup svih takvih točaka čini tzv. pravac u beskonačnosti

Elementi projekcijske ravnine

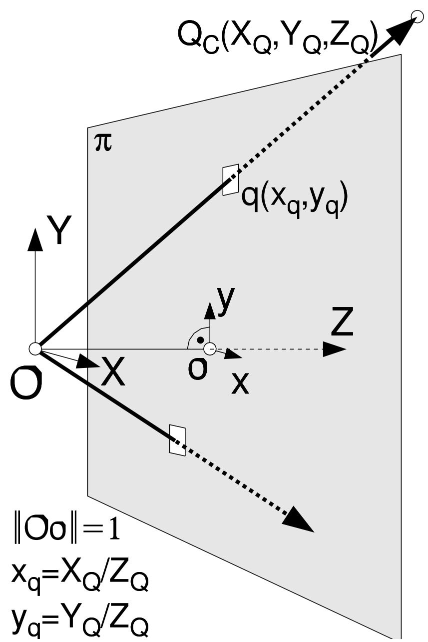
objekt	prikaz	jednadžba	transformacija
točka	$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x & y & t \end{bmatrix}^T$		$\mathbf{Hq}$
pravac	$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$	$\mathbf{l}^T\mathbf{q} = 0$	$\mathbf{H}^{-T}\mathbf{l}$
kr. 2. reda	$\mathbf{C}_{3\times 3} = \mathbf{C}_{3\times 3}^T$	$\mathbf{q}^T\mathbf{C}\mathbf{q} = 0$	$\mathbf{H}^{-T}\mathbf{C}\mathbf{H}^{-1}$

- Malo više o krivuljama 2. reda:
  - neka je: $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$
  - tada vrijedi:

$$\mathbf{q}^T\mathbf{C}\mathbf{q} = f + 2\,c\,x + a\,x^2 + 2\,e\,y + 2\,b\,x\,y + d\,y^2 \quad (4)$$

Perspektivni model kamere (1)

- Idealna kamera $\overset{\text{def.}}{=}$ kamera koja daje neizobličene slike (bridovi scene $\mapsto$ dužine u slici, ...)
- Takvo stvaranje slike opisuje perspektivna projekcija:



$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_{\hat{q}} \\ y_{\hat{q}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

ili, kraće:

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q_C} \qquad (6)$$

$\hat{\mathbf{q}} \in$ normalizirani k.s. slike $(o, \hat{x}, \hat{y})$, $\mathbf{Q_C} \in$ k.s. kamere (O, X, Y, Z)

Perspektivni model kamere (2)

- Linearno proširenje modela (5) uvodi pet parametara:

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & s_\theta & t_x \\ 0 & s_y & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{\hat{q}} \\ y_{\hat{q}} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

ili, kraće:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{q}} \tag{8}$$

  - s_x, s_y …dimenzije senzorskih elemenata ($s_x \approx s_y$)
    $p_{ar} = \frac{s_y}{s_x}$; $\phi_{hfov} = 2 \cdot arctg(\frac{w/2}{s_x})$, za sliku $w \times h$
  - t_x, t_y …pomak k.s. slike
  - $s_\theta = tan(\theta)/s_x$ …kut među osima k.s. slike ($s_\theta \approx 0$)
- Ostali intrinsični parametri opisuju nelinearne korekcije!

Homogene koordinate i vanjski parametri (1)

- Kao i ranije, homogene koordinate omogućuju linearne prijelaze među koordinatnim sustavima:

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ Z_Q \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3x3} & -\mathbf{R}_{3x3}\mathbf{t}_{3x1} \\ 0_{1x3} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_Q \\ M_Q \\ N_Q \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

ili, kraće:

$$\mathbf{Q_C} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q_W} \tag{10}$$

$\mathbf{Q_C} \in$ k.s. kamere (O, X, Y, Z),
$\mathbf{R}$ - rotacija k.s. kamere oko osi k.s. svijeta,
$\mathbf{t}$ - translacija k.s. kamere u k.s. svijeta,
$\mathbf{Q_W} \in$ k.s. svijeta (O_W, L, M, N)

Homogene koordinate i vanjski parametri (2)

- VP: položaj kamere u k.s. svijeta (translacija+rotacija)
- Parametrizacija rotacijske matrice (nagib,zakret,okret):

$$\mathbf{R} = \mathbf{R_z}(\gamma) \cdot \mathbf{R_y}(\beta) \cdot \mathbf{R_x}(\alpha) \tag{11}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\beta)\,\cos(\gamma) & \cos(\gamma)\,\sin(\alpha)\,\sin(\beta) - \cos(\alpha)\,\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\,\cos(\gamma)\,\sin(\beta) + \sin(\alpha)\,\sin(\gamma) \\ \cos(\beta)\,\sin(\gamma) & \cos(\alpha)\,\cos(\gamma) + \sin(\alpha)\,\sin(\beta)\,\sin(\gamma) & \cos(\gamma)\,\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\,\sin(\beta)\,\sin(\gamma) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta)\,\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\,\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Parametrizacija nije jedinstvena: zadanu matricu opisuju najmanje dvije trojke (α,β,γ)!

- Inverzni parametri (položaj k.s. svijeta u k.s. kamere):

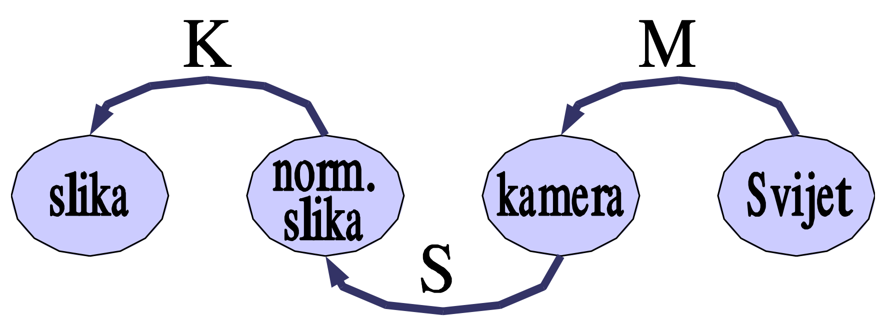
$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R_i}_{3x3} & -\mathbf{R_i}_{3x3}\mathbf{t_i}_{3x1} \\ 0_{1x3} & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{R_i} = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \quad \mathbf{t_i} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{t} \tag{13}$$

Perspektivni model, sažetak

- Pretpostavke: “oštra” slika i idealna (“tanka”) leća
- Kalibracija intrinsičnih parametara svakom slikovnom elementu pridružuje pravac kroz žarište
- Kalibracija ekstrinsičnih parametara određuje kako te pravce interpretirati u nekom vanjskom k.s.
- Ukupna transformacija:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q_W} = \mathbf{P}_{4\times 3} \cdot \mathbf{Q_W} \tag{14}$$



Model radijalne distorzije

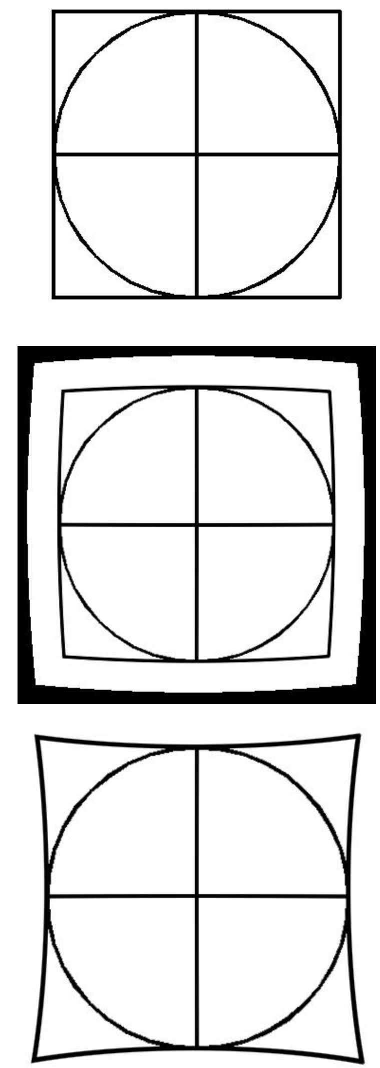
- Stvarne kamere dobro aproksimiraju projekciju, ali izobličenja postoje:
  - neravnomjerni efektivni presjek leće, $S_{\text{eff}} = S \cdot \cos(\varphi)$
  - radijalna i tangencijalna distorzija
  - kromatska aberacija
- Model distorzije i korekcije:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_d &= f_{ud}(\hat{x}_u) \\
\hat{x}_u &= f_{du}(\hat{x}_d) \\
f_{ab}(\hat{x}_a) &= \hat{x}_a \cdot (1 + k_1^{ab} \cdot \hat{r}_a^2 + k_2^{ab} \cdot \hat{r}_a^4) \\
\hat{r}_a^2 &= \hat{x}_a^2 + \hat{y}_a^2 \qquad (15)
\end{aligned}$$

Model radijalne distorzije

- Stvarne kamere dobro aproksimiraju projekciju, ali izobličenja postoje:
  - neravnomjerni efektivni presjek leće, $S_{\text{eff}} = S \cdot \cos(\varphi)$
  - radijalna i tangencijalna distorzija
  - kromatska aberacija
- Model distorzije i korekcije:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_d &= f_{ud}(\hat{x}_u) \\
\hat{x}_u &= f_{du}(\hat{x}_d) \\
f_{ab}(\hat{x}_a) &= \hat{x}_a \cdot (1 + k_1^{ab} \cdot \hat{r}_a^2 + k_2^{ab} \cdot \hat{r}_a^4) \\
\hat{r}_a^2 &= \hat{x}_a^2 + \hat{y}_a^2
\end{aligned}
\tag{15}
$$



Alati linearne algebre

- Dekompozicije matrica
- Rješavanje linearnih sustava sa viškom ograničenja
- Dotjerivanje rotacijske matrice

Dekompozicija po Choleskom

- Neka je zadana simetrična pozitivno definitna matrica $\mathbf{A}$
- Rezultat dekompozicije je gornja trokutasta matrica U: $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U}$
- Općenito, isplati je se koristiti kad je to moguće jer je dvostruko brža od LU dekompozicije

Dekompozicija Q-R

- Za proizvoljnu kvadratnu matricu $\mathbf{A}$, rezultat dekompozicije su:
  - gornja trokutasta matrica $\mathbf{R}$
  - ortogonalna matrica $\mathbf{Q}$ (vrijedi $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{I}$)
- Vrijedi: $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$
- Ne koristi se često, jer je dvostruko sporija od LU dekompozicije

Dekompozicija projekcijske matrice

- Množenjem $\mathbf{S}$ i $\mathbf{M}$ u (14), dobiva se:

$$\lambda \cdot \mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{K} \cdot \left[\begin{array}{cc} \mathbf{R} & -\mathbf{R} \cdot \mathbf{t} \end{array} \right] \tag{15}$$

- Označimo lijevu kvadratnu podmatricu od $\mathbf{P}$ sa $\mathbf{P}_3$; tada vrijedi ($\mathbf{P}_{:,1}$ označava i-ti stupac od $\mathbf{P}$):

$$\mathbf{P}_3 = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_{:,1} & \mathbf{P}_{:,2} & \mathbf{P}_{:,3} \end{array} \right] = \frac{1}{\lambda} \mathbf{K} \cdot \mathbf{R} \tag{16}$$

- **Zaključak**:
  iz projekcijske matrice (dobivene umjeravanjem) upotrebom QR dekompozicije moguće je izvući i intrinsične i vanjske parametre nepoznate kamere!

Singularna dekompozicija

- Za proizvoljnu matricu $\mathbf{A}_{m\times n}$ (ne mora biti kvadratna), rezultat dekompozicije su:
  - matrica sa ortogonalnim stupcima $\mathbf{U}_{m\times n}$
  - dijagonalna pozitivno semidefinitna matrica $\mathbf{D}_{n\times n}$
  - ortogonalna matrica $\mathbf{V}_{n\times n}$
- Vrijedi:
  - $\mathbf{A} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{V}^T$
  - $\mathbf{D}_{i,i}$ - drugi korijen i-te svojstvene vrijednosti od $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ $(\mathbf{D}_{i,i}\in\mathbb{R}, \mathbf{D}_{i,i}\geq 0)$
  - $\mathbf{V}_{:,i}$ - i-ti svojstveni vektor od $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$
  - $\|\mathbf{U}\mathbf{x}\| = (\mathbf{U}\mathbf{x})^T(\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\mathbf{U}^T\mathbf{U})\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|$ ($\mathbf{U}$ čuva normu!)

Linearni sustav sa viškom ograničenja (1)

- Neka je zadan linearni sustav sa viškom ograničenja (*engl*. overconstrained)

$$\mathbf{A}_{m\times n} \cdot \mathbf{x}_n = 0 \qquad (17)$$

- Neka nas zanima netrivijalno rješenje sustava, u smislu minimalne kvadratne pogreške:

$$\min_x \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|, \ \ \mathrm{uz} \ \|\mathbf{x}\| = 1 \qquad (18)$$

- Rješenje je definirano do na konstantu, te odgovara svojstvenom vektoru matrice $A^T A$ koji odgovara njenoj apsolutno najmanjoj svojstvenoj vrijednosti!

Linearni sustav sa viškom ograničenja (2)

Dokaz:

- Neka je $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T$; tada tražimo $\mathbf{x}$ koji zadovoljava:

$$\min_x \|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T\mathbf{x}\| = \min_x \|\mathbf{D}\mathbf{V}^T\mathbf{x}\|, \text{ uz } \|\mathbf{x}\| = 1 \tag{19}$$

- Neka je $\mathbf{q} = \mathbf{V}^T\mathbf{x}$; tada vrijedi:

$$\|\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T\mathbf{x}\| = \|\mathbf{D}\mathbf{q}\|, \text{ uz } \|\mathbf{q}\| = 1 \tag{20}$$

- Elementi $\mathbf{D}$ su pozitivni i padajući, pa $\mathbf{q}$ koji minimizira (20) iznosi $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T$
- Odatle slijedi ono što je trebalo dokazati:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{q} = \mathbf{V}_{:,n} \tag{21}$$

Dotjerivanje rotacijske matrice (1)

- Rotacijska matrica $\mathbf{Q}$ koja se numerički dobiva sigurno nije ortogonalna kakva bi u idealnom slučaju trebala biti
- $\mathbf{Q}$ nadomještamo matricom $\mathbf{R}$ koja zadovoljava:

$$\min_{R} |\mathbf{R}-\mathbf{Q}|_F^2, \text{ uz } \|\mathbf{R}^T\mathbf{R}\| = \mathbf{I} \tag{22}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (r_{ij}-q_{ij})^2 &= \sum_i \sum_j r_{ij}^2 - 2r_{ij}q_{ij} + q_{ij}^2 = \\ \sum_i \sum_j r_{ij}^2 + \sum_i \sum_j q_{ij}^2 &- 2\sum_i \sum_j r_{ij}q_{ij} = \\ k_1 - k_2 \sum_i \sum_j r_{ij}q_{ij} &= k_1 - k_2 \operatorname{tr}(\mathbf{R}^T\mathbf{Q}) \end{aligned} \tag{23}$$

Dotjerivanje rotacijske matrice (2)

- Uz singularnu dekompoziciju $\mathbf{Q}$, iz (23) slijedi:

$$\min_R |\mathbf{R}-\mathbf{Q}|_F^2 =^\dagger \max_R \operatorname{tr}(\mathbf{R}^T\mathbf{Q}) =$$

$$= \max_R \operatorname{tr}(\mathbf{R}^T\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^T) =^\dagger \max_R \operatorname{tr}(\mathbf{V}\mathbf{R}^T\mathbf{U}\mathbf{D}) \qquad (24)$$

- Uvedimo $\mathbf{Z}=\mathbf{V}\mathbf{R}^T\mathbf{U}$ ($\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}=\mathbf{I}$):

$$\operatorname{tr}(\mathbf{Z}\mathbf{D}) = \sum_i z_{ii} d_{ii} \leq \sum_i d_{ii} \qquad (25)$$

- $\mathbf{Z}$ koji maksimizira (25) iznosi $\mathbf{I}$, pa je rješenje (24):

$$\mathbf{R} =^\dagger \mathbf{U}\mathbf{V}^T \qquad (26)$$

Pregled literature

- Metode koje podrazumijevaju mjerni uzorak (etalon)
  - 3D mjerni uzorak (najčešće jedan pogled)
  - 2D mjerni uzorak (jedan ili više pogleda)
  - odabir značajki mjernog uzorka?
- Metode bez mjernih uzoraka
  - poznate kao "samoumjeravanje" kamere (*engl.* self-calibration, auto-calibration)
  - Nepomična scena, pokretna kamera: zaključuje se na temelju uparivanja točaka pojedinih slika sljeda (generalizirani problem stereo vida)
  - kretanje kamere može biti poznato ili ne!

3D uzorak, linearno rješenje (1)

Uparujemo točke mjernog uzorka sa odgovarajućim projekcijama $\mathbf{Q}_i \mapsto \mathbf{q}_i$; tražimo $\mathbf{P} : \forall i \ \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_i = \lambda \cdot \mathbf{q}_i$:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \lambda \cdot \mathbf{q} \Longleftrightarrow \mathbf{q} \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = 0 \qquad (27)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} \times (\mathbf{PQ}) &= \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1\mathbf{Q} \\ \mathbf{P}_2\mathbf{Q} \\ \mathbf{P}_3\mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_q \cdot \mathbf{P}_3\mathbf{Q} - 1 \cdot \mathbf{P}_2\mathbf{Q} \\ 1 \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{Q} - x_q \cdot \mathbf{P}_3\mathbf{Q} \\ x_q \cdot \mathbf{P}_2\mathbf{Q} - y_q \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{Q} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^T & -\mathbf{Q}^T & y_q\mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{0}_3^T & -x_q\mathbf{Q}^T \\ -y_q\mathbf{Q}^T & x_q\mathbf{Q}^T & \mathbf{0}_3^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T \\ \mathbf{P}_2^T \\ \mathbf{P}_3^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{12}
\end{aligned} \qquad (28)$$

3D uzorak, linearno rješenje (2)

- Za svaku točku uzorka dobivamo dvije nezavisne jednadžbe!
- Slaganjem jednadžbi za n uparenih točaka, dobivamo matricu homogenog linearnog sustava $\mathbf{A}_{2n\times 12} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{0}_{12}$
- Za dobivanje linearnog rješenja potrebno je bar 6 točaka, u praksi je potrebno koristiti više (npr. 100)!
- Rješenje sustava (u smislu MKP) se dobiva poznatim metodama, a omogućava rekonstrukciju matrice $\mathbf{P}_{3\times 4}$
- Ovakvim pristupom ne možemo pronaći parametre nelinearnih izobličenja!

Nelinearna optimizacija (1)

- Linearno rješenje minimizira rezidual sustava $\mathbf{Ap} = \mathbf{0_{12}}$, odnosno kvadratno odstupanje zadanih ograničenja po elementima projekcijske matrice
- To ne zadovoljava dva kriterija:
  - treba minimizirati projekcijsku pogrešku

$$\epsilon_p = \sum_i \|\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q_i} - \mathbf{q_i}\|_{\mathbb{R}^2} \tag{29}$$

  - treba odrediti parametre nelinearnih izobličenja
- Zato se linearno rješenje koristi kao početna procjena za gradijentni optimizacijski postupak, uz funkciju cilja ϵ_p

Nelinearna optimizacija (2)

- Tipično, koristi se Levenberg-Marquardov optimizacijski postupak implementiran u bibliotekama `minpack` (Fortran) odnosno `cephes` (C) koje su dostupne na `http://www.netlib.org`
- Varijable koje postupak optimira su:
  - linearni intrinsični parametri kamere ($\mathbf{K}$)
  - intrinsični parametri nelinearnih izobličenja
  - parametri Euklidske transformacije ($\mathbf{M}$)
- Literatura: [Tsai87], [Heikkila00], [Spies03]

Upotreba ravninskog mjernog uzorka

- Prednost: jednostavnija (jeftinija) izrada (laserski pisač!)
- Nedostatak: zbog linearne zavisnosti točaka uzorka, nije moguće odrediti linearno rješenje za sve elemente projekcijske matrice na temelju samo jednog pogleda!
- Mogućnosti dobivanja početne procjene kalibracijskih parametara:
  - analitičkim metodama (linearno rješenje)
    - pojednostavniti matricu intrinsičnih parametara $\mathbf{K}$, tako da: $s_x = s_y = f$, i $s_\theta = t_x = t_y = 0$ [Tsai87]
    - koristiti više različitih pogleda [Zhang00]!
  - iz kataloških podataka kamere (širina vidnog polja) [Heikkila00]

Odabir značajki mjernog uzorka

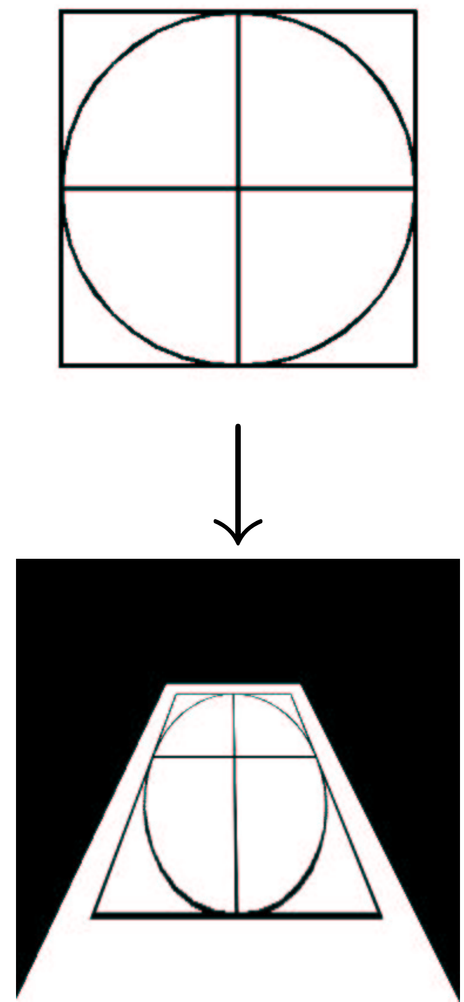
- Zahtjevi:
  - mala površina (u vidno polje treba smjestiti velik broj značajki)
  - robustnost na šum (značajka ne smije biti pre-lokalnog karaktera)
  - dobra lokalizacija (treba odrediti što točniji položaj značajke)

Odabir značajki mjernog uzorka

- Zahtjevi:
  - mala površina (u vidno polje treba smjestiti velik broj značajki)
  - robustnost na šum (značajka ne smije biti pre-lokalnog karaktera)
  - dobra lokalizacija (treba odrediti što točniji položaj značajke)
- U literaturi se obično koriste cb slike krugova (težište) ili kvadrata (kutovi)
- Vrhovi kvadrata imaju slabiju robustnost, ali dobru lokalizaciju
- Težišta krugova robustnija, problematičan pomak uslijed homografije!

Odabir značajki mjernog uzorka

- Zahtjevi:
  - mala površina (u vidno polje treba smjestiti velik broj značajki)
  - robustnost na šum (značajka ne smije biti pre-lokalnog karaktera)
  - dobra lokalizacija (treba odrediti što točniji položaj značajke)
- U literaturi se obično koriste cb slike krugova (težište) ili kvadrata (kutovi)
- Vrhovi kvadrata imaju slabiju robustnost, ali dobru lokalizaciju
- Težišta krugova robustnija, problematičan pomak uslijed homografije!



Težišta krugova kao mjerne značajke (1)

- Neka je ravnina uzorka Υ dana ishodištem $\mathbf{u_o}$ te koordinatnim vektorima $\mathbf{u_x}$ i $\mathbf{u_y}$ (k.s. svijeta); tada $\mathbf{Q}_R = \begin{bmatrix} Q_{Rx} & Q_{Ry} & 1 \end{bmatrix} \in \Upsilon \mapsto \mathbf{q} \in \pi$ po formuli:

$$\mathbf{q} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_o} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_R = \mathbf{P} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}_R = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_R \quad (30)$$

- Ako Υ odgovara $X - Y$ ravnini k.s. svijeta:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{:,1} & \mathbf{P}_{:,2} & \mathbf{P}_{:,4} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Težišta krugova kao mjerne značajke (2)

- Kružnica radijusa r u točki $(Q_{Rcx}, Q_{Rcy}) \in \Upsilon$:

$$\mathbf{Q}_R^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & -Q_{Rcx} \\ 0 & 1 & -Q_{Rcy} \\ -Q_{Rcx} & -Q_{Rcy} & Q_{Rcx}^2 + Q_{Rcy}^2 + r^2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_R = \mathbf{0}, \quad (32)$$

ili, kraće, $\mathbf{Q}_R^T \mathbf{C} \mathbf{Q}_R = \mathbf{0}$

- Za odgovarajuću kružnicu u slikovnoj ravnini vrijedi:

$$\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{H}^{-T} \mathbf{C} \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (33)$$

- Pokazuje se [Heikkila00] da je (33) elipsa sa težištem u:

$$\mathbf{q_{te}} =^\dagger \mathbf{S}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{H}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}_{3,:}^T \quad (34)$$

Težišta krugova kao mjerne značajke (3)

- Izmnožimo posljednja dva faktora jednadžbe (34):

$$\begin{aligned}\mathbf{q_{te}} &= \mathbf{H}\cdot\mathbf{C}^{-1}\mathbf{H}_{3,:}^{T} = \mathbf{H}\cdot\begin{bmatrix} Q_{Rcx} - \frac{H_{31}\cdot r^2}{\mathbf{H_{3,:}^T Q_{Rc}}} \\ Q_{Rcy} - \frac{H_{32}\cdot r^2}{\mathbf{H_{3,:}^T Q_{Rc}}} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{H}\cdot\mathbf{Q_{Rc}} - \mathbf{H}\cdot\varepsilon_H(\mathbf{H},\mathbf{Q_{Rc}},r) \qquad (35)\end{aligned}$$

  Vrijedi: $r\to 0 \Rightarrow \varepsilon_H \to 0 \Rightarrow \mathbf{q_{te}} \to \mathbf{H}\cdot\mathbf{Q_{Rc}}$!

- Jednadžba (35) određuje translacijsku korekciju ε_H na središta krugova ravnine uzorka, bez koje se u postupak umjeravanja unosi sistematska pogreška!

- Nažalost, ε_H ovisi o $\mathbf{H}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{U}$, pa je korekciju moguće primijeniti samo prilikom nelinearne optimizacije

Umjeravanje bez mjernog uzorka

- Metode poznate kao “samoumjeravanje” kamere (*engl.* self-calibration, auto-calibration)
- Nepomična scena, pokretna kamera: zaključuje se na temelju uparivanja točaka pojedinih slika sljeda
- Kretanje kamere može biti poznato ili ne!
- Intrinsični parametri konstantni ili ne!

Ideja samoumjeravanja

- Neka je kretanje kamere nepoznato, K konstantna
- Generalizirani stereo problem: za svaki par slika, iz uparenih točaka (bar 8) se računa matrica $\mathbf{F}$:

$$\forall i : (\mathbf{q}_i' \leftrightarrow \mathbf{q}_i) \Rightarrow \mathbf{q}_i' \mathbf{F} \mathbf{q}_1 = 0 \tag{36}$$

- Dokaz prethodnog svojstva fundamentalne matrice izlazi iz epipolarnog ograničenja, uz poznatu geometriju, vrijedi ($\mathbf{K}' = \mathbf{K}$):

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}'^{-T} \cdot [\mathbf{t}_\times]\mathbf{R} \cdot \mathbf{K}^{-1} \tag{37}$$

- Fundamentalna matrica ima više stupnjeva slobode od Euklidskog pomaka, pa se uz više parova slika (bar 3) može izvući sustav (nelinearnih) jednadžbi u $\mathbf{K}$!

Više pogleda na ravninski uzorak (1)

- Ideja: odrediti (linearne) parametre kamere na temelju više homografija iz ravnine uzorka u slikovnu ravninu!
- Neka je k.s. svijeta (O, X, Y, Z) orijentiran tako da je Z okomit na ravninu uzorka; tada vrijedi:

$$\mathbf{q} = \mathbf{KSM} \begin{bmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{:,\mathbf{1}} & \mathbf{R}_{:,\mathbf{2}} & \mathbf{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_Q \\ Y_Q \\ 1 \end{bmatrix}^T \quad (38)$$

- Ili, kraće,

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}\mathbf{Q}_{\mathbf{R}} \quad (39)$$

Više pogleda na ravninski uzorak (1)

- Plan:
  - homografija $\mathbf{H}$ ima 8 stupnjeva slobode
  - za svaki pogled, imamo samo 6 vanjskih parametara
  - iz svake homografije izvući 8-6=2 ograničenja na intrinsične parametre kamere!
- Tri homografije su dovoljne za rješenje matrice $\mathbf{K}$ (6 ograničenja za 5 parametara)!
- Dvije homografije su dovoljne ako se pretpostavi sa je parametar zakošenosti $s_\theta = 0$
- Jednom homografijom možemo procijeniti linearno rješenje uz $s_\theta = t_x = t_y = 0$ (velika odstupanja)
- U praksi, najbolji rezultati za više pogleda (npr. 10)

Određivanje homografije

- Matricu $\mathbf{H}$ umjeravamo uz isti uvjet kao i $\mathbf{P}$ kod 3D mjernog uzorka: $\mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_R = \lambda \cdot \mathbf{q} \iff \mathbf{q} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_R = 0$
- Dobivamo dvije nezavisne jednadžbe $\forall$ par točaka:

$$\mathbf{q} \times (\mathbf{H}\mathbf{Q}_R) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3^T & -\mathbf{Q}_R^T & y_q \mathbf{Q}_R^T \\ \mathbf{Q}_R^T & \mathbf{0}_3^T & -x_q \mathbf{Q}_R^T \\ -y_q \mathbf{Q}_R^T & x_q \mathbf{Q}_R^T & \mathbf{0}_3^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,:}^T \\ \mathbf{H}_{2,:}^T \\ \mathbf{H}_{3,:}^T \end{bmatrix} = \mathbf{0}_9 \tag{40}$$

- Dobivamo sustav $\mathbf{A}_{2n \times 9} \cdot \mathbf{h}_9 = 0_9$: 4 točke dovoljne za jednoznačno rješenje (MKP), u praksi želimo više (100)
- Radi poboljšanja numeričke točnosti, točke slike i uzorka se prethodno mogu prevesti u “ravnomjerni” k.s.
- Rješenje se može poboljšati optimizacijom!

Homografijska ograničenja na matricu K (1)

- Iz jednadžbe (39), za svaku homografiju vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{K}\mathbf{r}_1 & \lambda\mathbf{K}\mathbf{r}_2 & \lambda\mathbf{K}\mathbf{t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (41)$$

  odnosno, $\mathbf{r}_i = \frac{1}{\lambda}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_i, i = 1, 2$

- Ograničenja slijede iz ortonormalnosti vektora $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$!

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^T\mathbf{r}_2 = 0 &\equiv \mathbf{h}_1^T\mathbf{B}\mathbf{h}_2 = 0 \\ \mathbf{r}_1^T\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2^T\mathbf{r}_2 &\equiv \mathbf{h}_1^T\mathbf{B}\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2^T\mathbf{B}\mathbf{h}_2, \end{aligned} \quad (42)$$

  gdje je $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{K}^{-T}\mathbf{K}^{-1}$;
  vrijedi $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$ i $\lambda\mathbf{K}^{-1} = chol(\mathbf{B})$!

Homografijska ograničenja na matricu K (2)

- Neka je: $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} & \mathbf{B}_{33} \end{bmatrix}^T$
- Vrijedi (pazi, $\mathbf{h}_{ij} = \mathbf{H}_{ji}$):

$$\mathbf{h}_i^T \mathbf{B} \mathbf{h}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{i1}\mathbf{h}_{j1} & \mathbf{h}_{i1}\mathbf{h}_{j2} + \mathbf{h}_{i2}\mathbf{h}_{j1} & \mathbf{h}_{i1}\mathbf{h}_{j3} + \mathbf{h}_{i3}\mathbf{h}_{j1} & \mathbf{h}_{i2}\mathbf{h}_{j2} & \mathbf{h}_{i2}\mathbf{h}_{j3} + \mathbf{h}_{i3}\mathbf{h}_{j2} & \mathbf{h}_{i3}\mathbf{h}_{j3} \end{bmatrix}^T \mathbf{b} = \mathbf{v}_{ij}\mathbf{b}$$

- Tada se temeljna ograničenja (42) mogu zapisati kao dvije homogene linearne jednadžbe u b:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{12}^T \\ (\mathbf{v}_{11} - \mathbf{v}_{22})^T \end{bmatrix} \mathbf{b} = \mathbf{0} \qquad (43)$$

- Ako imamo n nezavisnih homografija, dobivamo sustav:

$$\mathbf{V}_{2n\times 6}\mathbf{b} = \mathbf{0}_6 \qquad (44)$$

Određivanje matrice K

- Iz sustava (44), da se odrediti simetrična matrica $\mathbf{B}$
- Jedini mogući problem: što ako (zbog šuma) $\mathbf{B}$ nije pozitivno definitna (što bi, po fizici stvari, trebala biti)?
- Tada možemo konstatirati da nema sreće: odabrani pogledi nisu dovoljno reprezentativni pa da informacija bude jača od šuma (ništa od linearne procjene $\mathbf{K}$)
- Takav se problem može javiti ukoliko su:
  - pogledi na su ravnine međusobno paralelni,
  - upareno je malo točaka
  - uzorak je relativno daleko od kamere (zauzima relativno mali dio vidnog polja)
- Srećom, situacije u kojima se problem javlja su upravo suprotne scenariju za dobro umjeravanje kamere!

Određivanje matrice K

- Ako problema nema, dekompozicijom po Choleskom nalazimo $\mathbf{K}^{-1} : \mathbf{B} = \lambda \mathbf{K}^{-T} \mathbf{K}^{-1}$
- Parametar λ je određen zahtjevom $\mathbf{K}^{-1}_{3,3} = 1$
- Iz $\mathbf{K}^{-1}$ računa se $\mathbf{K}$ trivijalnim invertiranjem gornje trokutne matrice

Određivanje položaja pojedinih ravnina

- Podsjetimo se,

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2 & \mathbf{h}_3 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{K}\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \mathbf{t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{K}\mathbf{r}_1 & \lambda\mathbf{K}\mathbf{r}_2 & \lambda\mathbf{K}\mathbf{t} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{45}$$

  odnosno, $\mathbf{r}_i = \frac{1}{\lambda}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_i, i = 1, 2$

- Odatle,

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i &= 1/\lambda\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_\mathbf{i}, i = 1, 2 \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{t} &= 1/\lambda\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_\mathbf{3} \\ \lambda &= \frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\|\mathbf{K}^{-1}\mathbf{h}_\mathbf{i}\| \end{aligned} \tag{46}$$

Nelinearna optimizacija

- U postupak ulaze:
  - liste uparenih točaka $\{\mathbf{Q}_{Rij}\}, \{\mathbf{q}_{ij}\}, i = 1..n_p, j = 1..n_{ti}$
  - parametri pomaka $\{\mathbf{R}_i^\dagger\}$,$\{\mathbf{t}_i\}, i = 1..n_p$
  - intrinsični parametri: $\mathbf{K}$, $(\mathbf{k}_1^{ud}, \mathbf{k}_2^{ud})$, $(\mathbf{k}_1^{du}, \mathbf{k}_2^{du})$,
- Minimizira se norma funkcije $\mathrm{fcn} : \mathbb{R}^{9+6n_p} \rightarrow \mathbb{R}^{4n_p\bar{n}_t}$

$$\mathrm{fcn}(\{\mathbf{R}_i\}, \{\mathbf{t}_i\}, \mathbf{K}, \{\mathbf{k}_l^k\}) = \{\delta_{ij}^d, \delta_{ij}^u\}, i = 1..n_p, j = 1..n_{ti}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{ij}^d &= (\mathbf{K}\mathbf{f}_{ud}(\mathbf{M}_i'\mathbf{Q}_{Rij}') - \mathbf{q}_{ij})_{\mathbb{R}^2} \\
\delta_{ij}^u &= (\mathbf{K}\mathbf{M}_i'\mathbf{Q}_{Rij}' - \mathbf{K}\mathbf{f}_{du}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}_{ij}))_{\mathbb{R}^2} \\
\mathbf{M}_i' &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{M}_i^{1,2,4} \\
\mathbf{Q}_{Rij}' &= \mathbf{Q}_{Rij} - \varepsilon_H(\mathbf{Q}_{Rij}, \mathbf{K}\mathbf{M_i}', r))
\end{aligned} \tag{47}$$

Zaključak

- Optimizacijski postupak pronalazi optimalne vrijednosti[†] unutrašnjih i vanjskih (za svaki pogled) parametara kamere: $\mathbf{K}, \{\mathbf{k}_l^k\}\{\mathbf{R}_i\}, \{\mathbf{t}_i\}$
- $\delta_S = \|\mathrm{fcn}()\|_2$ je dvosmjerna projekcijska pogreška uparenih točaka u svakom pogledu i obuhvaća:
  - korekciju točaka detektiranih u slikovnoj ravnini
  - izobličenje projiciranih točaka mjernog uzorka
- Kvaliteta rješenja može se ocijeniti analizom dobivene projekcijske pogreške:
  - prosječna kutna pogreška umjeravanja se može odrediti kao: $\mathrm{arc\,tg}(\frac{\bar{\delta}_S}{s_x})$, $\bar{\delta}_S = \frac{\delta_S}{\sqrt{2n}}$
  - najveća kutna pogreška može se odrediti analizom pojedinačnih odstupanja

Rezultati

- Pronalaženje značajki mjernog uzorka
- Komentar kvalitete dobivene kalibracije
- Prikaz korekcije radijalne distorzije

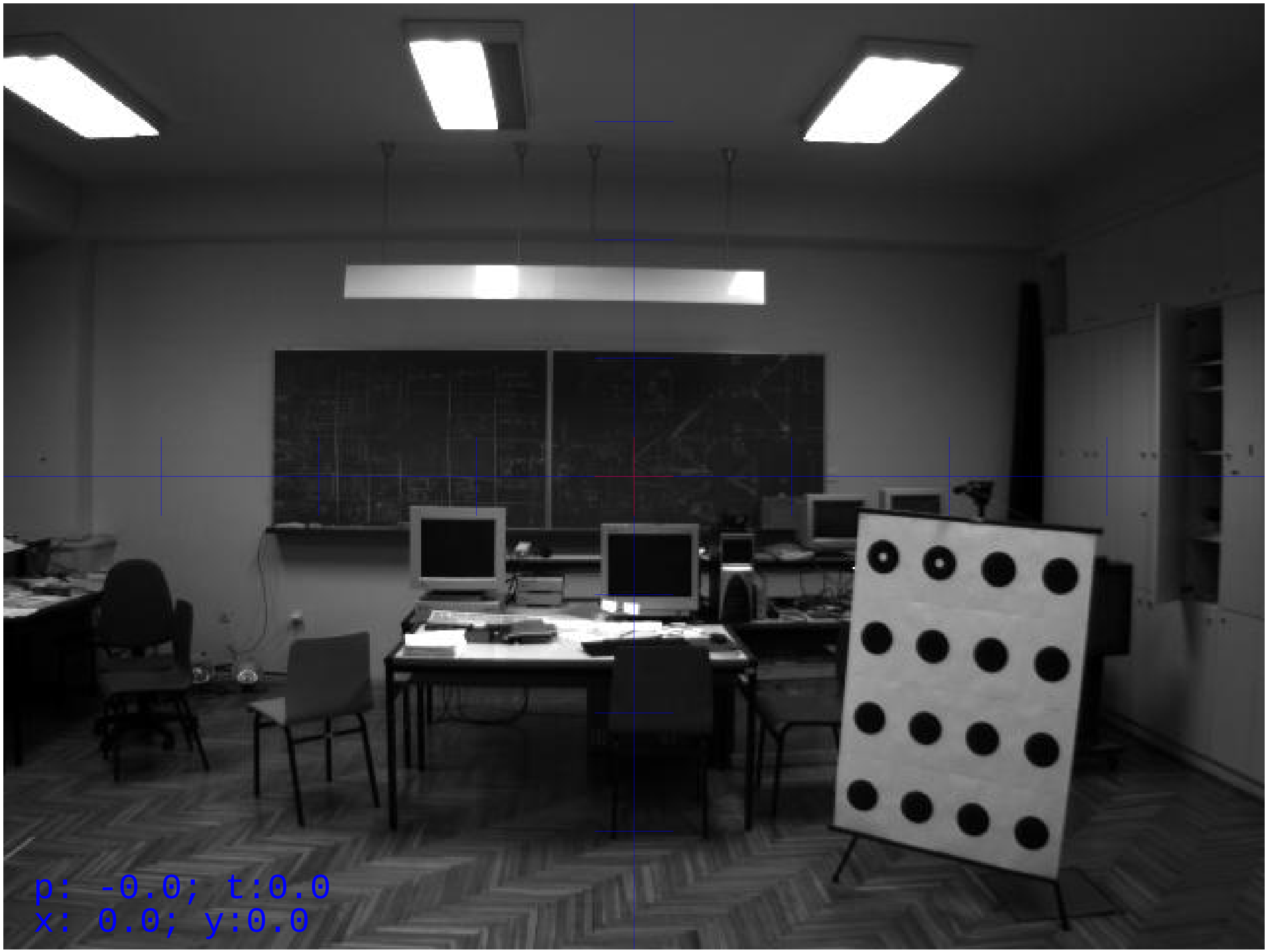
Pronalaženje značajki mjernog uzorka (1)

- Cilj: upariti pronađene regije sa pojedinim značajkama mjernog objekta (krugovima)
- Uparivanje treba biti robustno kako bi se omogućilo nesmetano eksperimentiranje
- Mjerni uzorak: pravokutno polje crnih krugova na bijeloj pozadini
- Parametri uzorka: udaljenost redaka i stupaca, te radijus krugova u proizvoljnim jedinicama
- Obično najpraktičnije odabrati kvadratni uzorak
- Ideja: poslužiti se simetrijom mjernog uzorka kao kriterijem detekcije!

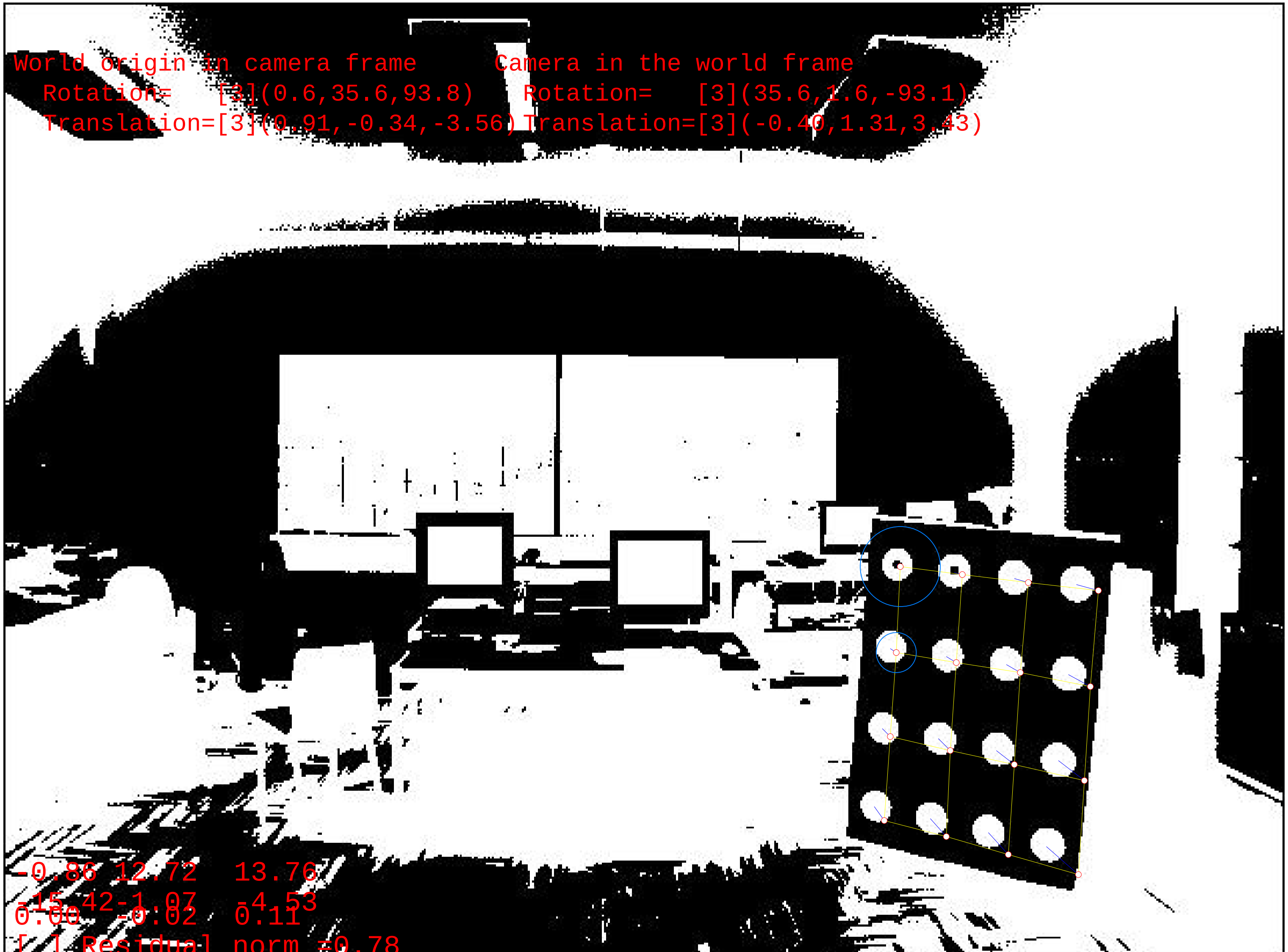
Pronalaženje značajki mjernog uzorka (2)

- Umjeravanje intrinsičnih parametara:
  - lakši posao, uzorak bi uvijek trebao zauzimati velik dio vidnog polja
  - svejedno nam je koji će se krug iz uzorka proglasiti ishodištem k.s. uzorka (svijeta)
  - nije bitno znati sve parametre uzorka, dovoljan je omjer širine retka i širine stupca (jedinica vanjskih parametara tada je širina retka)
- Vanjski parametri:
  - teži posao, uzorak može biti relativno mali
  - potrebno specijalno označiti ishodišni krug: u izvedbi, taj se krug označava sa bijelim kružićem
  - potrebno je znati parametre uzorka u željenim jedinicama (npr, cm)

Pronalaženje značajki - ulazna slika



Pronalaženje značajki - rezultat



Postupak pronalaženja:

- Slika se prvo binarizira sa pragom

$$\mathrm{th} = v_{min} + c \cdot (v_{max} - v_{min}) \tag{48}$$

  v_{max} i v_{min} su ekstremne vrijednosti sive razine u slici, a c ovisi o dobu dana
- Izluče se povezane regije za čije piksele vrijedi $v_p < \mathrm{th}$ (tražimo crne krugove)
- Grupiranje se temelji na svojstvu da se svaki redak (stupac) može inkrementalno rekonstruirati, korak po korak!
- Razlog tome je relativna blizina susjednih elemenata, projekcija se lokalno može opisati kao afina transformacija!

Grupiranje značajki

- Počevši od svake nakupine n_i, određuje se *baza* od 4 nakupine (n_i, n_j, n_k, n_l):
  - n_j - najbliža n_i
  - n_k - druga najbliža n_i, nije “kolinearna” sa n_i
  - n_l - treća najbliža n_i, nije “kolinearna” ni sa n_i, ni sa n_k
- Počevši od baze, određuju se dva rubna retka, a od njih svi stupci hipotetskog uzorka
- Odabire se ona baza koja generira “matricu” sa najviše elemenata mjernog uzorka!
- Bitno: Margina uzorka mora biti dovoljno velika da kutni elementi ne ostvare bazu sa nakupinama iz pozadine

Pronalaženje uzorka, završne napomene

- Ako je pronađeno ishodište, dodijeliti pojedinim elementima uzorka koordinate u skladu sa položajem u matrici koju definira odabrana baza
- Treba paziti da orijentacija sustava bude konzistentna sa orijentacijom koja se koristi u ostatku programskog sustava
- U izvedbi: odabire se uvijek "desni" k.s. uzorka

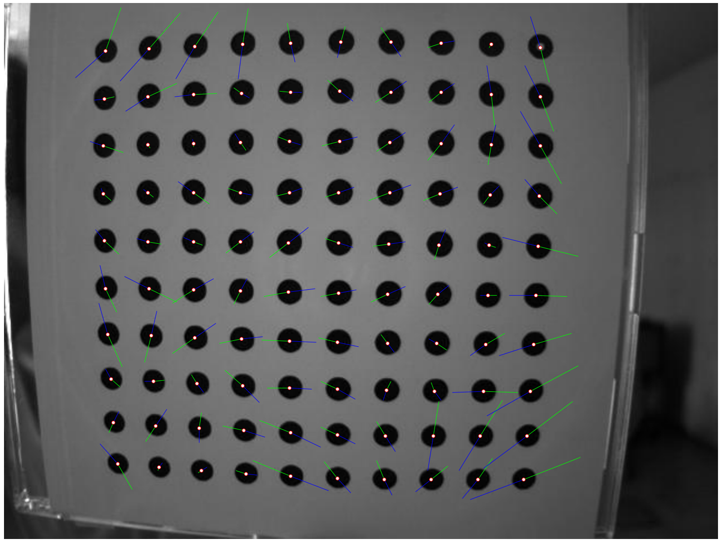
Kvaliteta dobivene kalibracije

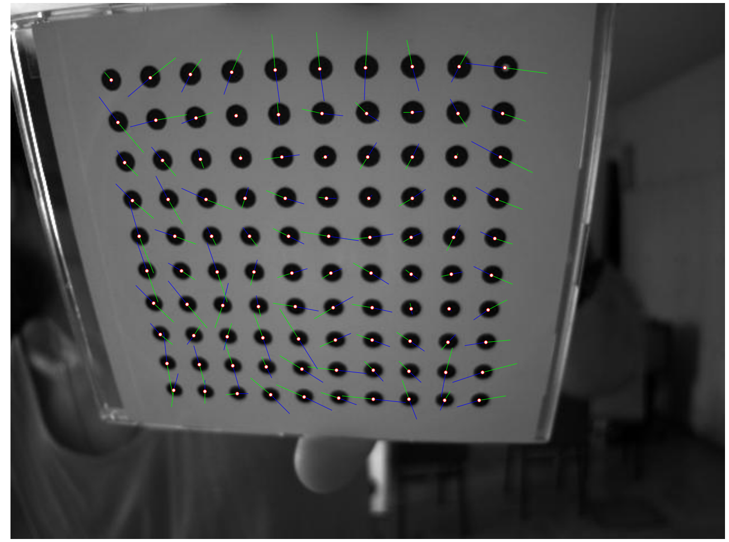
- Za najbolji skup od pet slika (500 korespondencija), dobiveni su sljedeći rezultati:
- Uz kompenzaciju radijalne distorzije:
  - $\mathrm{dev}_{\mathrm{av}}$ =0.20 pixel=0.020° (3.5 cm na 100 m)
  - $\mathrm{dev}_{\mathrm{max}}$=$0.70$ pixel=0.070° (12 cm na 100 m)
- Bez kompenzacije radijalne distorzije za isti skup slika:
  - $\mathrm{dev}_{\mathrm{av}}$ =2.3 pixel=0.6° (40 cm na 100 m)
  - $\mathrm{dev}_{\mathrm{max}}$=$7.2$ pixel=2.15° (1.3 m na 100 m)
- Kompenzacija homografijskog odstupanja središta kruga ne utječe na rezultat (krugovi mali?)
- Formalna analiza tolerancije, ovisnost o broju slika, tipu kamere, ... **=?**

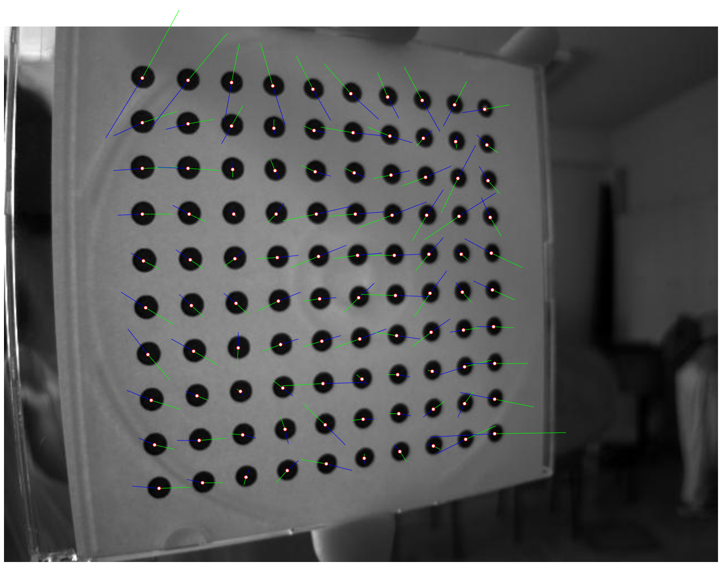
Ovisnost devijacije o mjernom uzorku

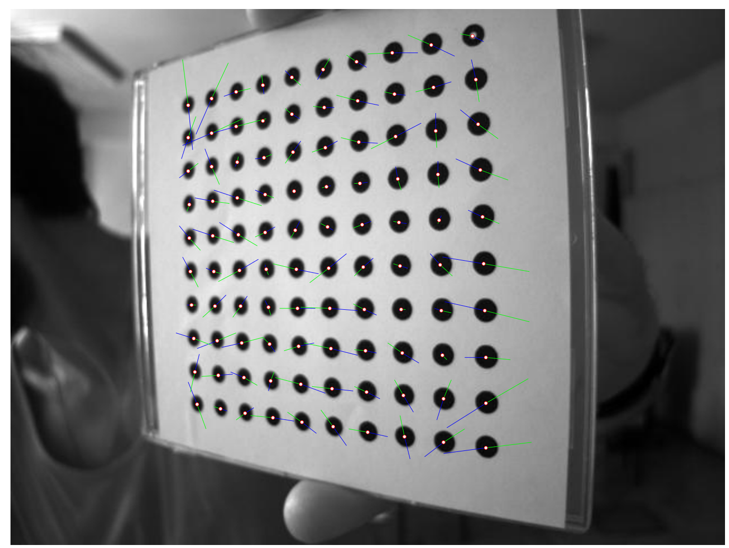
uzorak	veličina	n	$\mathrm{dev}_{\mathrm{av}}$	$\mathrm{dev}_{\mathrm{max}}$	θ_{hfov}
A	A4	4	0.64	1.67	64.01
B	A4	5	0.34	0.98	63.58
C	A5	5	0.20	0.69	63.47
A+B+C	-	14	0.48	1.69	63.82

Ovisnost devijacije o položaju mjerne točke



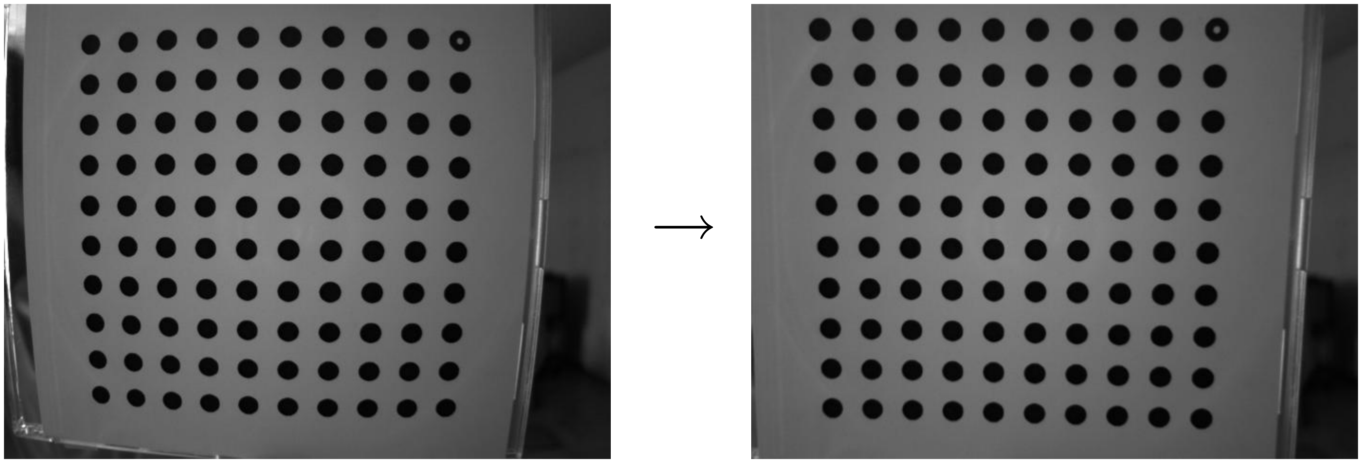




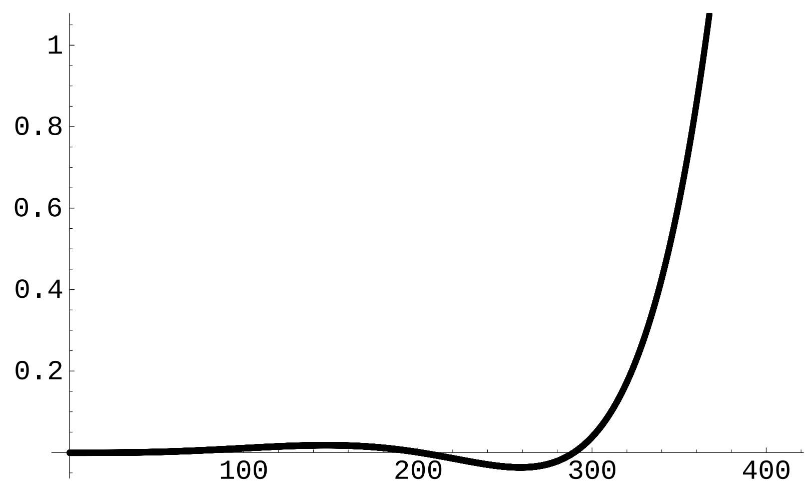


Korekcija radijalne distorzije

- Korekcija radijalne distorzije:



- Preciznost parametara radijalne distorzije kao graf $f_\varepsilon = r - f_{du}(f_{ud}(r))$:



Primjene

- Postupak umjeravanja omogućava korištenje kamere kao mjernog uređaja
- Brojne industrijske primjene:
  - kontrola aluminijskih i čeličnih proizvoda
  - izrada računalnih 3D modela ljudi, gradova, krajolika, arheoloških nalazišta
  - virtualna stvarnost
- Za kraj: neke elementarne posljedice izloženih formalizama

Korekcija radijalne distorzije

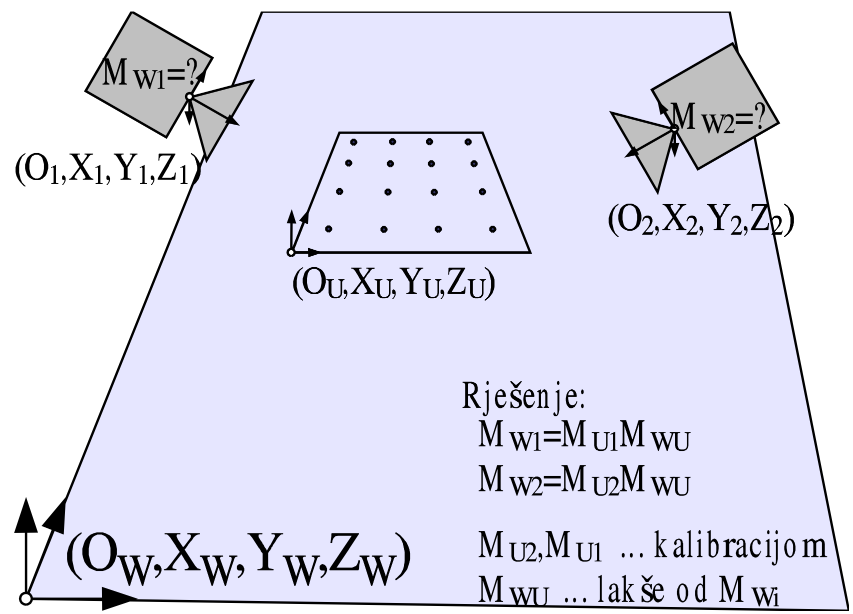
- Potrebno znati parametre kamere: $\mathbf{K}$ i $\{\mathbf{k}_l^k\}$
- Prvi scenario: korekcija čitave slike
  - elemente korigirane slike računamo bilinearnom transformacijom iz odgovarajuća ($\mathbf{f}^{ud}(\mathbf{q}_u)$=?) četiri elementa izobličene slike
  - postupak traje ~ 100 ms, za sliku $640 \times 480 \times 1$!
- Drugi scenario: korekcija pojedinih točaka
  - korigiramo samo neke elemente izobličene slike ($\mathbf{f}^{du}(\mathbf{q}_d) = ?$), npr. položaje detektiranih značajki
  - postupak je brz, ali nam ne može pomoći pri detekciji "velikih" značajki (npr, dugih bridova)!

Određivanje položaja skupa kamera

- Neka je zadan distribuirani sustav sa više agenata promatrača opremljenih kalibriranim kamerama
- Promatrači analiziraju pribavljene slike te međusobno komuniciraju u cilju izgradnje zajedničkog prikaza scene
- Problem: odrediti transformacije iz k.s. svijeta u k.s. pojedinih promatrača M_{Wi}, $i = 1, 2, \ldots, n_p$
- Rješenje bi trebalo biti: precizno, skalabilno, brzo provedivo, bez korištenja složene opreme

Određivanje položaja skupa kamera

- Neka je zadan distribuirani sustav sa više agenata promatrača opremljenih kalibriranim kamerama
- Promatrači analiziraju pribavljene slike te međusobno komuniciraju u cilju izgradnje zajedničkog prikaza scene
- Problem: odrediti transformacije iz k.s. svijeta u k.s. pojedinih promatrača M_{Wi}, $i = 1, 2, \ldots, n_p$
- Rješenje bi trebalo biti: precizno, skalabilno, brzo provedivo, bez korištenja složene opreme



3D položaj objekta na poznatoj ravnini

- Neka je ravnina Υ dana ishodištem $\mathbf{u_o}$ te koordinatnim vektorima $\mathbf{u_x}$ i $\mathbf{u_y}$; tada $\mathbf{Q}_R \in \Upsilon \mapsto \mathbf{q} \in \pi$ po formuli:

$$\mathbf{q} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u_x} & \mathbf{u_y} & \mathbf{u_o} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_R = \mathbf{P} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}_R = \mathbf{H} \cdot \mathbf{Q}_R \quad (49)$$

- Ako $\mathbf{H}_{3\times 3}$ nije singularna (tj, ravnina Υ je vidljiva u slici), tada inverzno preslikavanje $\Upsilon \to \pi$ postoji i dano je sa:

$$\mathbf{Q}_R = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{q}, \ \forall \mathbf{q} \in \pi \quad (50)$$

- Ako se Υ poklapa sa ravninom X-Y k.s. svijeta, vrijedi:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{:,1} & \mathbf{P}_{:,2} & \mathbf{P}_{:,4} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Geometrija upravljivog postolja

- Razmatra se upravljivo postolje sa dva rotacijska stupnja slobode γ_z (zakret) i γ_n (nagib)
- Tada je preslikavanje iz k.s. svijeta u k.s. kamere:

$$\mathbf{q} = \mathbf{KSM} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{KS}[\mathbf{M}_{RC}(\gamma_z, \gamma_n)\mathbf{M}_{WR}] \cdot \mathbf{Q} \tag{52}$$

  - $\mathbf{M}_{WR}$ pomak iz k.s. svijeta u k.s. postolja (uvijek isti)
  - $\mathbf{M}_{RC}$ pomak postolje $\rightarrow$ kamera (ovisi o γ_z, γ_n)
  - k.s. postolja i k.s. kamere se poklapaju za $\gamma_z = \gamma_n = 0$: $\mathbf{M}_{RC}(0,0) = \mathbf{I}$
- Idealno, $\mathbf{M}_{RC} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RC} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$ čista rotacija, uz:

$$\mathbf{R}_{RC} = \mathbf{R}_z(0)\mathbf{R}_x(\gamma_n)\mathbf{R}_y(\gamma_z) \tag{53}$$

Umjeravanje upravljivog postolja

- Ispravno bi bilo reći: “umjeravanje para postolje-kamera”, jer svako montiranje mijenja geometrijske odnose
- Kao i za kameru, i za postolje možemo reći da ima intrinsične $\mathbf{M}_{RC}(\gamma_z, \gamma_n)$ i vanjske parametre $\mathbf{M}_{WR}$!
- Umjeravanje slijedi analogni tijek: prvo unutrašnji parametri, onda vanjski
- Ako imamo unutrašnje parametre, vanjske možemo dobiti iz kalibriranih vanjskih parametara kamere!

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{M}_{RC}(\gamma_z, \gamma_n)\mathbf{M}_{WR} \Longrightarrow \\ &\mathbf{M}_{WR} = \mathbf{M}_{RC}(\gamma_z, \gamma_n)^{-1}\mathbf{M}\end{aligned} \tag{54}$$

- Ostaje problem umjeravanja unutrašnjih parametara!

Unutrašnji parametri upravljivog postolja (1)

- Temeljni postupak:
  - postaviti kalibracijski uzorak tako da zauzima 1/4 vidnog polja kamere
  - kalibrirati relativne pomake postolja u okolini trenutnog položaja (γ_{z0}, γ_{n0}) za sve ($\Delta\gamma_z$, $\Delta\gamma_n$) za koje je uzorak vidljiv
- Temeljni postupak ponoviti za “razne” položaje kalibracijskog uzorka, iz dobivenih podataka odrediti kalibraciju $\mathbf{M}_{RC}(\gamma_z, \gamma_n)$

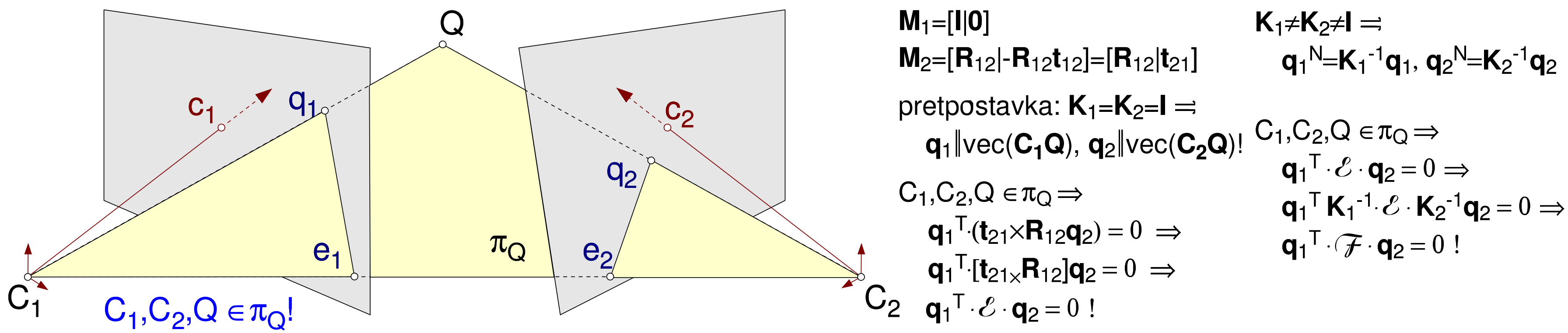
Unutrašnji parametri upravljivog postolja (2)

- Izvedbeni pristup “gruba sila”:
  - temeljni postupak ponavljati tako da umjerene okoline prekriju ukupno radno područje postolja
  - naći $\mathbf{M}_{RC}(\gamma_z, \gamma_n)$ uz pretpostavku $\mathbf{M}_{RC}(0,0) = \mathbf{I}$
- Izvedbeni pristup “precizno postolje”:
  - pretpostavka: $\mathbf{M}_{RC}$ je umnožak
    - konstantne translacije (opis montiranja kamere)
    - idealne rotacije (postolje je jako precizno)

$$\mathbf{M}_{RC}(\gamma_z, \gamma_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t}_{RC} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{RC}(\gamma_z, \gamma_n) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

  - temeljni postupak ponoviti za nekoliko pogleda, i riješiti $\mathbf{t}_{RC}$ (MKP!) uz $\mathbf{R}_{RC}(0,0) = \mathbf{I}$ i $\mathbf{t}_{RC}(0,0) = \mathbf{0}$

Epipolarno ograničenje stereo vida



- Za svaku točku $q_{1_0} \in S_1$, odgovarajuće točke $q_2 \in S_2$ leže na pravcu $\hat{\mathrm{q}}_{1_0} \cdot \mathcal{E} \cdot \hat{\mathrm{q}}_2 = 0$, odnosno $\mathbf{q}_{1_0} \cdot \mathcal{F} \cdot \mathbf{q}_2 = 0$

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R}_{12} = [\mathbf{t}_{12\times}] \cdot \mathbf{R}_{12} \qquad (56)$$

$$\mathcal{F} = \mathbf{K}_1^{-T} \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{K}_2^{-1} \qquad (57)$$

Bibliografija

[Tsai87] Roger Y. Tsai, A Versatile Camera Calibration Technique for High-Accuracy 3D Machine Vision Metrology Using Off-the-Shelf Cameras and Lenses, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 3(4):323–345, kolovoz 1987.

[Fusiello00] Andrea Fusiello, Uncalibrated Euclidean reconstruction: a review, *Image and Vision Computing*, 18(6-7):555–563, svibanj 2000.

[Heikkila00] Janne Heikkila, Geometric Camera Calibration Using Circular Control Points, *IEEE Transactions on Pattern recognition and Machine Intelligence*, 22(10):1066–1077, listopad 2000.

[Zhang00] Zhengyou Zhang, A flexible New Technique for Camera Calibration, *IEEE Transactions on Pattern recognition and Machine Intelligence*, 22(11):1330–1334, studeni 2000.

[Tamaki02] Toru Tamaki, Tsuyoshi Yamamura i Noboru Ohnishi, Unified Approach to Image Distortion, u *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition*, sv. 2, 584–589, Quebec, Canada, kolovoz 2002.

[Spies03] Hagen Spies, Geometric Aspects of Computer Vision, 2003, phD course. URL `http://www.isy.liu.se/˜hspies/course/course.html`